

光滑流形引论

Introduction to Smooth Manifolds

原书第二版 · 预览版

原著作者 John M. Lee (美国)

中文翻译 临江仙

更新发布 <https://afdian.com/a/solitairemiya>

更新日期 2026 年 4 月 5 日

惊鸿舟数海，一笔临江仙。



目录

第一章 光滑流形	1
第 1 节 拓扑流形	2
第 2 节 光滑结构	10
第 3 节 光滑流形的例子	15
第 4 节 带边流形	22
第 5 节 习题	26
第二章 光滑映射	29
第 1 节 光滑函数与光滑映射	29
第 2 节 单位分解	36
第 3 节 习题	43
第三章 切向量	45
第 1 节 切向量	46
第 2 节 光滑映射的微分	50
第 3 节 坐标中的计算	54
第 4 节 切丛	59
第 5 节 曲线的速度向量	62
第 6 节 切空间的其他定义	64
第 7 节 范畴与函子	66
第 8 节 习题	68
第四章 淹没、浸入与嵌入	70
第 1 节 常秩映射	70
第 2 节 嵌入	77

第3节 淹没	80
第4节 光滑覆叠映射	82
第5节 习题	86
术语表	88

第一章

光滑流形

本书研究**光滑流形**。用最简单的话来说，这些空间在局部上看起来像某个 Euclid 空间 \mathbb{R}^n ，并且可以在其上作微积分。除 Euclid 空间本身外，最常见的例子有光滑平面曲线（如圆和抛物线）以及光滑曲面（如球面、环面、抛物面、椭球面和双曲面）。高维的例子包括 \mathbb{R}^{n+1} 中与原点保持恒定距离的点集（ n 维球面），以及 Euclid 空间之间光滑映射的图像。

最简单的流形是**拓扑流形**，即具有某些特定性质的拓扑空间，这些性质刻画了所谓“在局部上看起来像” \mathbb{R}^n 的含义。这类空间被拓扑学家深入地研究。

然而，流形的许多（或许大多数）重要应用都涉及微积分。例如，流形理论在几何中的应用涉及体积和曲率等性质。通常，体积通过积分计算，曲率通过微分计算，因此要将这些概念推广到流形上，就需要某种在流形上定义积分和微分的手段。流形在经典力学中的应用涉及在流形上求解**常微分方程组**，而在**广义相对论**（引力理论）中的应用则涉及求解**偏微分方程组**。

将微积分的思想移植到流形上的第一个要求是某种“光滑性”的概念。对上述简单的流形例子而言，它们都是 Euclid 空间的子集，因此在直观层面上描述光滑性的含义是相当容易的。例如，可把具有逐点连续变化的**切线**的曲线称为“光滑曲线”，类似地，“光滑曲面”应是具有逐点连续变化的**切平面**的曲面。但对于更精细的应用而言，要求光滑流形必须是某个**外围 Euclid 空间**的子集是一种过分的限制。外围坐标以及 \mathbb{R}^n 的向量空间结构是多余的资料，通常与手头的问题毫无关系。能够把流形作为抽象的拓扑空间来研究，而不必背负这种外围空间的额外包袱，这是一个巨大的优势。例如，在广义相对论中，**时空**被建模为一个 4 维光滑流形，其上带有一种特定的几何结构，称为 **Lorentz 度量**，其曲率产生了引力现象。在这样的模型中，为流形所在的任何高维外围空间赋予物理意义是没有意义的，将这种空间包含在模型中会不必要地使其复杂化。出于这些原因，须将光滑流形视为抽象的拓扑空间，而不必一定是更大空间的子集。

不难看出，不可能定义一个纯粹的拓扑性质来作为“光滑性”的判据，因为它无法在**同胚**下保持不变。例如，平面上的圆和正方形是**同胚的**拓扑空间（图 1.1），但多数人想必都会同意圆是“光

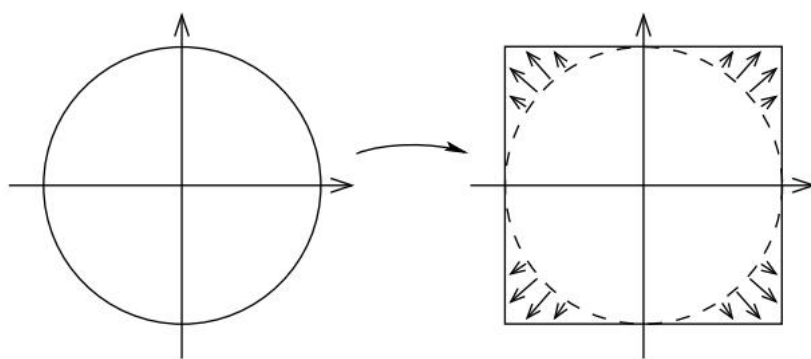


图 1.1: 从圆到正方形的同胚

滑的”，而正方形不是。因此，拓扑流形对我们的目的而言是不够的。相反，光滑流形应被视为一个具有两层结构的集合：首先是拓扑，然后是光滑结构。

在本章的第一节中，描述这两种结构中的第一种。拓扑流形是具有三个特殊性质的拓扑空间，这些性质表达了在局部上类似于 Euclid 空间的概念。Euclid 空间以及所有在局部上看起来像 Euclid 空间的熟悉几何对象（如曲线和曲面）都具有这些性质。随后证明流形的一些重要拓扑性质，它们在全书中都会用到。

在下一节中，引入一种附加结构，称为**光滑结构**，它可被加到拓扑流形上，使我们能够定义导数。

在给出基本定义之后，介绍若干流形的例子，以便读者在阅读一般理论时能有具体的对象作为参照。在本章末尾，引入**光滑带边流形**的概念，它是光滑流形的一个重要推广，在全书中有诸多应用，尤其在第 16 章对积分的研究中。

第 1 节 拓扑流形

本节介绍**拓扑流形**，它是最基本的流形类型。假设读者已熟悉拓扑空间的定义与基本性质，详见附录 A。

设 M 是一个拓扑空间。若 M 满足以下性质，则称 M 为**维数 n 的拓扑流形**，或**拓扑 n -流形**：

- (i) M 是 Hausdorff 空间：对任意两个不同的点 $p, q \in M$ ，存在不相交的开子集 $U, V \subseteq M$ ，使得 $p \in U$ 且 $q \in V$ 。
- (ii) M 是第二可数的： M 的拓扑具有**可数基**。
- (iii) M 是局部 Euclid 的，维数为 n ： M 的每一点都有一个邻域，该邻域与 \mathbb{R}^n 的某个开子集同胚。

第三条性质更具体地意味着，对每一点 $p \in M$ ，都能找到：

- M 的一个包含 p 的开子集 U ；
- \mathbb{R}^n 的一个开子集 \hat{U} ；
- 一个同胚 $\varphi: U \rightarrow \hat{U}$ 。

习题 1.1. 证明：若在定义中将“ U 与 \mathbb{R}^n 的某个开子集同胚”替换为“ U 与 \mathbb{R}^n 中的某个开球同胚”，或者替换为“ U 与 \mathbb{R}^n 本身同胚”，则得到的是拓扑流形的等价定义。

若 M 是拓扑流形，我们常将 M 的维数简记为 $\dim M$. 在非正式场合，有时用“设 M^n 是一个流形”作为“设 M 是一个维数为 n 的流形”的简写. 上标 n 并不是流形名称的一部分，通常在首次出现之后便不再包含在记号中.

需要特别注意的是，根据定义，每个拓扑流形都有特定且良定义的维数. 因此，根本不把混合维数的空间（例如一个平面与一条直线的不交并）视为流形. 第 17 章将利用 de Rham 上调理论证明下述定理，它表明（非空）拓扑流形的维数实际上是一个拓扑不变量.

定理 1.2 (维数的拓扑不变性). 非空 n 维拓扑流形不可能与 m 维流形同胚，除非 $m = n$.

其证明见定理 17.26. 第 2 章还将证明一个相关但较弱的定理（维数的微分同胚不变性，定理 2.17）. 另见 [LeeTM, Chap. 13]，其中利用奇异同调论给出了定理 1.2 的另一种证明.

空集对任意 n 都满足拓扑 n -流形的定义. 在大多数情况下，我们将忽略这一特例（有时甚至忘了说明）. 但由于在某些情形下允许空流形是有用的，我们选择不把它从定义中排除.

拓扑 n -流形最基本的例子是 \mathbb{R}^n 本身. 它是 Hausdorff 空间，因为它是度量空间；它是第二可数的，因为所有以有理点为中心、以有理数为半径的开球构成了其拓扑的一个可数基.

要求流形具备这些性质有助于保证其行为符合对 Euclid 空间的经验预期. 例如，容易验证在 Hausdorff 空间中，有限子集都是闭集，而且收敛序列的极限是唯一的（见附录 A 中的习题 A.11）. 第二可数性的动机不那么明显，但它在全书中有重要的推论，主要源于单位分解的存在性（见第 2 章）.

在实践中，Hausdorff 性质和第二可数性通常都很容易验证，特别是对于那些由其他流形构造出来的空间，因为这两条性质都被子空间和有限乘积所继承（命题 A.17 和 A.23）. 特别地，拓扑 n -流形的每个开子集本身也是一个拓扑 n -流形（当然要赋予子空间拓扑）.

应当指出，有些作者选择从流形定义中去掉 Hausdorff 性质或第二可数性，或者两者皆去. 然而，关于流形的大多数有趣结果事实上都需要这些性质，而且在自然界中遇到的空间极少会因为不满足这两个假设之一而不是流形. 关于几个简单的例子，见习题 1-1 和 1-2；关于一个更复杂的例子（一个连通的、局部 Euclid 的、Hausdorff 的但不是第二可数的空间），见 [LeeTM, 习题 4-6].

坐标卡

设 M 是一个拓扑 n -流形. M 上的**坐标卡**（或简称**坐标卡**）是指一个对 (U, φ) ，其中 U 是 M 的开子集， $\varphi: U \rightarrow \hat{U}$ 是从 U 到开子集 $\hat{U} = \varphi(U) \subseteq \mathbb{R}^n$ 的一个同胚（图 1.2）. 根据拓扑流形的定义，每一点 $p \in M$ 都包含在某个坐标卡 (U, φ) 的域中. 若 $\varphi(p) = 0$ ，则称该坐标卡**以 p 为中心**. 若 (U, φ) 是任意一个域包含 p 的坐标卡，则通过减去常向量 $\varphi(p)$ 很容易得到一个新的以 p 为中心的坐标卡.

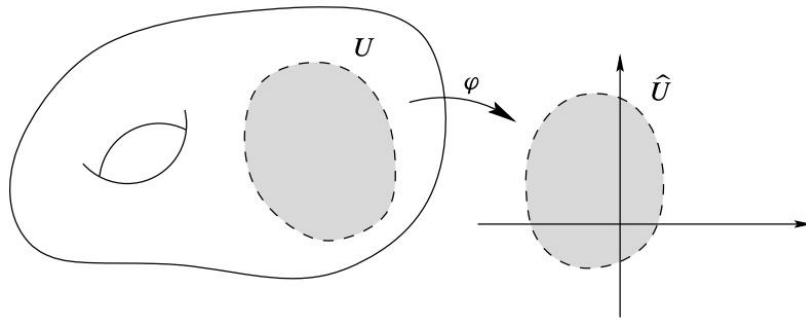


图 1.2: 坐标卡

给定一个坐标卡 (U, φ) , 称集合 U 为**坐标域**, 或其中每一点的**坐标邻域**. 此外, 若 $\varphi(U)$ 是 \mathbb{R}^n 中的开球, 则称 U 为**坐标球**; 若 $\varphi(U)$ 是开方体, 则称 U 为**坐标方体**. 映射 φ 称为**(局部)坐标映射**, 而其**分量函数** (x^1, \dots, x^n) 由下式定义:

$$\varphi(p) = (x^1(p), \dots, x^n(p)),$$

称为 U 上的**局部坐标**. 有时把“ (U, φ) 是包含 p 的坐标卡”作为“ (U, φ) 是其坐标域 U 包含 p 的坐标卡”的简写. 若想强调坐标函数 (x^1, \dots, x^n) 而不是坐标映射 φ , 则有时将该坐标卡记为 $(U, (x^1, \dots, x^n))$ 或 $(U, (x^i))$.

拓扑流形的例子

下面是一些简单的例子.

例 1.3 (连续函数的图像). 设 $U \subseteq \mathbb{R}^n$ 是开子集, $f: U \rightarrow \mathbb{R}^k$ 是连续函数. f 的**图像**是 $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^k$ 的子集, 定义为

$$\Gamma(f) = \{(x, y) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^k : x \in U \text{ 且 } y = f(x)\},$$

并赋予子空间拓扑. 设 $\pi_1: \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^k \rightarrow \mathbb{R}^n$ 表示到第一个因子的投影, $\varphi: \Gamma(f) \rightarrow U$ 是 π_1 在 $\Gamma(f)$ 上的限制:

$$\varphi(x, y) = x, \quad (x, y) \in \Gamma(f).$$

因为 φ 是连续映射的限制, 所以它是连续的; 而且它是一个同胚, 因为其连续逆由 $\varphi^{-1}(x) = (x, f(x))$ 给出. 因此 $\Gamma(f)$ 是一个维数为 n 的拓扑流形. 事实上, $\Gamma(f)$ 与 U 本身同胚, 而且 $(\Gamma(f), \varphi)$ 是一个全局坐标卡, 称为**图坐标**. 同样的观察适用于 \mathbb{R}^{n+k} 中由任意 k 个坐标 (不一定是最后 k 个) 等于其余 n 个坐标的某个连续函数所定义的子集, 其中这 n 个坐标被限制在一个 \mathbb{R}^n 的开子集中.

例 1.4 (球面). 对每个整数 $n \geq 0$, 单位 n 维球面 S^n 是 Hausdorff 且第二可数的, 因为它是 \mathbb{R}^{n+1} 的拓扑子空间. 为证明它是局部 Euclid 的, 对每个指标 $i = 1, \dots, n+1$, 记 U_i^+ 为 \mathbb{R}^{n+1} 中第 i 个坐

标为正的子集:

$$U_i^+ = \{(x^1, \dots, x^{n+1}) \in \mathbb{R}^{n+1} : x^i > 0\}.$$

(见图 1.3.) 类似地, U_i^- 是满足 $x^i < 0$ 的集合.

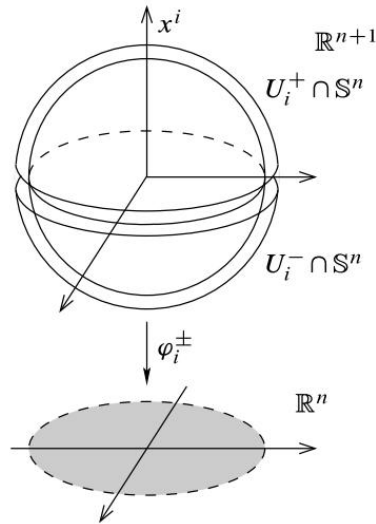


图 1.3: S^n 的坐标卡

设 $f: \mathbb{B}^n \rightarrow \mathbb{R}$ 是连续函数

$$f(u) = \sqrt{1 - |u|^2}.$$

则对每个 $i = 1, \dots, n+1$, 容易验证 $U_i^+ \cap S^n$ 是函数

$$x^i = f(x^1, \dots, \hat{x}^i, \dots, x^{n+1})$$

的图像, 其中帽子符号表示省略 x^i . 类似地, $U_i^- \cap S^n$ 是

$$x^i = -f(x^1, \dots, \hat{x}^i, \dots, x^{n+1})$$

的图像. 因此, 每个子集 $U_i^\pm \cap S^n$ 都是维数为 n 的局部 Euclid 空间, 而映射 $\varphi_i^\pm: U_i^\pm \cap S^n \rightarrow \mathbb{B}^n$ 由下式给出:

$$\varphi_i^\pm(x^1, \dots, x^{n+1}) = (x^1, \dots, \hat{x}^i, \dots, x^{n+1})$$

它们是 S^n 的图坐标. 由于 S^n 的每一点都至少在这 $2n+2$ 个坐标卡之一的域中, 所以 S^n 是一个拓扑 n -流形.

例 1.5 (射影空间). n 维实射影空间, 记作 $\mathbb{R}P^n$ (有时也简记为 \mathbb{P}^n), 定义为 \mathbb{R}^{n+1} 的所有 1 维线性子空间构成的集合, 其上的商拓扑由自然映射 $\pi: \mathbb{R}^{n+1} \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{R}P^n$ 决定, 该映射将每一点 $x \in \mathbb{R}^{n+1} \setminus \{0\}$ 映到 x 张成的子空间. 2 维射影空间 $\mathbb{R}P^2$ 称为射影平面. 对任意点 $x \in \mathbb{R}^{n+1} \setminus \{0\}$,

记 $[x] = \pi(x) \in \mathbb{R}P^n$ 为 x 张成的直线.

对每个 $i = 1, \dots, n+1$, 记 $\tilde{U}_i \subseteq \mathbb{R}^{n+1} \setminus \{0\}$ 为满足 $x^i \neq 0$ 的集合, 并记 $U_i = \pi(\tilde{U}_i) \subseteq \mathbb{R}P^n$. 因为 \tilde{U}_i 是饱和开子集, 所以 U_i 是开集, 而且 $\pi|_{\tilde{U}_i}: \tilde{U}_i \rightarrow U_i$ 是商映射 (见定理 A.27). 定义映射 $\varphi_i: U_i \rightarrow \mathbb{R}^n$ 为

$$\varphi_i [x^1, \dots, x^{n+1}] = \left(\frac{x^1}{x^i}, \dots, \frac{x^{i-1}}{x^i}, \frac{x^{i+1}}{x^i}, \dots, \frac{x^{n+1}}{x^i} \right).$$

这个映射是良定义的, 因为它的值在将 x 乘以非零常数时不变. 因为 $\varphi_i \circ \pi$ 是连续的, 由商映射的特征性质 (定理 A.27) 可知 φ_i 是连续的. 事实上, φ_i 是一个同胚, 因为它有连续的逆:

$$\varphi_i^{-1}(u^1, \dots, u^n) = [u^1, \dots, u^{i-1}, 1, u^i, \dots, u^n],$$

这一点读者可自行验证. 从几何上看, $\varphi([x]) = u$ 意味着 $(u, 1)$ 是 \mathbb{R}^{n+1} 中直线 $[x]$ 与仿射超平面 $x^i = 1$ 的交点 (图 1.4).

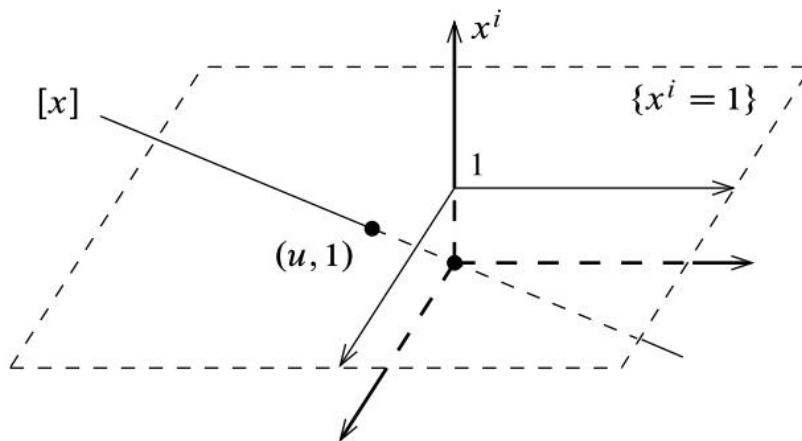


图 1.4: $\mathbb{R}P^n$ 的一个坐标卡

因为集合 U_1, \dots, U_{n+1} 覆盖了 $\mathbb{R}P^n$, 这就说明 $\mathbb{R}P^n$ 是维数为 n 的局部 Euclid 空间. Hausdorff 性质和第二可数性留作习题.

习题 1.6. 证明 $\mathbb{R}P^n$ 是 Hausdorff 且第二可数的, 从而是一个拓扑 n -流形.

习题 1.7. 证明 $\mathbb{R}P^n$ 是紧的. [提示: 证明 π 在 S^n 上的限制是满射.]

例 1.8 (乘积流形). 设 M_1, \dots, M_k 分别是维数为 n_1, \dots, n_k 的拓扑流形. 乘积空间 $M_1 \times \dots \times M_k$ 是维数为 $n_1 + \dots + n_k$ 的拓扑流形, 验证如下. 由命题 A.17 和 A.23 可知它是 Hausdorff 且第二可数的, 因此只需验证局部 Euclid 性质. 任取一点 $(p_1, \dots, p_k) \in M_1 \times \dots \times M_k$, 可为每个 M_i 选取坐标卡 (U_i, φ_i) 使得 $p_i \in U_i$. 乘积映射

$$\varphi_1 \times \dots \times \varphi_k : U_1 \times \dots \times U_k \rightarrow \mathbb{R}^{n_1 + \dots + n_k}$$

是到其像的同胚，而像正是 $\mathbb{R}^{n_1+\dots+n_k}$ 的乘积开子集。因此， $M_1 \times \dots \times M_k$ 是维数为 $n_1 + \dots + n_k$ 的拓扑流形，其坐标卡形如 $(U_1 \times \dots \times U_k, \varphi_1 \times \dots \times \varphi_k)$ 。

例 1.9 (环面). 对正整数 n ， n 维环面 (复数形式为 *tori*) 是指乘积空间 $\mathbb{T}^n = S^1 \times \dots \times S^1$ 。根据上面的讨论，它是一个拓扑 n -流形。(2 维环面通常简称为环面。)

拓扑流形的拓扑性质

作为拓扑空间，流形是相当特殊的，因为它们与 Euclid 空间共享诸多重要性质。本节讨论几个这样的性质，它们将在全书中 useful。

本节讨论的大多数性质都依赖于如下事实：每个流形的拓扑都具有性状特别好的基。

引理 1.10. 每个拓扑流形都具有由预紧坐标球构成的可数基。

证明. 设 M 是一个拓扑 n -流形。先考虑 M 能被单个坐标卡覆盖的特殊情形。设 $\varphi: M \rightarrow \hat{U} \subseteq \mathbb{R}^n$ 为全局坐标映射， \mathcal{B} 是 \mathbb{R}^n 中所有满足以下条件的开球 $B_r(x)$ 构成的集合： r 是有理数， x 的坐标是有理数，而且存在某个 $r' > r$ 使得 $B_{r'}(x) \subseteq \hat{U}$ 。每个这样的球在 \hat{U} 中都是预紧的，而且容易验证 \mathcal{B} 是 \hat{U} 拓扑的一个可数基。因为 φ 是同胚，所以形如 $\varphi^{-1}(B)$ (其中 $B \in \mathcal{B}$) 的集合构成了 M 拓扑的一个可数基，它们都是预紧坐标球，相应的坐标映射是 φ 的限制。

现在设 M 是任意的 n -流形。根据定义， M 的每一点都在某个坐标卡的域中。因为第二可数空间的每个开覆盖都有可数子覆盖 (命题 A.16)，所以 M 可被可数多个坐标卡 $\{(U_i, \varphi_i)\}$ 覆盖。由前一段论证可知，每个坐标域 U_i 都具有由在 U_i 中预紧的坐标球构成的可数基。所有这些可数基的并就是 M 拓扑的一个可数基。若 $V \subseteq U_i$ 是其中的一个球，则 V 在 U_i 中的闭包是紧的，而因为 M 是 Hausdorff 空间，所以 V 在 U_i 中的闭包也是 M 中的闭集。由此可见， V 在 M 中的闭包与它在 U_i 中的闭包相同，因此 V 在 M 中也是预紧的。 \square

连通性

坐标球基的存在性对流形的连通性质有重要推论。回忆一下，拓扑空间 X 称为

- **连通的**，如果不存在两个不相交的非空开子集，其并集为 X ；
- **道路连通的**，如果 X 中任意两点都可以用 X 中的道路连接；
- **局部道路连通的**，如果 X 具有由道路连通开子集构成的基。

(见附录 A.) 下面的命题表明，对流形而言，连通性与道路连通性是一致的。

命题 1.11. 设 M 是一个拓扑流形。

- (a) M 是局部道路连通的。
- (b) M 是连通的当且仅当它是道路连通的。
- (c) M 的连通分支与道路连通分支相同。

(d) M 具有可数个连通分支, 每个都是 M 的开子集, 且是连通的拓扑流形.

证明. 因为每个坐标球都是道路连通的, (a) 可由 M 具有坐标球基这一事实直接得到. (b) 和 (c) 是 (a) 与命题 A.43 的直接推论. 为证明 (d), 注意每个连通分支都是 M 中的开集 (命题 A.43), 故连通分支的集合是 M 的一个开覆盖. 因为 M 是第二可数的, 这个覆盖必有可数子覆盖. 但由于连通分支两两不相交, 原来的覆盖本身就必是可数的, 也就是说 M 只有可数个连通分支. 因为连通分支都是开集, 所以它们在子空间拓扑下都是连通的拓扑流形. \square

局部紧性与仿紧性

流形的下一个拓扑性质是局部紧性 (定义见附录 A).

命题 1.12 (流形是局部紧的). 每个拓扑流形都是局部紧的.

证明. 引理 1.10 表明每个流形都具有由预紧开子集构成的基. \square

流形所具有的另一个关键拓扑性质称为**仿紧性**. 它是局部紧性和第二可数性的推论, 事实上也是将第二可数性纳入流形定义的主要原因之一.

设 M 是拓扑空间. M 的子集族 \mathcal{X} 称为**局部有限的**, 若 M 的每一点都有一个邻域, 该邻域与 \mathcal{X} 中至多有限个集合相交. 给定 M 的一个覆盖 \mathcal{U} , 另一个覆盖 \mathcal{V} 称为 \mathcal{U} 的**加细**, 若对每个 $V \in \mathcal{V}$ 都存在某个 $U \in \mathcal{U}$ 使得 $V \subseteq U$. 称 M 是**仿紧的**, 若 M 的每个开覆盖都存在开的局部有限加细.

引理 1.13. 设 \mathcal{X} 是拓扑空间 M 的一个局部有限子集族.

(a) 集合族 $\{\overline{X} : X \in \mathcal{X}\}$ 也是局部有限的.

(b) $\overline{\bigcup_{X \in \mathcal{X}} X} = \bigcup_{X \in \mathcal{X}} \overline{X}$.

习题 1.14. 证明上述引理.

定理 1.15 (流形是仿紧的). 每个拓扑流形都是仿紧的. 事实上, 给定拓扑流形 M 、它的开覆盖 \mathcal{X} 以及 M 拓扑的任意基 \mathcal{B} , 都存在由 \mathcal{B} 中元素构成的 \mathcal{X} 的可数局部有限开加细.

证明. 设 M 、 \mathcal{X} 和 \mathcal{B} 如定理假设所述, $(K_j)_{j=1}^\infty$ 为 M 的紧集穷竭 (命题 A.60). 对每个 j , 令 $V_j = K_{j+1} \setminus \text{Int } K_j$, $W_j = \text{Int } K_{j+2} \setminus K_{j-1}$ (当 $j < 1$ 时, 将 K_j 解释为空集). 则 V_j 是紧集, 且包含在开子集 W_j 中. 对每个 $x \in V_j$, 存在某个 $X_x \in \mathcal{X}$ 包含 x , 而因为 \mathcal{B} 是基, 所以存在 $B_x \in \mathcal{B}$ 使得 $x \in B_x \subseteq X_x \cap W_j$. 当 x 取遍 V_j 时, 所有这样的集合 B_x 构成了 V_j 的一个开覆盖, 因而具有有限子覆盖. 当 j 取遍正整数时, 所有这些有限子覆盖的并就是 M 的一个可数开覆盖, 并且是 \mathcal{X} 的加细. 因为覆盖 V_j 的有限子覆盖由包含在 W_j 中的集合组成, 而且除了 $j-2 \leq j' \leq j+2$ 的情形外都有 $W_j \cap W_{j'} = \emptyset$, 所以得到的覆盖是局部有限的. \square

习题 1-5 表明, 至少对连通空间而言, 仿紧性可以代替第二可数性作为流形定义的一部分.

流形的基本群

下面关于流形基本群的结果将在第 4 章研究覆盖流形时发挥重要作用. 关于基本群的简要回顾, 见附录 A.

命题 1.16. 拓扑流形的基本群是可数的.

证明. 设 M 是一个拓扑流形. 由引理 1.10, 存在覆盖 M 的可数个坐标球构成的族 \mathcal{B} . 对任意一对坐标球 $B, B' \in \mathcal{B}$, 交集 $B \cap B'$ 至多具有可数个连通分支, 每个分支都是道路连通的. 设 \mathcal{X} 是一个可数集, 它包含每对 $B, B' \in \mathcal{B}$ (包括 $B = B'$ 的情形) 所对应的 $B \cap B'$ 的每个连通分支中的一个点. 对每个 $B \in \mathcal{B}$ 以及每对满足 $x, x' \in B$ 的 $x, x' \in \mathcal{X}$, 记 $h_{x,x'}^B$ 为 B 中从 x 到 x' 的某条道路.

因为同一连通分支中任意两点的基本群都是同构的, 且 \mathcal{X} 包含 M 的每个连通分支中的至少一个点, 故不妨取 $p \in \mathcal{X}$ 作为基点. 定义**特殊环路**为基于 p 的环路, 且等于有限条形如 $h_{x,x'}^B$ 的道路的乘积. 显然, 特殊环路的集合是可数的, 且每个特殊环路都确定了 $\pi_1(M, p)$ 中的一个元素. 因此, 要证明 $\pi_1(M, p)$ 可数, 只需证明 $\pi_1(M, p)$ 中的每个元素都可由特殊环路代表.

设 $f: [0, 1] \rightarrow M$ 是基于 p 的环路. 当 B 取遍 \mathcal{B} 时, 形如 $f^{-1}(B)$ 的集合的连通分支的集合是 $[0, 1]$ 的开覆盖, 因此由紧性可知它具有有限子覆盖. 于是, 存在有限个数 $0 = a_0 < a_1 < \dots < a_k = 1$ 使得 $[a_{i-1}, a_i] \subseteq f^{-1}(B)$ 对某个 $B \in \mathcal{B}$ 成立. 对每个 i , 记 f_i 为 f 在区间 $[a_{i-1}, a_i]$ 上的限制, 重新参数化使其定义域为 $[0, 1]$; 记 $B_i \in \mathcal{B}$ 为包含 f_i 的像的某个坐标球. 对每个 i , 有 $f(a_i) \in B_i \cap B_{i+1}$, 且存在某个 $x_i \in \mathcal{X}$ 与 $f(a_i)$ 落在 $B_i \cap B_{i+1}$ 的同一个连通分支中. 设 g_i 是 $B_i \cap B_{i+1}$ 中从 x_i 到 $f(a_i)$ 的一条道路 (图 1.5), 并约定 $x_0 = x_k = p$, 且 g_0 和 g_k 都等于基于 p 的常值道路 c_p .

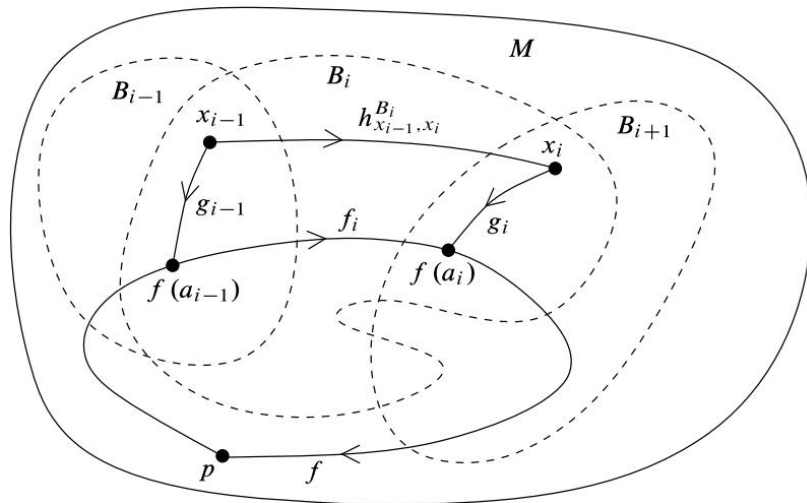


图 1.5: 流形的基本群是可数的

那么, 由于 $\bar{g}_i \cdot g_i$ 与常值道路同伦 (其中 $\bar{g}_i(t) = g_i(1-t)$ 为 g_i 的反向道路),

$$\begin{aligned} f &\sim f_1 \cdots f_k \\ &\sim g_0 \cdot f_1 \cdot \bar{g}_1 \cdot g_1 \cdot f_2 \cdot \bar{g}_2 \cdots \bar{g}_{k-1} \cdot g_{k-1} \cdot f_k \cdot \bar{g}_k \\ &\sim \tilde{f}_1 \cdot \tilde{f}_2 \cdots \tilde{f}_k, \end{aligned}$$

其中 $\tilde{f}_i = g_{i-1} \cdot f_i \cdot \bar{g}_i$. 对每个 i , \tilde{f}_i 是 B_i 中从 x_{i-1} 到 x_i 的道路. 由于 B_i 是道路连通的, \tilde{f}_i 与 $h_{x_{i-1}, x_i}^{B_i}$ 道路同伦. 由此可见, f 与一条特殊环路道路同伦. \square

第 2 节 光滑结构

上一节给出的流形定义, 足以研究流形的拓扑性质, 例如紧性、连通性、单连通性, 以及将流形按同胚分类的问题. 然而, 在整个拓扑流形理论中完全没有提及微积分. 这样做是有充分理由的: 无论试图如何理解流形上函数的导数, 这种导数都不可能在同胚下保持不变. 例如, 由 $\varphi: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ 给出的映射 $\varphi(u, v) = (u^{1/3}, v^{1/3})$ 是一个同胚, 且易构造可微函数 $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ 使得 $f \circ \varphi$ 在原点处不可微. (函数 $f(x, y) = x$ 就是这样一个例子.)

为了理解实值函数、曲线或流形之间映射的导数, 需要引入一种新型的流形, 称为**光滑流形**. 它是在拓扑之外还带有某种额外结构的拓扑流形, 这种结构使我们能够判断哪些到流形或从流形出发的函数是光滑的.

这个定义将基于 Euclid 空间之间映射的微积分, 因此先回顾一些关于这类映射的基本术语. 如果 U 和 V 分别是 Euclid 空间 \mathbb{R}^n 和 \mathbb{R}^m 的开子集, 则称函数 $F: U \rightarrow V$ 为**光滑的** (或 C^∞ 的, 或**无限可微的**), 若它的每个分量函数都具有所有阶的连续偏导数. 此外, 若 F 是双射且具有光滑的逆映射, 则称它为**微分同胚**. 微分同胚特别地也是一个同胚.

关于光滑映射的一些重要性质的回顾见附录 C. 读者应当注意, 有些作者对**光滑的**这个词有不同的定义——例如, 指连续可微的或仅仅是可微的. 另一方面, 有些作者用**可微的**来表示本书所指的光滑的. 在本书中, 光滑的与 C^∞ 是同义的.

为了弄明白在拓扑流形上添加什么样的额外结构才适合判别哪些映射是光滑的, 考虑一个任意的拓扑 n -流形 M . M 中的每一点都在某个坐标映射 $\varphi: U \rightarrow \hat{U} \subseteq \mathbb{R}^n$ 的定义域中.

一个关于 M 上光滑函数的看似合理的定义是: 称 $f: M \rightarrow \mathbb{R}$ 为光滑的, 当且仅当复合函数 $f \circ \varphi^{-1}: \hat{U} \rightarrow \mathbb{R}$ 在普通微积分的意义下是光滑的. 但这一定义只有在该性质与坐标卡的选择无关时才有意义. 为保证这种无关性, 只需将注意力限制在“光滑坐标卡”上. 由于光滑性不是同胚不变量, 做到这一点的方法就是将所有光滑坐标卡的集合视为 M 上的一种新型结构.

基于这一动机, 下面来详细描述这一构造.

设 M 是一个拓扑 n -流形. 如果 (U, φ) 和 (V, ψ) 是两个坐标卡, 且 $U \cap V \neq \emptyset$, 那么复合映射 $\psi \circ \varphi^{-1}: \varphi(U \cap V) \rightarrow \psi(U \cap V)$ 称为从 φ 到 ψ 的**转移映射** (图 1.6). 它是同胚的复合, 因此本身也

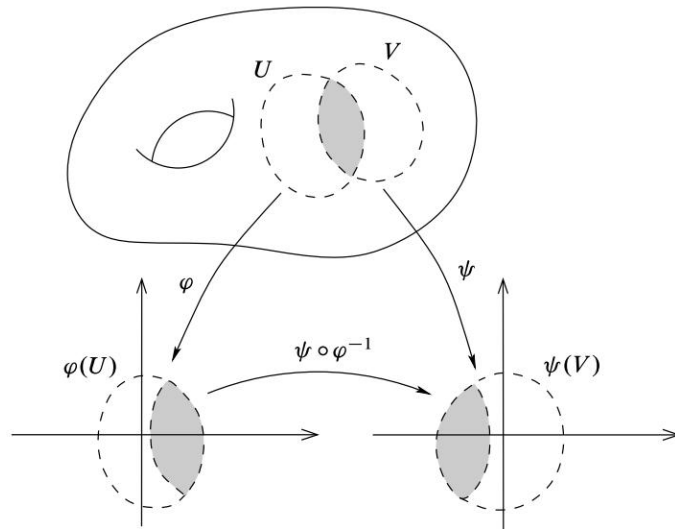


图 1.6: 转移映射

是同胚. 称两个坐标卡 (U, φ) 与 (V, ψ) 为**光滑相容的**, 如果要么 $U \cap V = \emptyset$, 要么转移映射 $\psi \circ \varphi^{-1}$ 是一个微分同胚. 由于 $\varphi(U \cap V)$ 和 $\psi(U \cap V)$ 都是 \mathbb{R}^n 的开子集, 该映射的光滑性应按普通意义理解, 即具有所有阶的连续偏导数.

将 M 的**图册**定义为定义域覆盖 M 的坐标卡的集合. 称一个图册 \mathcal{A} 为**光滑图册**, 如果其中任意两个坐标卡都是光滑相容的.

为证明一个图册是光滑的, 只需验证: 每当 (U, φ) 和 (V, ψ) 是 \mathcal{A} 中的坐标卡时, 转移映射 $\psi \circ \varphi^{-1}$ 就是光滑的; 一旦证明了这一点, 就可知 $\psi \circ \varphi^{-1}$ 是一个微分同胚, 因为它的逆 $(\psi \circ \varphi^{-1})^{-1} = \varphi \circ \psi^{-1}$ 正是已证为光滑的转移映射之一. 另一种情况是, 给定两个特定的坐标卡 (U, φ) 和 (V, ψ) , 通常最简单的证明它们光滑相容的方法是验证 $\psi \circ \varphi^{-1}$ 是光滑且单射的, 并且在每一点处的 **Jacobi** 矩阵都是非奇异的, 然后引用推论 C.36.

下面的计划是, 通过给出一个光滑图册来定义 M 上的“光滑结构”, 并且定义函数 $f: M \rightarrow \mathbb{R}$ 为光滑的, 当且仅当对于图册中的每个坐标卡 (U, φ) , 复合函数 $f \circ \varphi^{-1}$ 在普通微积分的意义下都是光滑的. 这个方法有一个小小的技术问题: 一般来说, 会有多个图册给出“相同的”光滑结构, 也就是说它们都确定 M 上同一类光滑函数. 例如, 考虑 \mathbb{R}^n 上的如下两个图册:

$$\begin{aligned}\mathcal{A}_1 &= \{(\mathbb{R}^n, \text{Id}_{\mathbb{R}^n})\}, \\ \mathcal{A}_2 &= \{(B_1(x), \text{Id}_{B_1(x)}) : x \in \mathbb{R}^n\}.\end{aligned}$$

虽然这是两个不同的光滑图册, 但显然一个函数 $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ 关于其中任一个是光滑的, 当且仅当它在普通微积分的意义下是光滑的.

可以选择将光滑结构定义为光滑图册在某个适当的等价关系下的等价类. 然而, 更直接的做法是给出如下定义: M 上的光滑图册 \mathcal{A} 称为**极大的**, 如果它不被任何更大的光滑图册真包含. 这恰好意味着任何与 \mathcal{A} 中每个坐标卡都光滑相容的坐标卡都已经包含在 \mathcal{A} 中. (这样的光滑图册也称

为完备的.)

下面定义本章的核心概念. 如果 M 是一个拓扑流形, 那么 M 上的**光滑结构**就是一个极大光滑图册. **光滑流形**是指一个对 (M, \mathcal{A}) , 其中 M 是拓扑流形, 而 \mathcal{A} 是 M 上的一个光滑结构. 当光滑结构已默认清楚时, 通常不再提及它, 而直接说“ M 是一个光滑流形”. 有些作者也把光滑结构称为**微分结构**或 C^∞ **结构**. 我们也用术语**光滑流形结构**来表示一个流形拓扑连同其上的一个光滑结构.

强调, 光滑结构是必须添加到拓扑流形上的一种额外数据, 在此之后才有资格谈论“光滑流形”. 事实上, 一个给定的拓扑流形可能有很多不同的光滑结构 (见例 1.23 和习题 1-6). 另一方面, 也并非总能在给定的拓扑流形上找到光滑结构: 存在根本不容许任何光滑结构的拓扑流形. (第一个例子是 Michel Kervaire 于 1960 年发现的一个 10 维紧流形 [Ker60].)

通过显式描述一个极大光滑图册来定义光滑结构通常是很不方便的, 因为这样的图册包含非常多的坐标卡. 幸运的是, 如下命题表明, 只需指定某个光滑图册即可.

命题 1.17. 设 M 是一个拓扑流形.

- (a) M 的每个光滑图册 \mathcal{A} 都包含在唯一的极大光滑图册中, 称为由 \mathcal{A} 决定的光滑结构.
- (b) M 的两个光滑图册决定相同的光滑结构, 当且仅当它们的并集是一个光滑图册.

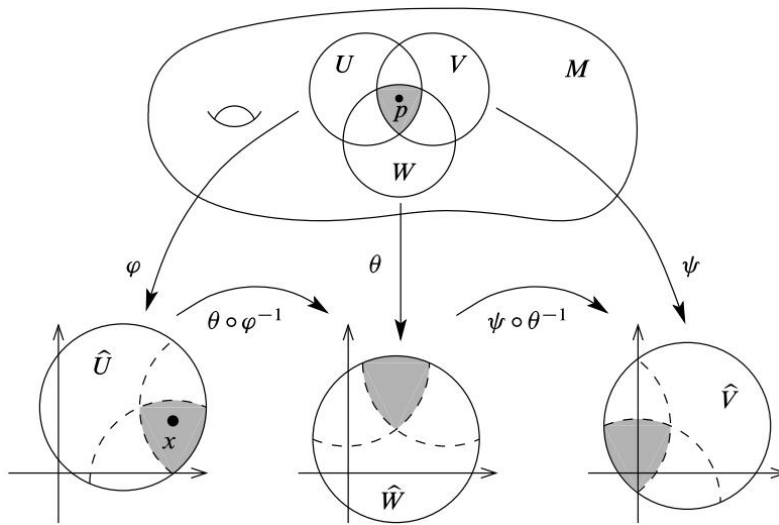


图 1.7: 命题 1.17(a) 的证明

证明. 设 \mathcal{A} 是 M 的一个光滑图册; 并令 $\bar{\mathcal{A}}$ 表示所有与 \mathcal{A} 中每个坐标卡都光滑相容的坐标卡的集合. 为证明 $\bar{\mathcal{A}}$ 是一个光滑图册, 只需证明 $\bar{\mathcal{A}}$ 中任意两个坐标卡彼此都是光滑相容的, 也就是说对于任意 $(U, \varphi), (V, \psi) \in \bar{\mathcal{A}}$, 映射 $\psi \circ \varphi^{-1}: \varphi(U \cap V) \rightarrow \psi(U \cap V)$ 是光滑的.

设 $x = \varphi(p) \in \varphi(U \cap V)$ 任意. 因为 \mathcal{A} 中坐标卡的定义域覆盖 M , 所以存在某个坐标卡 $(W, \theta) \in \mathcal{A}$ 使得 $p \in W$ (图 1.7). 由于 $\bar{\mathcal{A}}$ 中的每个坐标卡都与 (W, θ) 光滑相容, 映射 $\theta \circ \varphi^{-1}$ 和

$\psi \circ \theta^{-1}$ 在它们有定义的地方都是光滑的. 因为 $p \in U \cap V \cap W$, 所以

$$\psi \circ \varphi^{-1} = (\psi \circ \theta^{-1}) \circ (\theta \circ \varphi^{-1})$$

在 x 的某个邻域上是光滑的. 因此, $\psi \circ \varphi^{-1}$ 在 $\varphi(U \cap V)$ 中每一点附近都是光滑的. 从而 $\bar{\mathcal{A}}$ 是一个光滑图册. 为验证它是极大的, 只需注意任何与 $\bar{\mathcal{A}}$ 中每个坐标卡都光滑相容的坐标卡, 特别地也与 \mathcal{A} 中每个坐标卡光滑相容, 因此它已经属于 $\bar{\mathcal{A}}$. 这就证明了包含 \mathcal{A} 的极大光滑图册的存在性. 如果 \mathcal{B} 是任何其他包含 \mathcal{A} 的极大光滑图册, 那么它的每个坐标卡都与 \mathcal{A} 中的每个坐标卡光滑相容, 所以 $\mathcal{B} \subseteq \bar{\mathcal{A}}$. 由 \mathcal{B} 的极大性, $\mathcal{B} = \bar{\mathcal{A}}$.

(b) 的证明留作习题. □

习题 1.18. 证明命题 1.17(b).

例如, 如果一个拓扑流形 M 可以被单个坐标卡覆盖, 那么光滑相容条件就平凡满足, 因此任何这样的坐标卡都自动决定了 M 上的一个光滑结构.

值得一提的是, 光滑结构的概念可以通过改变坐标卡之间的相容性要求而以几种不同的方式加以推广. 例如, 如果将坐标卡必须光滑相容的要求替换为较弱的要求, 即每个转移映射 $\psi \circ \varphi^{-1}$ (及其逆) 属于 C^k 类, 就得到了 C^k **结构** 的定义. 类似地, 如果要求每个转移映射都是实解析的 (即能在每一点附近表示为收敛幂级数), 就得到了**实解析结构** 的定义, 也称为 C^ω **结构**. 如果 M 具有偶数维 $n = 2m$, 可以将 \mathbb{R}^{2m} 与 \mathbb{C}^m 等同, 并要求转移映射是复解析的; 这就确定了一个**复解析结构**. 赋予这些结构之一的流形分别称为 C^k **流形**、**实解析流形** 或 **复流形**. (注意, C^0 流形就是拓扑流形.) 本书不讨论这些其他类型的流形, 但它们在分析中扮演着重要角色, 因此了解其定义是有益的.

局部坐标表示

如果 M 是光滑流形, 那么包含在给定极大光滑图册中的任何坐标卡 (U, φ) 都称为**光滑坐标卡**, 相应的坐标映射 φ 称为**光滑坐标映射**. 用**光滑坐标域**或**光滑坐标邻域**等术语来指称光滑坐标卡的定义域也是有益的. **光滑坐标球**是指一个光滑坐标域, 其在光滑坐标映射下的像为 Euclid 空间中的一个球. 类似地可以定义**光滑坐标方体**.

将注意力限制在那些闭包能很好地包含在更大的坐标球中的坐标球内, 往往是有用的. 如果存在一个光滑坐标球 $B' \supseteq \bar{B}$ 以及一个光滑坐标映射 $\varphi: B' \rightarrow \mathbb{R}^n$, 使得对某两个正实数 $r < r'$ 有

$$\varphi(B) = B_r(0), \quad \varphi(\bar{B}) = \bar{B}_r(0), \quad \text{且} \quad \varphi(B') = B_{r'}(0),$$

那么就称集合 $B \subseteq M$ 为一个**正则坐标球**.

因为 \bar{B} 与 $\bar{B}_r(0)$ 同胚, 所以它是紧的, 从而每个正则坐标球在 M 中都是**预紧的**. 下一个命题给出了光滑流形上引理 1.10 的一个微小改进. 其证明是对该引理证明的直接改写.

命题 1.19. 每个光滑流形都具有由正则坐标球构成的可数基.

习题 1.20. 证明命题 1.19.

下面是通常在光滑流形上思考坐标卡的方式. 一旦在 M 上选定了一个光滑坐标卡 (U, φ) , 坐标映射 $\varphi: U \rightarrow \hat{U} \subseteq \mathbb{R}^n$ 就可看作在 U 与 \hat{U} 之间给出了一个暂时的等同. 利用这个等同, 在这个坐标卡中工作时, 可以同时把 U 看作 M 的开子集以及 \mathbb{R}^n 的开子集. 可以把这种等同想象成在 U 上画了一张“网格”, 它代表 φ 下坐标线原像的集合 (图 1.8).

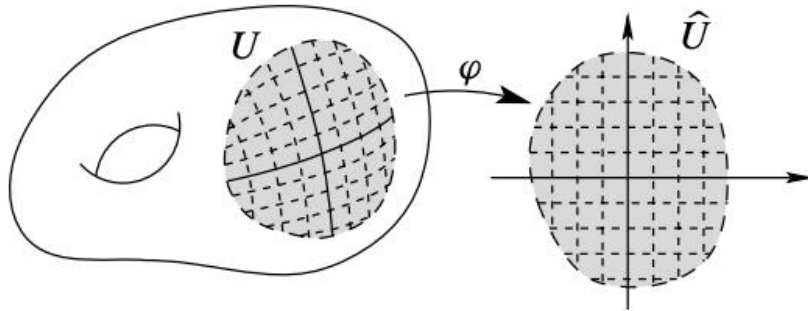


图 1.8: 坐标网格

在这种等同下, 可以用坐标 $(x^1, \dots, x^n) = \varphi(p)$ 来表示点 $p \in U$, 并且把这个 n 元组看成就是点 p . 通常表述为: 称 (x^1, \dots, x^n) 为 p 的 (局部) 坐标表示, 或者“ $p = (x^1, \dots, x^n)$ 在局部坐标下”.

另一种看待它的方式是, 通过这种等同 $U \approx \hat{U}$, 可把 φ 看作恒等映射, 并在记号中省略它. 这需要一点时间去适应, 但回报是在很多情形中记号会得到极大的简化. 只需记住, 这种等同一般而言只是局部的, 而且严重依赖于坐标卡的选择.

读者可能已经在多元微积分的学习中习惯了这种等同. 最常见的例子是平面上的极坐标 (r, θ) , 由关系 $(x, y) = (r \cos \theta, r \sin \theta)$ 隐式定义 (见例 C.37). 在一个适当的开子集上, 例如 $U = \{(x, y) : x > 0\} \subseteq \mathbb{R}^2$, (r, θ) 可以表示为 (x, y) 的光滑函数, 而且把 (x, y) 送到相应的 (r, θ) 的映射, 关于 \mathbb{R}^2 上的标准光滑结构是一个光滑坐标映射. 利用这个映射, 可以把一个给定的点 $p \in U$ 写成标准坐标下的 $p = (x, y)$, 或者极坐标下的 $p = (r, \theta)$, 两种坐标表示之间的关系由

$$(r, \theta) = \left(\sqrt{x^2 + y^2}, \tan^{-1} \frac{y}{x} \right) \quad \text{和} \quad (x, y) = (r \cos \theta, r \sin \theta)$$

给出. 把 (r, θ) 限制在 $\mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$ 的其他开子集上, 可以得到其他的极坐标坐标卡.

流形不带有预先确定的坐标选择, 这一事实既是福也是祸. 在处理流形理论中的问题时, 能够近乎任意地选择坐标是一大优势, 因为坐标通常可以被选来简化手头问题的某个方面. 但也要为这种灵活性付出代价: 必须确保任何希望在流形上全局定义的对象都不依赖于某个特定的坐标选择. 通常有两种方法可以做到这一点: 一种是写出一个坐标依赖的定义, 然后证明该定义在任何坐标卡下都给出相同的结果; 另一种是写出一个明显不依赖于坐标的定义 (通常称为**不变定义**). 会在少数几个坐标依赖方法明显更简单的情况下使用它, 但绝大多数时候, 只要可能, 便给出不依

赖于坐标的定义. 对这种定义的需求在很大程度上解释了现代流形理论的抽象性. 为有效地运用流形理论, 需要掌握的最重要的技能之一, 就是能够在不变描述与它们的坐标对应形式之间轻松切换.

第3节 光滑流形的例子

在继续讨论一般理论之前, 先来回顾一些光滑流形的例子.

例 1.21 (0 维流形). 一个 0 维的拓扑流形 M 就是一个可数离散空间. 对每个点 $p \in M$, p 的邻域中唯一与 \mathbb{R}^0 的某个开子集同胚的就是 $\{p\}$ 本身, 且恰好只有一个坐标映射 $\varphi: \{p\} \rightarrow \mathbb{R}^0$. 因此, M 上所有坐标卡的集合平凡地满足光滑相容条件, 而且每个 0 维流形都有唯一的光滑结构.

例 1.22 (Euclid 空间). 对每个非负整数 n , Euclid 空间 \mathbb{R}^n 是一个光滑的 n -流形, 其光滑结构由仅含单个坐标卡 $(\mathbb{R}^n, \text{Id}_{\mathbb{R}^n})$ 的图册决定. 称此为 \mathbb{R}^n 上的**标准光滑结构**, 由此得到的坐标映射称为**标准坐标**. 除非明确另有说明, 在 \mathbb{R}^n 上总是使用这个光滑结构. 关于这个光滑结构, \mathbb{R}^n 的光滑坐标卡恰好就是那些坐标卡 (U, φ) , 其中 φ (在普通微积分的意义下) 是从 U 到另一开子集 $\hat{U} \subseteq \mathbb{R}^n$ 的微分同胚.

例 1.23 (\mathbb{R} 上的另一个光滑结构). 考虑同胚 $\psi: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, 它由 $\psi(x) = x^3$ 给出.

$$\psi(x) = x^3. \quad (1.1)$$

仅含单个坐标卡 (\mathbb{R}, ψ) 的图册定义了 \mathbb{R} 上的一个光滑结构. 这个坐标卡与标准光滑结构不是光滑相容的, 因为转移映射 $\text{Id}_{\mathbb{R}} \circ \psi^{-1}(y) = y^{1/3}$ 在原点处不是光滑的. 因此, 由 ψ 定义的 \mathbb{R} 上的光滑结构与标准光滑结构不同. 利用类似的想法, 不难在任何一个给定的正维拓扑流形上构造出许多不同的光滑结构, 只要它本身已经有一个光滑结构即可 (见习题 1-6).

例 1.24 (有限维向量空间). 设 V 是一个有限维实向量空间. V 上的任何范数都决定一个拓扑, 且这个拓扑与范数的选择无关 (习题 B.49). 赋予这个拓扑后, V 是一个拓扑 n -流形, 并具有如下的自然光滑结构. 每个 (有序) 基 (E_1, \dots, E_n) 都决定一个**基同构** $E: \mathbb{R}^n \rightarrow V$:

$$E(x) = \sum_{i=1}^n x^i E_i.$$

这个映射是同胚, 所以 (V, E^{-1}) 是一个坐标卡. 如果 $(\tilde{E}_1, \dots, \tilde{E}_n)$ 是另一个基, 且 $\tilde{E}(x) = \sum_j x^j \tilde{E}_j$ 是相应的同构, 则存在可逆矩阵 (A_i^j) 使得对每个 i 有 $E_i = \sum_j A_i^j \tilde{E}_j$. 两个坐标卡之间的转移映射

于是由 $\tilde{E}^{-1} \circ E(x) = \tilde{x}$ 给出, 其中 $\tilde{x} = (\tilde{x}^1, \dots, \tilde{x}^n)$ 由

$$\sum_{j=1}^n \tilde{x}^j \tilde{E}_j = \sum_{i=1}^n x^i E_i = \sum_{i,j=1}^n x^i A_i^j \tilde{E}_j$$

决定. 由此得 $\tilde{x}^j = \sum_i A_i^j x^i$. 因此, 将 x 映到 \tilde{x} 的映射是一个可逆线性映射, 从而是微分同胚, 所以任何两个这样的坐标卡都是光滑相容的. 所有这类坐标卡的集合因此定义了一个光滑结构, 称为 V 上的**标准光滑结构**.

Einstein 求和约定

这里暂停一下, 介绍一个在光滑流形研究中常用的重要记号约定. 由于这个学科中充斥着诸如 $\sum_i x^i E_i$ 这样的求和, 经常通过省略求和号来缩写这样的和, 例如

$$E(x) = x^i E_i, \quad \text{作为} \quad E(x) = \sum_{i=1}^n x^i E_i \quad \text{的缩写.}$$

按照如下称为 **Einstein 求和约定** 的规则来解释任何这样的表达式: 如果同一个指标名 (如上式中的 i) 在某个单项式中恰好出现两次, 一次作为上指标, 一次作为下指标, 则理解为对该指标所有可能的取值求和, 通常是从 1 到所讨论空间的维数. 这一简单想法由 Einstein 引入, 通过省去显式书写求和号, 降低了光滑流形研究中表达式的复杂度. 除了附录之外, 全书都系统地使用求和约定 (许多读者会在读正文之前先翻阅附录).

求和约定的另一个重要方面是指标的位置. 总是把基向量 (如 E_i) 写成下指标, 而把向量相对于基的分量 (如 x^i) 写成上指标. 这些指标约定有助于确保, 在数学上有意义的求和中, 每个要求和的指标通常在任意给定项中出现两次, 一次是下指标, 一次是上指标. 任何被隐式求和的指标都是“哑指标”, 这意味着用一个不同的名字替换每个哑指标, 该表达式的值不变. 例如, $x^i E_i$ 和 $x^j E_j$ 表示完全相同的东西.

因为点 $(x^1, \dots, x^n) \in \mathbb{R}^n$ 的坐标也是它相对于标准基的分量, 所以为与将向量的分量写成上指标的约定保持一致, 需要对这些坐标也使用上指标, 而且在全书都这样做. 尽管一开始这可能显得别扭, 但结合求和约定, 在处理复杂的带指标求和时, 它会带来巨大的便利, 其中一点就是那些没有数学意义的表达式往往会因为违反指标约定而很快暴露出来. (主要的例外是涉及 Euclid 点积 $x \cdot y = \sum_i x^i y^i$ 的表达式, 其中同一个指标两次都出现在上指标位置, 以及将在第 22 章中定义的 \mathbb{R}^{2n} 上的标准辛形式. 在这类表达式中, 总是显式地写出求和号.)

更多例子

现在继续给出光滑流形的例子.

例 1.25 (矩阵空间). 设 $\mathbf{M}(m \times n, \mathbb{R})$ 表示所有 $m \times n$ 实矩阵的集合. 因为在矩阵加法和数乘下, 它是维数为 mn 的实向量空间, 所以 $\mathbf{M}(m \times n, \mathbb{R})$ 是一个光滑的 mn 维流形. (事实上, 把矩阵的所有元素串成一行, 将 $\mathbf{M}(m \times n, \mathbb{R})$ 与 \mathbb{R}^{mn} 等同, 往往是有用的.) 类似地, $m \times n$ 复矩阵的空间 $\mathbf{M}(m \times n, \mathbb{C})$ 是一个维数为 $2mn$ 的实向量空间, 从而是一个维数为 $2mn$ 的光滑流形. 在特殊情形 $m = n$ (方阵) 下, 分别将 $\mathbf{M}(n \times n, \mathbb{R})$ 和 $\mathbf{M}(n \times n, \mathbb{C})$ 简记为 $\mathbf{M}(n, \mathbb{R})$ 和 $\mathbf{M}(n, \mathbb{C})$.

例 1.26 (开子流形). 设 U 是 \mathbb{R}^n 的任意开子集. 则 U 是一个拓扑 n -流形, 且单个坐标卡 (U, Id_U) 定义了 U 上的一个光滑结构.

更一般地, 设 M 是一个光滑 n -流形, 而 $U \subseteq M$ 是任意开子集. 通过

$$\mathcal{A}_U = \{\text{满足 } V \subseteq U \text{ 的 } M \text{ 的光滑坐标卡 } (V, \varphi)\}$$

在 U 上定义一个图册. 每个点 $p \in U$ 都包含在 M 的某个坐标卡 (W, φ) 的定义域中; 若令 $V = W \cap U$, 那么 $(V, \varphi|_V)$ 就是 \mathcal{A}_U 中一个定义域包含 p 的坐标卡. 因此, U 被 \mathcal{A}_U 中坐标卡的定义域所覆盖, 且容易验证这是 U 的一个光滑图册. 于是 M 的任何开子集本身都以自然的方式是一个光滑 n -流形. 赋予这个光滑结构后, 称 M 的任何开子集为 M 的一个**开子流形**. (将在第 5 章中定义更一般的一类子流形.)

例 1.27 (一般线性群). 一般线性群 $\text{GL}(n, \mathbb{R})$ 是所有 $n \times n$ 可逆实矩阵的集合. 它是一个光滑的 n^2 维流形, 因为它是 n^2 维向量空间 $\mathbf{M}(n, \mathbb{R})$ 的一个开子集, 即 (连续的) 行列式函数不为零的点的集合.

例 1.28 (满秩矩阵). 前一个例子有一个自然的推广, 即到满秩的矩形矩阵. 假设 $m < n$, 并设 $\mathbf{M}_m(m \times n, \mathbb{R})$ 表示 $\mathbf{M}(m \times n, \mathbb{R})$ 中秩为 m 的矩阵组成的子集. 若 A 是这样一个矩阵, 则 $\text{rank } A = m$ 意味着 A 有某个非奇异的 $m \times m$ 子矩阵. 由行列式函数的连续性, 这个子矩阵在 $\mathbf{M}(m \times n, \mathbb{R})$ 中 A 的某个邻域上仍有非零行列式, 这意味着 A 有一个含于 $\mathbf{M}_m(m \times n, \mathbb{R})$ 中的邻域. 因此, $\mathbf{M}_m(m \times n, \mathbb{R})$ 是 $\mathbf{M}(m \times n, \mathbb{R})$ 的一个开子集, 从而本身是一个光滑的 mn 维流形. 类似的论证表明, 当 $n < m$ 时, $\mathbf{M}_n(m \times n, \mathbb{R})$ 也是一个光滑的 mn 维流形.

例 1.29 (线性映射空间). 设 V 和 W 是有限维实向量空间, 并设 $L(V; W)$ 表示从 V 到 W 的线性映射的集合. 因为 $L(V; W)$ 本身是有限维向量空间 (维数为 V 与 W 的维数之积), 如例 1.24 所述, 它具有自然的光滑流形结构. 在其上放置整体坐标的一种方法是选取 V 和 W 的基, 然后用矩阵表示每个 $T \in L(V; W)$, 这就给出了 $L(V; W)$ 与 $\mathbf{M}(m \times n, \mathbb{R})$ 之间的一个同构, 其中 $m = \dim W$, $n = \dim V$.

例 1.30 (光滑函数的图像). 如果 $U \subseteq \mathbb{R}^n$ 是一个开子集, 且 $f: U \rightarrow \mathbb{R}^k$ 是一个光滑函数, 那么上面 (例 1.3) 已观察到, f 的图像在子空间拓扑下是一个拓扑 n -流形. 因为 $\Gamma(f)$ 被单个图像坐标卡 $\varphi: \Gamma(f) \rightarrow U$ (即 π_1 的限制) 所覆盖, 只需声明图像坐标卡 $(\Gamma(f), \varphi)$ 是一个光滑坐标卡, 便可在 $\Gamma(f)$ 上赋予一个典范的光滑结构.

例 1.31 (球面). 例 1.4 已证明 n 维球面 $S^n \subseteq \mathbb{R}^{n+1}$ 是一个拓扑 n -流形. 按如下方式在 S^n 上赋予光滑结构. 对每个 $i = 1, \dots, n+1$, 设 (U_i^\pm, φ_i^\pm) 表示例 1.4 中构造的图像坐标卡. 对任意不同的指标 i 和 j , 转移映射 $\varphi_i^\pm \circ (\varphi_j^\pm)^{-1}$ 很容易计算. 在 $i < j$ 的情形下, 得到

$$\varphi_i^\pm \circ (\varphi_j^\pm)^{-1}(u^1, \dots, u^n) = (u^1, \dots, \widehat{u^i}, \dots, \pm\sqrt{1-|u|^2}, \dots, u^n)$$

(平方根在第 j 个位置), 当 $i > j$ 时也有类似的公式. 当 $i = j$ 时, 更简单的计算给出

$$\varphi_i^+ \circ (\varphi_i^-)^{-1} = \varphi_i^- \circ (\varphi_i^+)^{-1} = \text{Id}_{\mathbb{B}^n}.$$

因此, 坐标卡集合 $\{(U_i^\pm, \varphi_i^\pm)\}$ 是一个光滑图册, 从而定义了 S^n 上的一个光滑结构. 称这为它的**标准光滑结构**.

例 1.32 (水平集). 前一个例子可如下推广. 设 $U \subseteq \mathbb{R}^n$ 是一个开子集, 而 $\Phi: U \rightarrow \mathbb{R}$ 是一个光滑函数. 对任意 $c \in \mathbb{R}$, 集合 $\Phi^{-1}(c)$ 称为 Φ 的一个**水平集**. 取某个 $c \in \mathbb{R}$, 令 $M = \Phi^{-1}(c)$, 并假设在每个 $a \in \Phi^{-1}(c)$ 处**全导数** $D\Phi(a)$ 都非零. 因为 $D\Phi(a)$ 是一个行矩阵, 其元素为偏导数 $(\partial\Phi/\partial x^1(a), \dots, \partial\Phi/\partial x^n(a))$, 所以对每个 $a \in M$ 都存在某个 i 使得 $\partial\Phi/\partial x^i(a) \neq 0$. 由**隐函数定理** (定理 C.40, 其中 x^i 扮演 y 的角色) 可知, 存在 a 的某个邻域 U_0 , 使得 $M \cap U_0$ 可以表示为形如

$$x^i = f(x^1, \dots, \widehat{x^i}, \dots, x^n)$$

的方程的图像, 其中 f 是定义在 \mathbb{R}^{n-1} 的某个开子集上的光滑实值函数. 因此, 完全类似于 n 维球面的情形, 可知 M 是一个 $(n-1)$ 维的拓扑流形, 并且具有一个光滑结构, 使得如上选取的 f 所关联的每个图像坐标卡都是光滑坐标卡. 在第 5 章中, 将发展光滑子流形的理论, 它是这一构造的深远推广.

例 1.33 (射影空间). n 维实射影空间 $\mathbb{R}P^n$ 按例 1.5 是一个拓扑 n -流形. 下面验证该例中构造的坐标卡 (U_i, φ_i) 都是光滑相容的. 为方便起见设 $i > j$, 直接计算可得

$$\varphi_j \circ \varphi_i^{-1}(u^1, \dots, u^n) = \left(\frac{u^1}{u^j}, \dots, \frac{u^{j-1}}{u^j}, \frac{u^{j+1}}{u^j}, \dots, \frac{u^{i-1}}{u^j}, \frac{1}{u^j}, \frac{u^i}{u^j}, \dots, \frac{u^n}{u^j} \right),$$

这是一个从 $\varphi_i(U_i \cap U_j)$ 到 $\varphi_j(U_i \cap U_j)$ 的微分同胚.

例 1.34 (光滑乘积流形). 如果 M_1, \dots, M_k 分别是维数为 n_1, \dots, n_k 的光滑流形, 那么例 1.8 已证明乘积空间 $M_1 \times \dots \times M_k$ 是一个维数为 $n_1 + \dots + n_k$ 的拓扑流形, 其坐标卡形如 $(U_1 \times \dots \times U_k, \varphi_1 \times \dots \times \varphi_k)$. 任意两个这样的坐标卡都是光滑相容的, 因为容易验证

$$(\psi_1 \times \dots \times \psi_k) \circ (\varphi_1 \times \dots \times \varphi_k)^{-1} = (\psi_1 \circ \varphi_1^{-1}) \times \dots \times (\psi_k \circ \varphi_k^{-1}),$$

这是一个光滑映射. 这就定义了乘积上一个自然的光滑流形结构, 称为**乘积光滑流形结构**. 例如, 这就给出了 n 维环面 $\mathbb{T}^n = \mathbb{S}^1 \times \cdots \times \mathbb{S}^1$ 上的一个光滑流形结构.

在迄今所见到的每个例子中, 构造光滑流形结构都分两步进行: 先从一个拓扑空间出发, 验证它是一个拓扑流形, 然后再指定一个光滑结构. 通常把这两步合并为一个构造会更加方便, 特别是当从一个尚未赋予拓扑的集合出发时. 下面的引理提供了一个捷径——它表明, 只要给定一个集合以及其上适当“光滑”重叠的“坐标卡”, 就可利用这些坐标卡来同时定义该集合上的拓扑和光滑结构.

引理 1.35 (光滑流形坐标卡引理). 设 M 是一个集合, 并假设给定了一族 M 的子集 $\{U_\alpha\}$ 以及映射 $\varphi_\alpha: U_\alpha \rightarrow \mathbb{R}^n$, 使得下列性质得到满足:

- (i) 对每个 α , φ_α 是 U_α 与开子集 $\varphi_\alpha(U_\alpha) \subseteq \mathbb{R}^n$ 之间的双射;
- (ii) 对每对 α 和 β , 集合 $\varphi_\alpha(U_\alpha \cap U_\beta)$ 和 $\varphi_\beta(U_\alpha \cap U_\beta)$ 在 \mathbb{R}^n 中是开的;
- (iii) 只要 $U_\alpha \cap U_\beta \neq \emptyset$, 映射 $\varphi_\beta \circ \varphi_\alpha^{-1}: \varphi_\alpha(U_\alpha \cap U_\beta) \rightarrow \varphi_\beta(U_\alpha \cap U_\beta)$ 就是光滑的;
- (iv) 可数多个集合 U_α 覆盖 M ;
- (v) 只要 p, q 是 M 中不同的点, 那么要么存在某个 U_α 同时包含 p 和 q , 要么存在不相交的集合 U_α, U_β 使得 $p \in U_\alpha$ 且 $q \in U_\beta$.

那么 M 具有唯一的光滑流形结构, 使得每个 $(U_\alpha, \varphi_\alpha)$ 都是光滑坐标卡.

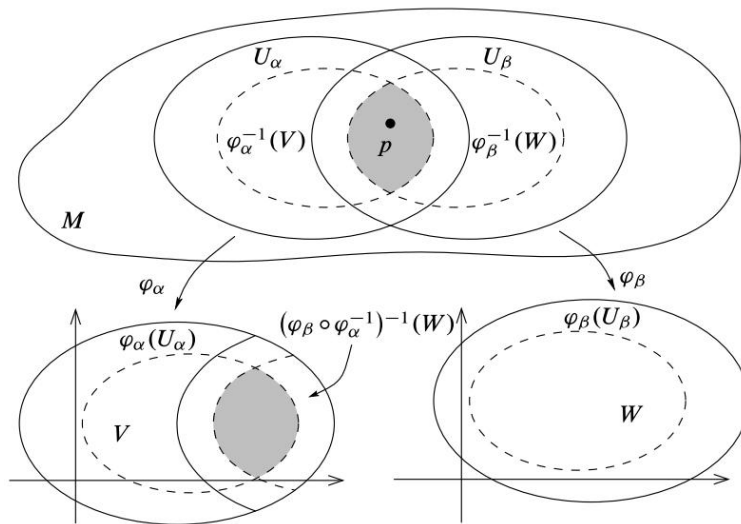


图 1.9: 光滑流形坐标卡引理

证明. 通过取所有形如 $\varphi_\alpha^{-1}(V)$ 的集合作为基来定义拓扑, 其中 V 是 \mathbb{R}^n 的开子集. 为证明这确实是一个拓扑的基, 只需说明: 对于落在两个基集 $\varphi_\alpha^{-1}(V)$ 和 $\varphi_\beta^{-1}(W)$ 交集中的任意一点 p , 存在第三个基集包含 p 并且包含在该交集中. 只需证明 $\varphi_\alpha^{-1}(V) \cap \varphi_\beta^{-1}(W)$ 本身是一个基集即可 (图 1.9).

为看出这一点, 注意 (iii) 蕴含 $(\varphi_\beta \circ \varphi_\alpha^{-1})^{-1}(W)$ 是 $\varphi_\alpha(U_\alpha \cap U_\beta)$ 中的开子集, 而 (ii) 蕴含这个集合在 \mathbb{R}^n 中也是开的. 由此可得

$$\varphi_\alpha^{-1}(V) \cap \varphi_\beta^{-1}(W) = \varphi_\alpha^{-1}\left(V \cap (\varphi_\beta \circ \varphi_\alpha^{-1})^{-1}(W)\right)$$

也是一个基集, 正如断言.

每个映射 φ_α 此时都是到其像上的同胚 (基本上按定义即是如此), 所以 M 是维数为 n 的局部 Euclid 空间. Hausdorff 性质容易由 (v) 推出, 而第二可数性则由 (iv) 和习题 A.22 的结果推出, 因为每个 U_α 都是第二可数的. 最后, (iii) 保证了集合 $\{(U_\alpha, \varphi_\alpha)\}$ 是一个光滑图册. 显然, 这个拓扑和光滑结构是满足引理结论的唯一结构. \square

例 1.36 (Grassmann 流形). 设 V 是一个 n 维实向量空间. 对任意整数 $0 \leq k \leq n$, 用 $G_k(V)$ 表示 V 中所有 k 维线性子空间的集合. 将证明 $G_k(V)$ 可以被自然地赋予一个维数为 $k(n-k)$ 的光滑流形结构. 带有这个结构后, 它称为 **Grassmann 流形**, 或简称 **Grassmann 流形**. 在特殊情形 $V = \mathbb{R}^n$ 下, **Grassmann 流形** $G_k(\mathbb{R}^n)$ 常常用更简单的记号来记, 例如 $G_{k,n}$ 或 $G(k, n)$. 注意 $G_1(\mathbb{R}^{n+1})$ 恰好就是 n 维实射影空间 $\mathbb{R}P^n$.

$G_k(V)$ 上光滑结构的构造比迄今为止做过的工作稍复杂一些, 但基本思想只是利用线性代数来构造 $G_k(V)$ 的坐标卡, 然后应用光滑流形坐标卡引理. 将在第 21 章中给出一个更短的证明, 说明 $G_k(V)$ 是一个光滑流形 (见例 21.21).

设 P 和 Q 是 V 的任意一对互补子空间, 维数分别为 k 和 $n-k$, 于是 V 分解为直和: $V = P \oplus Q$. 任意线性映射 $X: P \rightarrow Q$ 的图像都可以等同于一个 k 维子空间 $\Gamma(X) \subseteq V$, 定义为

$$\Gamma(X) = \{v + Xv : v \in P\}.$$

任何这样的子空间都具有与 Q 的交为零子空间的性质. 反之, 任何与 Q 平凡相交的子空间 $S \subseteq V$ 都是某个唯一线性映射 $X: P \rightarrow Q$ 的图像, 它可以按如下方式构造: 设 $\pi_P: V \rightarrow P$ 和 $\pi_Q: V \rightarrow Q$ 是由直和分解确定的投影; 那么由假设可知 $\pi_P|_S$ 是从 S 到 P 的同构. 因此, $X = (\pi_Q|_S) \circ (\pi_P|_S)^{-1}$ 是从 P 到 Q 的一个定义良好的线性映射, 而且直接验证可知 S 就是它的图像.

设 $L(P; Q)$ 表示从 P 到 Q 的线性映射的向量空间, 并设 U_Q 表示 $G_k(V)$ 中由那些与 Q 平凡相交的 k 维子空间组成的子集. 对应 $X \mapsto \Gamma(X)$ 定义了一个映射 $\Gamma: L(P; Q) \rightarrow U_Q$, 且上面的讨论表明 Γ 是一个双射. 令 $\varphi = \Gamma^{-1}: U_Q \rightarrow L(P; Q)$. 通过选取 P 和 Q 的基, 可将 $L(P; Q)$ 与 $\mathbf{M}((n-k) \times k, \mathbb{R})$ 进而与 $\mathbb{R}^{k(n-k)}$ 等同, 因此可把 (U_Q, φ) 看作一个坐标卡. 由于每个这样的坐标卡的像都是整个 $L(P; Q)$, 引理 1.35 的条件 (i) 显然满足.

现在设 (P', Q') 是另一对这样的子空间, 并设 $\pi_{P'}, \pi_{Q'}$ 为相应的投影, 而 $\varphi': U_{Q'} \rightarrow L(P'; Q')$ 是相应的映射. 集合 $\varphi(U_Q \cap U_{Q'}) \subseteq L(P; Q)$ 由所有图像与 Q' 平凡相交的线性映射 $X: P \rightarrow Q$ 组成. 为说明这个集合在 $L(P; Q)$ 中是开的, 对每个 $X \in L(P; Q)$, 设 $I_X: P \rightarrow V$ 为映射 $I_X(v) = v + Xv$,

它是从 P 到 X 的图像的双射. 因为 $\Gamma(X) = \text{Im } I_X$ 且 $Q' = \text{Ker } \pi_{P'}$, 由习题 B.22(d) 可知, X 的图像与 Q' 平凡相交当且仅当 $\pi_{P'} \circ I_X$ 具有满秩. 因为 $\pi_{P'} \circ I_X$ 的矩阵元 (关于任何基) 都连续依赖于 X , 例 1.28 的结果表明所有这样的 X 构成的集合在 $L(P; Q)$ 中是开的. 因此光滑流形坐标卡引理中的性质 (ii) 成立.

只需证明转移映射 $\varphi' \circ \varphi^{-1}$ 在 $\varphi(U_Q \cap U_{Q'})$ 上是光滑的. 设 $X \in \varphi(U_Q \cap U_{Q'}) \subseteq L(P; Q)$ 任意, 并设 S 表示子空间 $\Gamma(X) \subseteq V$. 若令 $X' = \varphi' \circ \varphi^{-1}(X)$, 那么如上所述,

$$X' = (\pi_{Q'}|_S) \circ (\pi_{P'}|_S)^{-1}$$

(见图 1.10). 为把这个映射与 X 联系起来, 注意 $I_X: P \rightarrow S$ 是一个同构, 因此可写出

$$X' = (\pi_{Q'}|_S) \circ I_X \circ (I_X)^{-1} \circ (\pi_{P'}|_S)^{-1} = (\pi_{Q'} \circ I_X) \circ (\pi_{P'} \circ I_X)^{-1}.$$

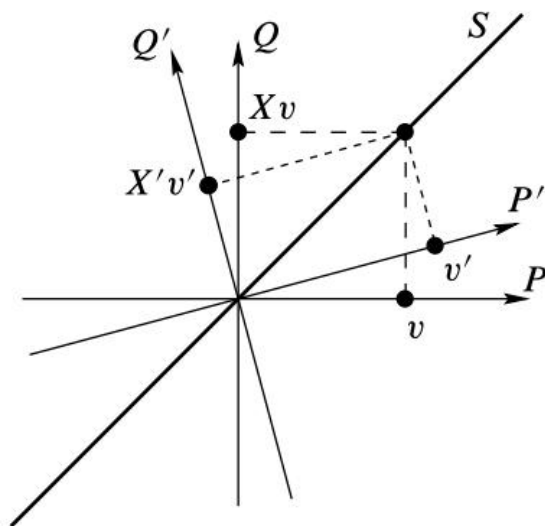


图 1.10: $G_k(V)$ 上坐标的光滑相容性

为证明它光滑依赖于 X , 定义线性映射 $A: P \rightarrow P'$, $B: P \rightarrow Q'$, $C: Q \rightarrow P'$ 和 $D: Q \rightarrow Q'$ 如下:

$$A = \pi_{P'}|_P, \quad B = \pi_{Q'}|_P, \quad C = \pi_{P'}|_Q, \quad D = \pi_{Q'}|_Q.$$

那么对 $v \in P$, 有

$$(\pi_{P'} \circ I_X)v = (A + CX)v, \quad (\pi_{Q'} \circ I_X)v = (B + DX)v,$$

由此可得 $X' = (B + DX)(A + CX)^{-1}$. 一旦为 P, Q, P' 和 Q' 选取了基, 所有这些线性映射都可用矩阵表示. 因为由 Cramer 法则, $(A + CX)^{-1}$ 的矩阵元是 $A + CX$ 的矩阵元的有理函数, 所以 X' 的矩阵元光滑依赖于 X 的矩阵元. 这就证明了 $\varphi' \circ \varphi^{-1}$ 是一个光滑映射, 因此构造的坐标卡满足引

理 1.35 的条件 (iii).

为验证条件 (iv), 只需注意 $G_k(V)$ 实际上可以被有限多个集合 U_Q 覆盖: 例如, 若 (E_1, \dots, E_n) 是 V 的一个固定基, 那么把基元素划分为分别包含 k 个和 $n - k$ 个元素的两个子集的任何一种分法都决定了适当的子空间 P 和 Q , 且任何子空间 S 都至少与这些分法之一所决定的 Q 平凡相交 (见习题 B.9). 因此, $G_k(V)$ 被一个固定基的所有可能分法所决定的有限多个坐标卡所覆盖.

最后, Hausdorff 条件 (v) 容易验证: 对任意两个 k 维子空间 $P, P' \subseteq V$, 总可找到一个维数为 $n - k$ 的子空间 Q , 使得 Q 与 P 和 P' 的交都是平凡的, 于是 P 和 P' 都包含在由比如说 (P, Q) 决定的坐标卡的定义域中.

第 4 节 带边流形

在流形的许多重要应用中, 尤其是那些涉及积分的应用, 常常遇到一些空间: 它们除具有某种“边界”外, 其余部分都是光滑流形. 这类空间的简单例子包括 \mathbb{R} 中的闭区间、 \mathbb{R}^n 中的闭球以及 S^n 中的闭半球. 为容纳这类空间, 需要扩展流形的定义.

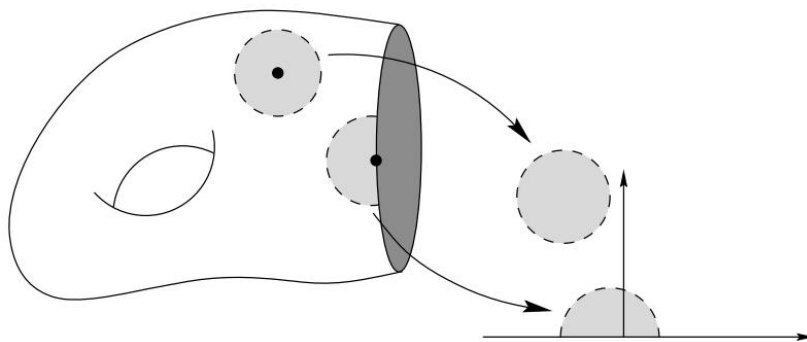


图 1.11: 一个带边流形

这些空间中的点具有分别以 \mathbb{R}^n 的开子集或闭的 n 维上半空间 $\mathbb{H}^n \subseteq \mathbb{R}^n$ 的开子集为模型的邻域. 后者定义为

$$\mathbb{H}^n = \{(x^1, \dots, x^n) \in \mathbb{R}^n : x^n \geq 0\}.$$

记 $\text{Int } \mathbb{H}^n$ 与 $\partial \mathbb{H}^n$ 分别为 \mathbb{H}^n 作为 \mathbb{R}^n 子集的内部和边界. 当 $n > 0$ 时, 这意味着

$$\text{Int } \mathbb{H}^n = \{(x^1, \dots, x^n) \in \mathbb{R}^n : x^n > 0\},$$

$$\partial \mathbb{H}^n = \{(x^1, \dots, x^n) \in \mathbb{R}^n : x^n = 0\}.$$

在 $n = 0$ 的情形, $\mathbb{H}^0 = \mathbb{R}^0 = \{0\}$, 因此 $\text{Int } \mathbb{H}^0 = \mathbb{R}^0$ 且 $\partial \mathbb{H}^0 = \emptyset$.

一个 n 维拓扑带边流形是指第二可数的 Hausdorff 空间 M , 其每一点均有一个邻域, 该邻域要么与 \mathbb{R}^n 的某个开子集同胚, 要么与 \mathbb{H}^n 的某个 (相对) 开子集同胚 (图 1.11). 开子集 $U \subseteq M$

连同映射 $\varphi: U \rightarrow \mathbb{R}^n$, 若其是到 \mathbb{R}^n 或 \mathbb{H}^n 的某个开子集上的同胚, 则称为 M 的一个**坐标卡**, 这与流形的情形相同. 需要区分时, 若 $\varphi(U)$ 是 \mathbb{R}^n 的开子集 (这也包括 \mathbb{H}^n 中不与 $\partial\mathbb{H}^n$ 相交的开子集的情形), 则称 (U, φ) 为**内部坐标卡**; 若 $\varphi(U)$ 是 \mathbb{H}^n 的开子集且满足 $\varphi(U) \cap \partial\mathbb{H}^n \neq \emptyset$, 则称它为**边界坐标卡**. 若一个边界坐标卡的像具有 $B_r(x) \cap \mathbb{H}^n$ 的形式, 其中 $x \in \partial\mathbb{H}^n$ 且 $r > 0$, 则称它为**坐标半球**.

若点 $p \in M$ 属于某个内部坐标卡的定义域, 则称 p 为 M 的**内点**. 若 p 属于某个边界坐标卡的定义域, 且该坐标卡将 p 映到 $\partial\mathbb{H}^n$, 则称 p 为 M 的**边界点**. M 的**边界** (所有边界点构成的集合) 记为 ∂M ; 类似地, M 的**内部** (所有内点构成的集合) 记为 $\text{Int } M$.

由定义可知, 每一点 $p \in M$ 要么是内点, 要么是边界点: 若 p 不是边界点, 则它要么属于某个内部坐标卡的定义域, 要么属于某个边界坐标卡 (U, φ) 的定义域且满足 $\varphi(p) \notin \partial\mathbb{H}^n$. 在后一种情形, φ 在 $U \cap \varphi^{-1}(\text{Int } \mathbb{H}^n)$ 上的限制便是一个定义域包含 p 的内部坐标卡. 然而, 一个给定点相对于某张坐标卡是内点, 而相对于另一张坐标卡又是边界点, 这并非显然. 事实上这种情况不可能发生, 但其证明需要目前尚未具备的更多工具. 为方便起见, 下面陈述该定理.

定理 1.37 (边界的拓扑不变性). 若 M 是一个拓扑带边流形, 则 M 的每一点要么是边界点, 要么是内点, 二者不可兼得. 因此 ∂M 与 $\text{Int } M$ 是不相交的集合, 且它们的并集为 M .

其证明见习题 17-9. 在本章稍后, 还将对光滑带边流形证明该结果的一个较弱版本 (定理 1.46), 这已足以应付大多数目的.

请注意, 这里的术语“边界”和“内部”是新定义, 需与它们指代拓扑空间子集时的含义相区分. 一个带边流形在这种新意义下可以具有非空边界, 无论它作为其他拓扑空间的子集时是否有边界. 若需强调这两种边界概念的区别, 可酌情使用**拓扑边界**和**流形边界**这两个术语. 例如, 闭单位球 $\bar{\mathbb{B}}^n$ 是一个带边流形 (见习题 1-11), 其流形边界为 \mathbb{S}^{n-1} . 它作为 \mathbb{R}^n 的子集, 其拓扑边界恰好也是该球面. 然而, 若将 $\bar{\mathbb{B}}^n$ 视为独立的拓扑空间, 则它作为自身的子集, 其拓扑边界为空集. 又若把它看作 \mathbb{R}^{n+1} 的子集 (以显然的方式将 \mathbb{R}^n 视为 \mathbb{R}^{n+1} 的子集), 则其拓扑边界是整个 $\bar{\mathbb{B}}^n$. 注意, \mathbb{H}^n 本身也是一个带边流形, 其流形边界与它作为 \mathbb{R}^n 的子集的拓扑边界相同. \mathbb{R} 中的每个区间都是一维带边流形, 其流形边界由它的端点组成 (若存在端点).

带边流形的命名法由来已久且已广为接受, 但必须谨慎使用. 尽管名字如此, 带边流形一般并不是流形, 因为边界点没有局部 Euclid 的邻域. (这是边界不变性定理的推论.) 此外, 一个带边流形的边界可能是空集——定义中并没有要求边界必须非空. 另一方面, 流形也可以视为带边流形, 其边界为空集. 因此, 每个流形都是带边流形, 但一个带边流形是流形当且仅当其边界为空集 (见下面的命题 1.38).

尽管“带边流形”这一术语也包含流形, 但若希望强调所讨论的是原始意义下的流形, 经常会使用诸如“无边流形”这样的冗余说法; 而若希望强调边界可能为空, 则会使用“带边或无边流形”来指代带边流形. (后一种说法经常出现在主要兴趣在于流形, 但所讨论的结果在更一般的带边流形情形中同样容易陈述和证明时.) 注意, 未经进一步限定的“流形”一词总是指无边流形. 在文献中, 也会遇到**闭流形**一词, 意指紧的无边流形; 以及**开流形**一词, 意指非紧的无边流形.

命题 1.38. 设 M 是一个拓扑 n 维带边流形.

- (a) $\text{Int } M$ 是 M 的开子集, 并且是一个无边的拓扑 n 维流形.
- (b) ∂M 是 M 的闭子集, 并且是一个无边的拓扑 $(n-1)$ 维流形.
- (c) M 是拓扑流形当且仅当 $\partial M = \emptyset$.
- (d) 若 $n = 0$, 则 $\partial M = \emptyset$ 且 M 是一个 0 维流形.

习题 1.39. 证明上述命题. 在证明中, 必要时可以使用边界的拓扑不变性定理. 哪些部分需要用到它?

本章前面证明的流形的拓扑性质可以自然地推广到带边流形, 其证明与流形情形基本相同. 为备查, 在此陈述如下.

命题 1.40. 设 M 是一个拓扑带边流形.

- (a) M 具有由预紧的坐标球和坐标半球构成的可数基.
- (b) M 是局部紧的.
- (c) M 是仿紧的.
- (d) M 是局部道路连通的.
- (e) M 有可数个连通分支, 每个连通分支都是 M 的开子集, 并且是连通的拓扑带边流形.
- (f) M 的基本群是可数的.

习题 1.41. 证明上述命题.

带边流形上的光滑结构

为说明如何在带边流形上定义光滑结构, 先回忆: 从任意子集 $A \subseteq \mathbb{R}^n$ 到 \mathbb{R}^k 的映射称为**光滑的**, 若它在 A 的每一点的某邻域中均可延拓为定义在 \mathbb{R}^n 的某个开子集上的光滑映射 (见附录 C, 第 645 页). 因此, 若 U 是 \mathbb{H}^n 的开子集, 则称映射 $F: U \rightarrow \mathbb{R}^k$ 光滑, 是指对每个 $x \in U$, 均存在 \mathbb{R}^n 中包含 x 的开子集 \tilde{U} 及光滑映射 $\tilde{F}: \tilde{U} \rightarrow \mathbb{R}^k$, 使得 \tilde{F} 在 $\tilde{U} \cap \mathbb{H}^n$ 上与 F 一致 (图 1.12). 若 F 是这样的映射, 则 F 在 $U \cap \text{Int } \mathbb{H}^n$ 上的限制按通常意义是光滑的. 由连续性可知, F 在 $U \cap \partial \mathbb{H}^n$ 上的所有偏导数皆由它们在 $\text{Int } \mathbb{H}^n$ 中的值决定, 因而特别地, 这些偏导数与延拓的选取无关. 一个事实 (既不证明也不使用) 是: $F: U \rightarrow \mathbb{R}^k$ 在这种意义下光滑, 当且仅当 F 连续、 $F|_{U \cap \text{Int } \mathbb{H}^n}$ 光滑, 并且 $F|_{U \cap \text{Int } \mathbb{H}^n}$ 的各阶偏导数均可连续延拓到整个 U 上. (一个方向是显然的; 另一个方向依赖于 Émile Borel 的一个引理, 该引理表明在下半空间中存在一个光滑函数, 其在 $U \cap \partial \mathbb{H}^n$ 上的各阶导数与 F 的相应导数一致. 参见例如 [Hör90, 定理 1.2.6].)

例如, 设 $\mathbb{B}^2 \subseteq \mathbb{R}^2$ 为开单位圆盘, 记 $U = \mathbb{B}^2 \cap \mathbb{H}^2$, 并定义 $f: U \rightarrow \mathbb{R}$ 为 $f(x, y) = \sqrt{1 - x^2 - y^2}$. 由于 f 可以光滑地延拓到整个 \mathbb{B}^2 上 (用同样的公式), 故 f 是 U 上的光滑函数. 另一方面, 虽然 $g(x, y) = \sqrt{y}$ 在 U 上连续且在 $U \cap \text{Int } \mathbb{H}^2$ 中光滑, 但当 $y \rightarrow 0$ 时 $\partial g / \partial y \rightarrow \infty$, 故它在 \mathbb{R}^2 中原点的任何邻域内都没有光滑延拓. 因此 g 在 U 上不是光滑的.

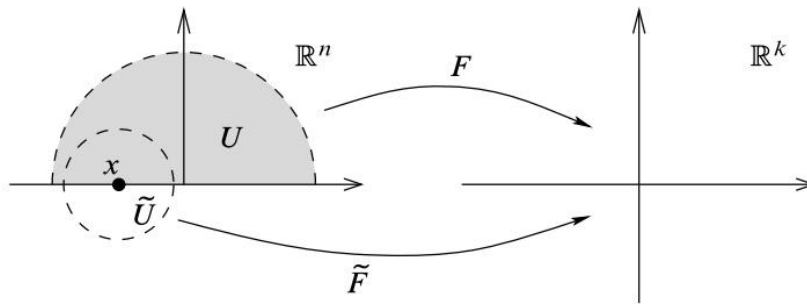


图 1.12: \mathbb{H}^n 的开子集上映射的光滑性

设 M 是一个拓扑带边流形. 与流形情形一样, M 上的**光滑结构**定义为极大光滑图册——即一族坐标卡, 其定义域覆盖 M , 并且转移映射 (以及它们的逆) 在刚才所述的意义上都是光滑的. 赋予这样的结构后, M 称为**光滑带边流形**. 每个光滑流形自动地是一个光滑带边流形 (其边界为空集).

与光滑流形情形一样, 若 M 是光滑带边流形, 则给定光滑图册中的任意坐标卡都称为 M 的**光滑坐标卡**. M 中的**光滑坐标球**、**光滑坐标半球**和**正则坐标球**均按显然的方式定义. 此外, 称子集 $B \subseteq M$ 为**正则坐标半球**, 若存在光滑坐标半球 $B' \supseteq \bar{B}$ 以及光滑坐标映射 $\varphi: B' \rightarrow \mathbb{H}^n$, 使得对某个 $r' > r > 0$ 有

$$\varphi(B) = B_r(0) \cap \mathbb{H}^n, \quad \varphi(\bar{B}) = \bar{B}_r(0) \cap \mathbb{H}^n, \quad \text{且} \quad \varphi(B') = B_{r'}(0) \cap \mathbb{H}^n.$$

习题 1.42. 证明每个光滑带边流形都具有由正则坐标球和正则坐标半球构成的可数基.

习题 1.43. 证明光滑流形坐标卡引理 (引理 1.35) 在将 “ \mathbb{R}^n ” 替换为 “ \mathbb{R}^n 或 \mathbb{H}^n ”、并将 “光滑流形” 替换为 “光滑带边流形” 后仍成立.

习题 1.44. 设 M 是一个光滑 n 维带边流形, U 是 M 的开子集. 证明下列命题:

- (a) U 是一个拓扑 n 维带边流形, 并且由 M 中所有满足 $V \subseteq U$ 的光滑坐标卡 (V, φ) 构成的图册定义了 U 上的一个光滑结构. 赋予该拓扑和光滑结构后, U 称为**带边开子流形**.
- (b) 若 $U \subseteq \text{Int } M$, 则 U 实际上是一个 (无边的) 光滑流形; 此时称它为 M 的**开子流形**.
- (c) $\text{Int } M$ 是 M 的一个开子流形 (无边).

关于光滑流形的一个重要结果不能直接推广到光滑带边流形, 那就是有限乘积上光滑结构的构造 (见例 1.8). 因为上半空间的乘积 $\mathbb{H}^n \times \mathbb{H}^m$ 本身并不是上半空间, 所以有限个光滑带边流形的乘积一般不能视为光滑带边流形. (相反, 它是光滑带角流形的一个例子, 将在第 16 章中研究.) 然而, 仍有如下结果.

命题 1.45. 设 M_1, \dots, M_k 是光滑流形, N 是光滑带边流形. 则 $M_1 \times \dots \times M_k \times N$ 是光滑带边流形, 并且

$$\partial(M_1 \times \dots \times M_k \times N) = M_1 \times \dots \times M_k \times \partial N.$$

证明. 见习题 1-12. □

对于光滑带边流形, 下面的结果常常可以作为边界不变性定理的一个充分替代.

定理 1.46 (边界的光滑不变性). 设 M 是光滑带边流形, $p \in M$. 若存在 M 的某个光滑坐标卡 (U, φ) 使得 $\varphi(U) \subseteq \mathbb{H}^n$ 且 $\varphi(p) \in \partial\mathbb{H}^n$, 则对每个定义域包含 p 的光滑坐标卡, 同样的结论都成立.

证明. 假设结论不成立, 即 p 既在某个光滑内部坐标卡 (U, ψ) 的定义域中, 又在某个光滑边界坐标卡 (V, φ) 的定义域中, 且 $\varphi(p) \in \partial\mathbb{H}^n$. 记转移映射 $\tau = \varphi \circ \psi^{-1}$; 它是从 $\psi(U \cap V)$ 到 $\varphi(U \cap V)$ 的同胚. 坐标卡的光滑相容性保证了 τ 和 τ^{-1} 均光滑, 即在必要的情况下, 它们在局部均可延拓为定义在 \mathbb{R}^n 的某个开子集上的光滑映射.

记 $x_0 = \psi(p)$, $y_0 = \varphi(p) = \tau(x_0)$. 存在 y_0 在 \mathbb{R}^n 中的邻域 W 及光滑函数 $\eta: W \rightarrow \mathbb{R}^n$, 使得 η 在 $W \cap \varphi(U \cap V)$ 上与 τ^{-1} 一致. 另一方面, 由于假设 ψ 是内部坐标卡, 故存在以 x_0 为中心且包含在 $\psi(U \cap V)$ 中的 Euclid 开球 B , 因此 τ 本身在 B 上按通常意义是光滑的. 必要时缩小 B , 可假设 $B \subseteq \tau^{-1}(W)$. 于是 $\eta \circ \tau|_B = \tau^{-1} \circ \tau|_B = \text{Id}_B$, 从而由链式法则可知, 对每个 $x \in B$, $D\eta(\tau(x)) \circ D\tau(x)$ 均为恒等映射. 由于 $D\tau(x)$ 是方阵, 这意味着它是非奇异的. 由推论 C.36 可知, τ (视为从 B 到 \mathbb{R}^n 的映射) 是开映射, 因此 $\tau(B)$ 是 \mathbb{R}^n 中包含 $y_0 = \varphi(p)$ 且含于 $\varphi(V)$ 中的开子集. 这与假设 $\varphi(V) \subseteq \mathbb{H}^n$ 且 $\varphi(p) \in \partial\mathbb{H}^n$ 矛盾. □

第 5 节 习题

习题 1-1. 设 X 为 \mathbb{R}^2 中所有满足 $y = \pm 1$ 的点 (x, y) 组成的集合, M 为 X 在等价关系 $(x, -1) \sim (x, 1)$ (对所有 $x \neq 0$) 下得到的商空间. 证明 M 是局部 Euclid 的且第二可数的, 但不是 Hausdorff 空间. (该空间称为双原点直线.)

习题 1-2. 证明不可数个 \mathbb{R} 的副本的不交并是局部 Euclid 的且为 Hausdorff 空间, 但不是第二可数的.

习题 1-3. 若一个拓扑空间可以表示为可数个紧子空间的并, 则称它为 σ 紧的. 证明一个局部 Euclid 的 Hausdorff 空间是拓扑流形当且仅当它是 σ 紧的.

习题 1-4. 设 M 是一个拓扑流形, \mathcal{U} 是 M 的一个开覆盖.

(a) 设 \mathcal{U} 中的每个集合只与有限多个其他集合相交, 证明 \mathcal{U} 是局部有限的.

(b) 给出一个例子说明 (a) 的逆命题不成立.

(c) 现假设 \mathcal{U} 中的每个集合在 M 中都是预紧的, 并证明逆命题: 若 \mathcal{U} 是局部有限的, 则 \mathcal{U} 中的每个集合只与有限多个其他集合相交.

习题 1-5. 设 M 是一个局部 Euclid 的 Hausdorff 空间. 证明 M 是第二可数的当且仅当它是仿紧的且具有可数个连通分支. [提示: 设 M 是仿紧的, 证明 M 的每个连通分支都有一个由预紧坐标域构成的局部有限覆盖, 并从中提取一个可数子覆盖.]

习题 1-6. 设 M 是一个维数 $n \geq 1$ 的非空拓扑流形. 若 M 有一个光滑结构, 证明它有不可数多个互不相同的光滑结构. [提示: 首先证明对任意 $s > 0$, $F_s(x) = |x|^{s-1}x$ 定义了一个从 \mathbb{B}^n 到自身的同胚, 且它是微分同胚当且仅当 $s = 1$.]

习题 1-7. 记 N 为北极 $(0, \dots, 0, 1) \in \mathbb{S}^n \subseteq \mathbb{R}^{n+1}$, S 为南极 $(0, \dots, 0, -1)$. 定义球极投影 $\sigma: \mathbb{S}^n \setminus \{N\} \rightarrow \mathbb{R}^n$ 为

$$\sigma(x^1, \dots, x^{n+1}) = \frac{(x^1, \dots, x^n)}{1 - x^{n+1}}.$$

设 $\tilde{\sigma}(x) = -\sigma(-x)$, $x \in \mathbb{S}^n \setminus \{S\}$.

(a) 对任意 $x \in \mathbb{S}^n \setminus \{N\}$, 证明 $\sigma(x) = u$, 其中 $(u, 0)$ 是过 N 和 x 的直线与超平面 $x^{n+1} = 0$ 的交点 (图 1.13). 类似地, 证明 $\tilde{\sigma}(x)$ 是过 S 和 x 的直线与同一超平面的交点. (因此 $\tilde{\sigma}$ 称为从南极的球极投影.)

(b) 证明 σ 是双射, 且

$$\sigma^{-1}(u^1, \dots, u^n) = \frac{(2u^1, \dots, 2u^n, |u|^2 - 1)}{|u|^2 + 1}.$$

(c) 计算转移映射 $\tilde{\sigma} \circ \sigma^{-1}$ 并验证由两张坐标卡 $(\mathbb{S}^n \setminus \{N\}, \sigma)$ 和 $(\mathbb{S}^n \setminus \{S\}, \tilde{\sigma})$ 构成的图册定义了 \mathbb{S}^n 上的一个光滑结构. (由 σ 或 $\tilde{\sigma}$ 定义的坐标称为**球极坐标**.)

(d) 证明这个光滑结构与例 1.31 中定义的光滑结构相同.

(用于第 201, 269, 301, 345, 347, 450 页.)

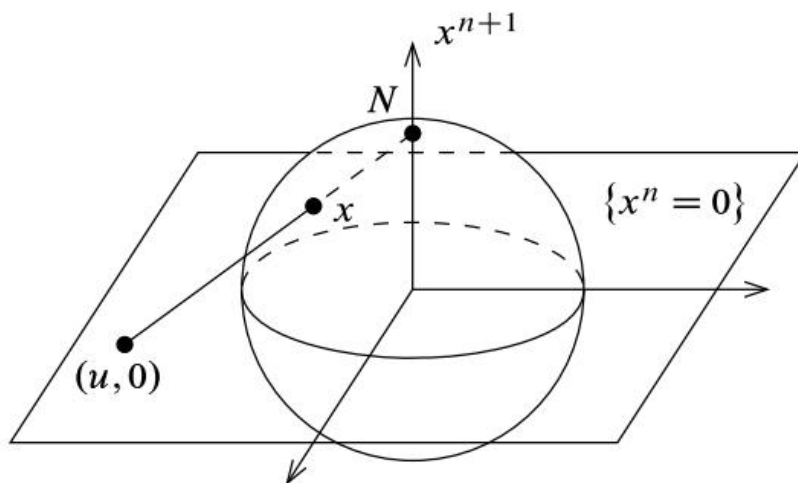


图 1.13: 球极投影

习题 1-8. 将 \mathbb{R}^2 与 \mathbb{C} 等同, 则单位圆周 \mathbb{S}^1 可视为复平面的一个子集. 子集 $U \subseteq \mathbb{S}^1$ 上的**辐角函数**是指连续函数 $\theta: U \rightarrow \mathbb{R}$, 使得对所有 $z \in U$ 都有 $e^{i\theta(z)} = z$. 证明 \mathbb{S}^1 的开子集 U 上存在辐角函数 θ 当且仅当 $U \neq \mathbb{S}^1$. 对任何这样的辐角函数, 证明 (U, θ) 是 \mathbb{S}^1 (带有其标准光滑结构) 的一张光滑坐标卡. (用于第 37, 152, 176 页.)

习题 1-9. 复射影 n -空间记为 $\mathbb{C}\mathbb{P}^n$, 它是 \mathbb{C}^{n+1} 中所有 1 维复线性子空间的集合, 配备由自然投影 $\pi: \mathbb{C}^{n+1} \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{C}\mathbb{P}^n$ 诱导的商拓扑. 证明 $\mathbb{C}\mathbb{P}^n$ 是一个紧的 $2n$ 维拓扑流形, 并说明如何赋予它一个类似于我们为 $\mathbb{R}\mathbb{P}^n$ 构造的光滑结构. (利用对应关系

$$(x^1 + iy^1, \dots, x^{n+1} + iy^{n+1}) \leftrightarrow (x^1, y^1, \dots, x^{n+1}, y^{n+1})$$

将 \mathbb{C}^{n+1} 与 \mathbb{R}^{2n+2} 等同.) (用于第 48, 96, 172, 560, 561 页.)

习题 1-10. 设 k 和 n 是满足 $0 < k < n$ 的整数, $P, Q \subseteq \mathbb{R}^n$ 分别是由 (e_1, \dots, e_k) 和 (e_{k+1}, \dots, e_n) 张成的线性子空间, 其中 e_i 是 \mathbb{R}^n 的第 i 个标准基向量. 对任意与 Q 只有平凡交的 k 维子空间 $S \subseteq \mathbb{R}^n$, 证明例 1.36 中构造的坐标表示 $\varphi(S)$ 是唯一的 $(n-k) \times k$ 矩阵 B , 使得 S 由矩阵 $\begin{pmatrix} I_k \\ B \end{pmatrix}$ 的列张成, 其中 I_k 表示 $k \times k$ 单位矩阵.

习题 1-11. 设 $M = \overline{\mathbb{B}^n}$, 即 \mathbb{R}^n 中的闭单位球. 证明 M 是一个带边流形, 其中 S^{n-1} 中的每一点都是边界点, \mathbb{B}^n 中的每一点都是内点. 说明如何赋予它一个光滑结构, 使得每个光滑内部坐标卡都是 \mathbb{B}^n 上标准光滑结构的光滑坐标卡. [提示: 考虑映射 $\pi \circ \sigma^{-1}: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$, 其中 $\sigma: S^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ 是球极投影 (习题 1-7), 而 π 是从 \mathbb{R}^{n+1} 到 \mathbb{R}^n 的省略某个非最后一个坐标的投影.]

习题 1-12. 证明命题 1.45 (光滑流形与带边流形的乘积仍是带边流形).

第二章

光滑映射

引入光滑结构的主要目的是在流形上定义光滑函数以及流形之间的光滑映射. 本章将围绕这一主题展开.

首先定义光滑实值函数和向量值函数, 再将其推广至流形之间的光滑映射. 接着讨论微分同胚这一特例, 即具有光滑逆的双射光滑映射. 若两个光滑流形之间存在微分同胚, 则称它们是微分同胚的. 光滑流形理论研究的主要对象是在微分同胚下不变的性质.

在本章末尾, 我们将介绍一种强有力的工具——单位分解, 它用于将局部定义的光滑对象融合在一起. 该工具在光滑流形理论中被广泛用于从局部对象构造整体光滑对象.

第 1 节 光滑函数与光滑映射

虽然术语“函数”和“映射”在技术上同义, 但在研究光滑流形时, 通常方便对它们稍作区分. 在本书中, 术语“函数”一般保留给上域为 \mathbb{R} 的映射 (称为**实值函数**) 或上域为 \mathbb{R}^k (其中 $k > 1$) 的映射 (称为**向量值函数**). “映射”或“映照”这两个词可以指任何类型的映射, 例如任意流形之间的映射.

流形上的光滑函数

设 M 是光滑 n -流形, k 是非负整数, $f: M \rightarrow \mathbb{R}^k$ 是任意函数. 称 f 是**光滑函数**, 如果对每一点 $p \in M$, 存在 M 的光滑坐标卡 (U, φ) , 其定义域包含 p , 且复合函数 $f \circ \varphi^{-1}$ 在开子集 $\hat{U} = \varphi(U) \subseteq \mathbb{R}^n$ 上是光滑的 (图 2.1). 若 M 是带边光滑流形, 定义完全相同, 只是 $\varphi(U)$ 现在是 \mathbb{R}^n 或 \mathbb{H}^n 的开子集, 而在后一种情况下, 将 $f \circ \varphi^{-1}$ 的光滑性理解为 $\varphi(U)$ 的每一点都有一个邻域 (在 \mathbb{R}^n 中), 在该邻域上 $f \circ \varphi^{-1}$ 可以延拓为通常意义下的光滑函数.



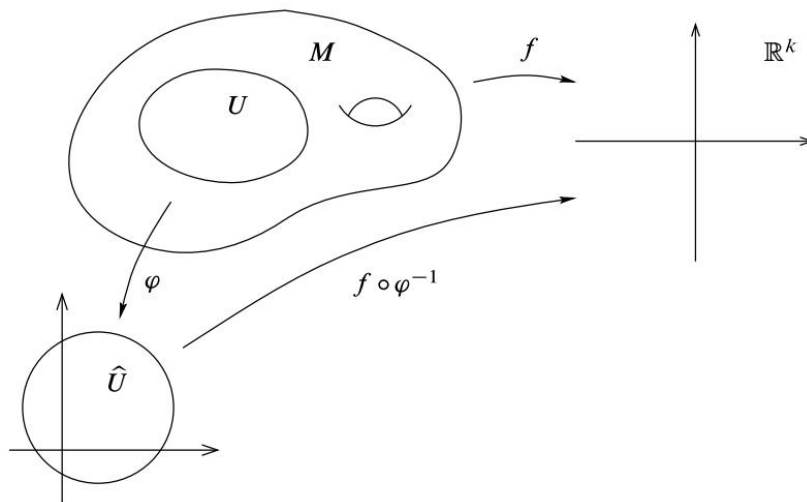


图 2.1: 光滑函数的定义

最重要的特例是光滑实值函数 $f: M \rightarrow \mathbb{R}$. 所有这样的函数的集合记为 $C^\infty(M)$. 因为光滑函数的和与常数倍仍然是光滑的, $C^\infty(M)$ 是 \mathbb{R} 上的向量空间.

习题 2.1. 设 M 是带边或不带边的光滑流形. 证明逐点乘法将 $C^\infty(M)$ 变为一个交换环和一个交换结合代数 (见附录 B, 第 624 页, 关于代数的定义).

习题 2.2. 设 U 是 \mathbb{R}^n 的开子流形, 具有标准光滑流形结构. 证明函数 $f: U \rightarrow \mathbb{R}^k$ 按上述定义是光滑的当且仅当它在通常微积分意义下是光滑的. 对 \mathbb{H}^n 中开子流形带边界的情况也做同样的证明 (见习题 1.44).

习题 2.3. 设 M 是带边或不带边的光滑流形, 且 $f: M \rightarrow \mathbb{R}^k$ 是光滑函数. 证明 $f \circ \varphi^{-1}: \varphi(U) \rightarrow \mathbb{R}^k$ 对 M 的每个光滑坐标卡 (U, φ) 都是光滑的.

给定函数 $f: M \rightarrow \mathbb{R}^k$ 和 M 的坐标卡 (U, φ) , 函数 $\hat{f}: \varphi(U) \rightarrow \mathbb{R}^k$ 由 $\hat{f}(x) = f \circ \varphi^{-1}(x)$ 定义, 称为 f 的坐标表示. 根据定义, f 是光滑的当且仅当其坐标表示在每一点周围的某个光滑坐标卡中是光滑的. 由前面的习题, 光滑函数在每个光滑坐标卡中都有光滑的坐标表示.

例如, 考虑平面上定义的实值函数 $f(x, y) = x^2 + y^2$. 在极坐标下, 比如集合 $U = \{(x, y) : x > 0\}$ 上, 它有坐标表示 $\hat{f}(r, \theta) = r^2$. 按照使用局部坐标的惯例

将流形的开子集与 Euclid 空间的开子集等同起来, 在不引起混淆的情况下, 通常甚至不区分 \hat{f} 和 f 本身, 而是说“ f 在 U 上是光滑的, 因为它的坐标表示 $f(r, \theta) = r^2$ 是光滑的.”

流形之间的光滑映射

光滑函数的定义可以很容易地推广到流形之间的映射. 设 M, N 是光滑流形, $F: M \rightarrow N$ 是任意映射. 称 F 是光滑映射, 如果对每一点 $p \in M$, 存在包含 p 的光滑坐标卡 (U, φ) 和包含 $F(p)$

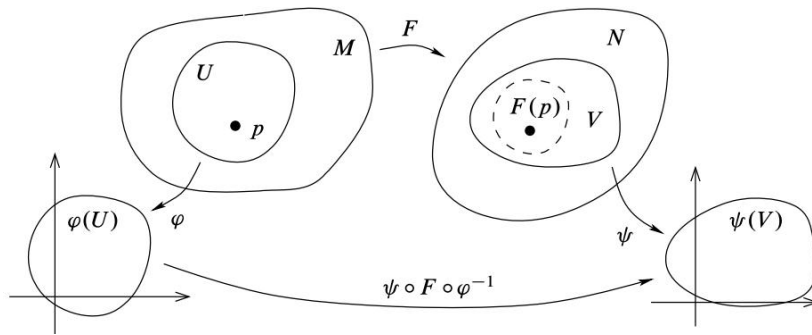


图 2.2: 光滑映射的定义

的光滑坐标卡 (V, ψ) , 使得 $F(U) \subseteq V$ 且复合映射 $\psi \circ F \circ \varphi^{-1}$ 从 $\varphi(U)$ 到 $\psi(V)$ 是光滑的 (图 2.2). 若 M 和 N 是带边光滑流形, F 的光滑性定义完全相同, 只是按通常的理解, 定义域为 \mathbb{R}^n 的子集的映射是光滑的, 如果它在每一点邻域内可以延拓为光滑映射; 而上域为 \mathbb{R}^n 的子集的映射是光滑的, 如果它作为到 \mathbb{R}^n 的映射是光滑的. 注意, 之前对实值或向量值函数光滑性的定义可以看作是这一定义的特例, 只需取 $N = V = \mathbb{R}^k$ 和 $\psi = \text{Id}: \mathbb{R}^k \rightarrow \mathbb{R}^k$.

关于光滑映射定义的第一个重要观察是: 正如预期的那样, 光滑性蕴含连续性.

命题 2.4. 每个光滑映射都是连续的.

证明. 设 M 和 N 是带边或不带边的光滑流形, $F: M \rightarrow N$ 是光滑的. 给定 $p \in M$, F 的光滑性意味着存在包含 p 的光滑坐标卡 (U, φ) 和包含 $F(p)$ 的光滑坐标卡 (V, ψ) , 使得 $F(U) \subseteq V$ 且 $\psi \circ F \circ \varphi^{-1}: \varphi(U) \rightarrow \psi(V)$ 是光滑的, 从而是连续的. 由于 $\varphi: U \rightarrow \varphi(U)$ 和 $\psi: V \rightarrow \psi(V)$ 都是同胚, 这进而意味着

$$F|_U = \psi^{-1} \circ (\psi \circ F \circ \varphi^{-1}) \circ \varphi: U \rightarrow V,$$

这是连续映射的复合. 由于 F 在每一点的邻域内都是连续的, 故它在 M 上是连续的. \square

要直接从定义证明映射 $F: M \rightarrow N$ 是光滑的, 需要证明对每一点 $p \in M$, 存在包含 p 的坐标域 U 和包含 $F(p)$ 的坐标域 V , 使得 $F(U) \subseteq V$. 这个要求被包含在定义中, 正是为了使光滑性自动蕴含连续性 (习题 2-1 说明了如果省略这个要求会出现的问题). 还有其他刻画流形之间光滑性的方法可以达到同样的效果. 下面给出其中的两种.

命题 2.5 (光滑性的等价刻画). 设 M 和 N 是带边或不带边的光滑流形, $F: M \rightarrow N$ 是映射. 则 F 是光滑的当且仅当满足以下条件之一:

- (a) 对每一点 $p \in M$, 存在包含 p 的光滑坐标卡 (U, φ) 和包含 $F(p)$ 的光滑坐标卡 (V, ψ) , 使得 $U \cap F^{-1}(V)$ 在 M 中是开的, 且复合映射 $\psi \circ F \circ \varphi^{-1}$ 从 $\varphi(U \cap F^{-1}(V))$ 到 $\psi(V)$ 是光滑的.
- (b) F 是连续的, 且存在 M 和 N 的光滑图册 $\{(U_\alpha, \varphi_\alpha)\}$ 和 $\{(V_\beta, \psi_\beta)\}$, 使得对每个 α 和 β , $\psi_\beta \circ F \circ \varphi_\alpha^{-1}$ 是从 $\varphi_\alpha(U_\alpha \cap F^{-1}(V_\beta))$ 到 $\psi_\beta(V_\beta)$ 的光滑映射.

命题 2.6 (光滑性是局部性质). 设 M 和 N 是带边或不带边的光滑流形, $F: M \rightarrow N$ 是映射.

- (a) 如果每一点 $p \in M$ 都有一个邻域 U , 使得限制 $F|_U$ 是光滑的, 那么 F 是光滑的.
 (b) 反之, 如果 F 是光滑的, 那么它在每个开子集上的限制都是光滑的.

习题 2.7. 证明上述两个命题.

下面的推论本质上只是前一个命题的重述, 但它给出了一种构造光滑映射的非常有用的方法.

推论 2.8 (光滑映射的粘合引理). 设 M 和 N 是带边或不带边的光滑流形, $\{U_\alpha\}_{\alpha \in A}$ 是 M 的开覆盖. 假设对每个 $\alpha \in A$, 给定光滑映射 $F_\alpha: U_\alpha \rightarrow N$, 使得映射在重叠处一致: $F_\alpha|_{U_\alpha \cap U_\beta} = F_\beta|_{U_\alpha \cap U_\beta}$ 对所有 α 和 β 成立. 则存在唯一的光滑映射 $F: M \rightarrow N$, 使得 $F|_{U_\alpha} = F_\alpha$ 对每个 $\alpha \in A$ 成立.

如果 $F: M \rightarrow N$ 是光滑映射, (U, φ) 和 (V, ψ) 分别是 M 和 N 的任意光滑坐标卡, 称 $\hat{F} = \psi \circ F \circ \varphi^{-1}$ 为 F 关于给定坐标的坐标表示. 它将集合 $\varphi(U \cap F^{-1}(V))$ 映到 $\psi(V)$.

习题 2.9. 设 $F: M \rightarrow N$ 是带边或不带边的光滑流形之间的光滑映射. 证明 F 关于 M 和 N 的每对光滑坐标卡的坐标表示都是光滑的.

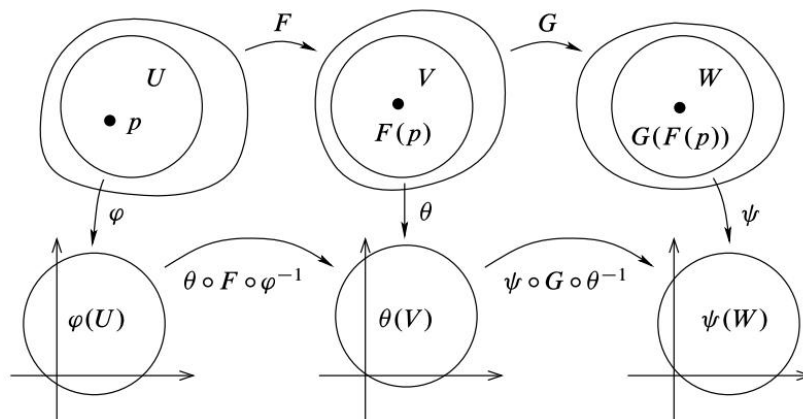


图 2.3: 光滑映射的复合是光滑的

与实值或向量值函数一样, 一旦在定义域和上域中选择了特定的局部坐标, 通常可以忽略 F 和 \hat{F} 之间的区别.

下面考察一些自动光滑的简单映射类.

命题 2.10. 设 M 、 N 和 P 是带边或不带边的光滑流形.

- (a) 每个常值映射 $c: M \rightarrow N$ 都是光滑的.
 (b) M 的恒等映射是光滑的.
 (c) 如果 $U \subseteq M$ 是带边或不带边的开子流形, 则包含映射 $U \hookrightarrow M$ 是光滑的.
 (d) 如果 $F: M \rightarrow N$ 和 $G: N \rightarrow P$ 是光滑的, 则 $G \circ F: M \rightarrow P$ 也是光滑的.

证明. 下面证明 (d), 其余留作习题. 设 $F: M \rightarrow N$ 和 $G: N \rightarrow P$ 是光滑映射, $p \in M$. 根据 G 的光滑性定义, 存在包含 $F(p)$ 的光滑坐标卡 (V, θ) 和包含 $G(F(p))$ 的光滑坐标卡 (W, ψ) , 使得 $G(V) \subseteq W$ 且 $\psi \circ G \circ \theta^{-1}: \theta(V) \rightarrow \psi(W)$ 是光滑的. 由于 F 是连续的, $F^{-1}(V)$ 是 p 在 M 中的邻域; 所以存在 M 的光滑坐标卡 (U, φ) , 使得 $p \in U \subseteq F^{-1}(V)$ (图 2.3). 由习题 2.9, $\theta \circ F \circ \varphi^{-1}$ 从 $\varphi(U)$ 到 $\theta(V)$ 是光滑的. 于是有 $G \circ F(U) \subseteq G(V) \subseteq W$, 且

$$\psi \circ (G \circ F) \circ \varphi^{-1} = (\psi \circ G \circ \theta^{-1}) \circ (\theta \circ F \circ \varphi^{-1}) : \varphi(U) \rightarrow \psi(W)$$

是光滑的, 因为它是 Euclid 空间子集之间光滑映射的复合. □

习题 2.11. 证明上述命题的 (a)–(c) 部分.

命题 2.12. 设 M_1, \dots, M_k 和 N 是带边或不带边的光滑流形, 其中 M_1, \dots, M_k 中至多一个有非空边界. 对每个 i , 令 $\pi_i: M_1 \times \dots \times M_k \rightarrow M_i$ 表示到 M_i 因子的投影. 映射 $F: N \rightarrow M_1 \times \dots \times M_k$ 是光滑的当且仅当每个分量映射 $F_i = \pi_i \circ F: N \rightarrow M_i$ 都是光滑的.

证明. 习题 2-2. □

虽然本书的大部分内容致力于研究光滑流形和光滑映射, 但偶尔也需要研究拓扑流形和连续映射. 为了一致性, 采用以下约定: 如果没有进一步说明, “函数”和“映射”这两个词应在纯集合论意义下理解, 不假设连续性或光滑性. 然而, 研究的大多数其他对象将默认被理解为携带某种最小拓扑结构. 除非另有说明, “流形”或“带边流形”总是指拓扑流形, “坐标卡”按拓扑意义理解, 即从流形的开子集到 \mathbb{R}^n 或 \mathbb{H}^n 的开子集的同胚. 若希望将注意力限制在光滑流形或光滑坐标卡上, 会明确说明. 类似地, 对许多其他特定类型的几何对象以及它们之间的映射的默认假设最多是连续性; 除非明确说明, 否则不假设光滑性. 唯一的例外是少数几个概念, 其定义本身就需要光滑性.

这个约定需要一定的自律, 因为必须记住在需要时陈述光滑性假设; 但它的好处是使本书 (在大多数情况下) 不必记住哪些类型的映射被假设为光滑, 哪些不是.

另一方面, 因为光滑映射的定义需要定义域和上域中的光滑结构, 所以如果“ $F: M \rightarrow N$ 是光滑映射”而没有指明 M 和 N 是什么, 应该总是理解为它们是带边或不带边的光滑流形.

现在有足够的信息来产生许多有趣的光滑映射例子. 尽管定义看起来复杂, 但证明特定映射是光滑的通常并不困难. 基本上只有三种常见的方法可以做到这一点:

- 在光滑局部坐标下写出映射, 并识别其分量函数是光滑初等函数的复合.
- 将映射展示为已知光滑映射的复合.
- 使用适用于特定情况的某些专用定理.

例 2.13 (光滑映射). (a) 从零维流形到带边或不带边的光滑流形的任何映射自动是光滑的, 因为每个坐标表示都是常值的.

- (b) 如果圆 S^1 具有标准光滑结构, 映射 $\varepsilon: \mathbb{R} \rightarrow S^1$ 由 $\varepsilon(t) = e^{2\pi it}$ 定义是光滑的, 因为关于 S^1 的任意辐角坐标 θ (见习题 1-8), 它有形如 $\widehat{\varepsilon}(t) = 2\pi t + c$ (c 为某常数) 的坐标表示, 这一点可以验证.
- (c) 映射 $\varepsilon^n: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{T}^n$ 由 $\varepsilon^n(x^1, \dots, x^n) = (e^{2\pi i x^1}, \dots, e^{2\pi i x^n})$ 定义是光滑的, 由命题 2.12.
- (d) 现在考虑具有标准光滑结构的 n 维球面 S^n . 包含映射 $\iota: S^n \hookrightarrow \mathbb{R}^{n+1}$ 显然是连续的, 因为它是拓扑子空间的包含映射. 它是光滑映射, 因为它关于例 1.31 的任意图坐标的坐标表示是

$$\begin{aligned}\widehat{\iota}(u^1, \dots, u^n) &= \iota \circ (\varphi_i^\pm)^{-1}(u^1, \dots, u^n) \\ &= \left(u^1, \dots, u^{i-1}, \pm\sqrt{1-|u|^2}, u^i, \dots, u^n\right),\end{aligned}$$

这在其定义域 (满足 $|u|^2 < 1$ 的集合) 上是光滑的.

- (e) 用于定义 $\mathbb{R}P^n$ 的商映射 $\pi: \mathbb{R}^{n+1} \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{R}P^n$ 是光滑的, 因为它关于例 1.33 中构造的 $\mathbb{R}P^n$ 的任意坐标和 $\mathbb{R}^{n+1} \setminus \{0\}$ 的标准坐标的坐标表示是

$$\begin{aligned}\widehat{\pi}(x^1, \dots, x^{n+1}) &= \varphi_i \circ \pi(x^1, \dots, x^{n+1}) = \varphi_i[x^1, \dots, x^{n+1}] \\ &= \left(\frac{x^1}{x^i}, \dots, \frac{x^{i-1}}{x^i}, \frac{x^{i+1}}{x^i}, \dots, \frac{x^{n+1}}{x^i}\right).\end{aligned}$$

- (f) 定义 $q: S^n \rightarrow \mathbb{R}P^n$ 为 $\pi: \mathbb{R}^{n+1} \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{R}P^n$ 到 $S^n \subseteq \mathbb{R}^{n+1} \setminus \{0\}$ 的限制. 它是光滑映射, 因为它是前两个例子中映射的复合 $q = \pi \circ \iota$.
- (g) 如果 M_1, \dots, M_k 是光滑流形, 则每个投影映射 $\pi_i: M_1 \times \dots \times M_k \rightarrow M_i$ 都是光滑的, 因为它关于例 1.8 的任意乘积坐标卡的坐标表示只是坐标投影.

微分同胚

若 M 和 N 是带边或不带边的光滑流形, 则从 M 到 N 的微分同胚是一个光滑双射 $F: M \rightarrow N$, 且其逆映射也是光滑的. 若两者之间存在微分同胚, 则称 M 和 N 是微分同胚的. 有时记作 $M \approx N$.

例 2.14 (微分同胚). (a) 考虑映射 $F: \mathbb{B}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ 和 $G: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{B}^n$, 定义为

$$F(x) = \frac{x}{\sqrt{1-|x|^2}}, \quad G(y) = \frac{y}{\sqrt{1+|y|^2}}. \quad (2.1)$$

这些映射是光滑的, 且容易验证它们互为逆映射. 因此它们都是微分同胚, 从而 \mathbb{B}^n 与 \mathbb{R}^n 微分同胚.

- (b) 若 M 是任意光滑流形, (U, φ) 是 M 上的一个光滑坐标卡, 则 $\varphi: U \rightarrow \varphi(U) \subseteq \mathbb{R}^n$ 是微分同胚. (事实上, 它的坐标表示是恒等映射.)

命题 2.15 (微分同胚的性质). (a) 微分同胚的复合仍是微分同胚.

- (b) 光滑流形之间微分同胚的有限乘积仍是微分同胚.
 (c) 每个微分同胚都是同胚和开映射.
 (d) 微分同胚限制在带边或不带边的开子流形上, 是到其像的微分同胚.
 (e) “微分同胚”是全体带边或不带边光滑流形类上的一个等价关系.

习题 2.16. 证明上述命题.

下面的定理是维数不变性的一个较弱形式, 但对许多目的而言已经足够.

定理 2.17 (维数的微分同胚不变性). 非空光滑 m 维流形不可能与 n 维光滑流形微分同胚, 除非 $m = n$.

证明. 假设 M 是非空光滑 m 维流形, N 是非空光滑 n 维流形, $F: M \rightarrow N$ 是微分同胚. 任取一点 $p \in M$, 设 (U, φ) 和 (V, ψ) 分别是包含 p 和 $F(p)$ 的光滑坐标卡. 则 $\widehat{F} = \psi \circ F \circ \varphi^{-1}$ (的限制) 是从 \mathbb{R}^m 的某个开子集到 \mathbb{R}^n 的某个开子集的微分同胚, 因此由命题 C.4 可知 $m = n$. \square

关于边界也有类似的不变性命题.

定理 2.18 (边界的微分同胚不变性). 假设 M 和 N 是光滑带边流形, $F: M \rightarrow N$ 是微分同胚. 则 $F(\partial M) = \partial N$, 且 F 限制为从 $\text{Int } M$ 到 $\text{Int } N$ 的微分同胚.

习题 2.19. 利用定理 1.46 证明上述定理.

正如两个拓扑空间若同胚则被视为“相同”一样, 两个带边或不带边的光滑流形若微分同胚, 则本质上是不可区分的. 光滑流形理论的核心是研究那些被微分同胚保持的光滑流形的性质. 定理 2.17 表明维数是这样一个性质.

人们自然会问, 给定拓扑流形上的光滑结构是否唯一. 这一问题的直接版本很容易回答: 例 1.21 表明每个零维流形都有唯一的光滑结构, 但如问题 1-6 所示, 每个正维流形一旦存在光滑结构, 就存在许多不同的光滑结构.

一个更微妙且有趣的问题是, 给定拓扑流形是否存在互不同胚的光滑结构. 例如, 设 $\widetilde{\mathbb{R}}$ 表示拓扑流形 \mathbb{R} , 但赋予例 1.23 中描述的光滑结构 (由整体坐标卡 $\psi(x) = x^3$ 定义). 事实证明 $\widetilde{\mathbb{R}}$ 与具有标准光滑结构的 \mathbb{R} 是微分同胚的. 定义映射 $F: \mathbb{R} \rightarrow \widetilde{\mathbb{R}}$ 为 $F(x) = x^{1/3}$. 该映射的坐标表示为 $\bar{F}(t) = \psi \circ F \circ \text{Id}_{\mathbb{R}}^{-1}(t) = t$, 显然是光滑的. 此外, 其逆映射的坐标表示为

$$\widehat{F}^{-1}(y) = \text{Id}_{\mathbb{R}} \circ F^{-1} \circ \psi^{-1}(y) = y,$$

这也是光滑的, 因此 F 是微分同胚. (这是一个重要情形, 其中必须区分映射与其坐标表示!)

事实上, 稍后可以看到, \mathbb{R} 上至多只有一个光滑结构在微分同胚意义下是唯一的 (见问题 15-13). 更精确地说, 若 \mathcal{A}_1 和 \mathcal{A}_2 是 \mathbb{R} 上的任意两个光滑结构, 则存在微分同胚 $F: (\mathbb{R}, \mathcal{A}_1) \rightarrow (\mathbb{R}, \mathcal{A}_2)$. 事实上, 根据 James Munkres [Mun60] 和 Edwin Moise [Moi77] 的工作, 维数小于等于 3 的每个拓

扑流形都有在微分同胚意义下唯一的光滑结构. 高维情形的类似问题则相当深刻, 且很大程度上仍未解决. 即使是欧氏空间, 光滑结构的唯一性问题直到二十世纪末才完全解决. 答案是令人惊讶的: 只要 $n \neq 4$, \mathbb{R}^n 就有唯一的光滑结构 (在微分同胚意义下); 但 \mathbb{R}^4 有不可数多个不同的光滑结构, 其中任意两个都不互相微分同胚! \mathbb{R}^4 上非标准光滑结构的存在性 (称为假 \mathbb{R}^4) 最早由 Simon Donaldson 和 Michael Freedman 于 1984 年证明, 作为他们对紧 4 维流形几何与拓扑研究的推论; 相关结果描述于 [DK90] 和 [FQ90] 中.

对于紧流形, 情形更加引人入胜. 1956 年, John Milnor [Mil56] 证明了 S^7 上存在与标准结构不同胚的光滑结构. 后来, 他与 Michel Kervaire [KM63] 证明了 (利用 Steve Smale [Sma62] 的一个深刻定理) 这样的结构恰有 15 个微分同胚类 (若限制于保持定向的微分同胚, 则有 28 个类, 定向将在第 15 章讨论).

另一方面, 在维数大于 3 的所有情形中, 存在根本没有光滑结构的紧拓扑流形. 识别拓扑 4 维流形上光滑结构 (如果存在) 的数目是当前研究的活跃课题.

第 2 节 单位分解

粘合引理 (引理 A.20) 是拓扑学中的常用工具. 它展示了如何通过“粘合”定义在开子集或闭子集上的映射来构造连续映射. 对于定义在开子集上的光滑映射, 我们有一个版本的粘合引理 (推论 2.8), 但不能期望将定义在闭子集上的光滑映射粘合后仍得到光滑结果. 例如, 如下定义的两个函数 $f_+ : [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ 和 $f_- : (-\infty, 0] \rightarrow \mathbb{R}$:

$$\begin{aligned} f_+(x) &= +x, & x \in [0, \infty), \\ f_-(x) &= -x, & x \in (-\infty, 0], \end{aligned}$$

都是光滑的, 并且在它们重叠的点 0 处取值相同, 但它们定义连续函数 $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, 即 $f(x) = |x|$, 在原点处不是光滑的.

推论 2.8 存在一个局限: 使用该推论时, 必须在流形相对较大的子集上构造完全一致的映射, 这对某些目的而言限制过强. 本节引入**单位分解**, 它们是用于将局部光滑对象“混合”成全局对象而不必假设它们在重叠处一致的工具. 它们在光滑流形理论中不可或缺, 并将贯穿全书.

本节的所有构造都依赖于一种特殊的光滑函数: 在流形的指定区域为正, 在其他区域恒为零. 我们首先定义实直线上的一个光滑函数, 它在 $t \leq 0$ 时为零, 在 $t > 0$ 时为正.

引理 2.20. 函数 $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ 定义为

$$f(t) = \begin{cases} e^{-1/t}, & t > 0, \\ 0, & t \leq 0, \end{cases}$$

是光滑函数.

证明. 该函数的图像见图 2.4. 通过复合, 它在 $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ 上光滑, 因此只需证明 f 在原点处具有任意阶的连续导数. 由于 $(k+1)$ 阶导数的存在意味着 k 阶导数的连续性, 故只需证明每一阶导数都存在. 首先注意到 f 在 0 处连续, 因为 $\lim_{t \searrow 0} e^{-1/t} = 0$. 事实上, 通过标准的 l'Hôpital 法则和归纳法可以证明, 对任意整数 $k \geq 0$,

$$\lim_{t \searrow 0} \frac{e^{-1/t}}{t^k} = \lim_{t \searrow 0} \frac{t^{-k}}{e^{1/t}} = 0. \quad (2.2)$$

下面用归纳法证明, 对 $t > 0$, f 的 k 阶导数具有形式

$$f^{(k)}(t) = p_k(t) \frac{e^{-1/t}}{t^{2k}} \quad (2.3)$$

其中 p_k 是次数不超过 k 的多项式. 当 $k=0$ 时 (取 $p_0(t) = 1$), 这显然成立. 假设它对某个 $k \geq 0$ 成立, 根据乘积法则,

$$\begin{aligned} f^{(k+1)}(t) &= p'_k(t) \frac{e^{-1/t}}{t^{2k}} + p_k(t) \frac{t^{-2} e^{-1/t}}{t^{2k}} - 2k p_k(t) \frac{e^{-1/t}}{t^{2k+1}} \\ &= (t^2 p'_k(t) + p_k(t) - 2kt p_k(t)) \frac{e^{-1/t}}{t^{2(k+1)}}, \end{aligned}$$

它具有所需的形式.

最后, 用归纳法证明对每个整数 $k \geq 0$ 都有 $f^{(k)}(0) = 0$. 当 $k=0$ 时, 这由定义成立. 假设它对某个 $k \geq 0$ 成立, 为证明 $f^{(k+1)}(0)$ 存在, 只需证明 $f^{(k)}$ 在 $t=0$ 处两侧的单侧导数都存在且相等. 显然, 左侧导数为零.

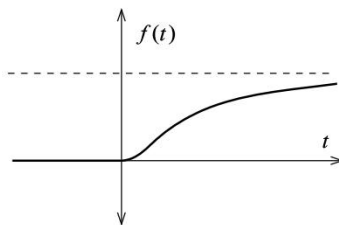


图 2.4: $f(t) = e^{-1/t}$

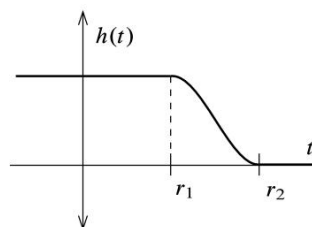


图 2.5: 截断函数

再次使用 (2.3) 和 (2.2), 发现 $f^{(k)}$ 在 $t=0$ 处的右侧导数等于

$$\lim_{t \searrow 0} \frac{p_k(t) \frac{e^{-1/t}}{t^{2k}} - 0}{t} = \lim_{t \searrow 0} p_k(t) \frac{e^{-1/t}}{t^{2k+1}} = p_k(0) \lim_{t \searrow 0} \frac{e^{-1/t}}{t^{2k+1}} = 0.$$

因此 $f^{(k+1)}(0) = 0$. □

引理 2.21. 给定任意实数 r_1 和 r_2 满足 $r_1 < r_2$, 存在光滑函数 $h: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ 使得 $h(t) \equiv 1$ 对 $t \leq r_1$, $0 < h(t) < 1$ 对 $r_1 < t < r_2$, 且 $h(t) \equiv 0$ 对 $t \geq r_2$.

证明. 设 f 是上一个引理中的函数, 并令

$$h(t) = \frac{f(r_2 - t)}{f(r_2 - t) + f(t - r_1)}.$$

(见图 2.5.) 注意分母对所有 t 都为正, 因为表达式 $r_2 - t$ 和 $t - r_1$ 中至少有一个总是正的. h 的所需性质很容易从 f 的性质得出. □

具有前述引理中 h 的性质的函数通常称为**截断函数**.

引理 2.22. 给定任意正实数 $r_1 < r_2$, 存在光滑函数 $H: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ 使得在 $\overline{B_{r_1}}(0)$ 上 $H \equiv 1$, 对所有 $x \in B_{r_2}(0) \setminus \overline{B_{r_1}}(0)$ 有 $0 < H(x) < 1$, 且在 $\mathbb{R}^n \setminus B_{r_2}(0)$ 上 $H \equiv 0$.

证明. 只需令 $H(x) = h(|x|)$, 其中 h 是前一个引理中的函数. 显然, H 在 $\mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ 上光滑, 因为它是那里光滑函数的复合. 由于它在 $B_{r_1}(0)$ 上恒等于 1, 故在那里也是光滑的. □

该引理构造的函数 H 是一个**隆起函数**的例子, 即一个光滑实值函数, 它在指定集合上等于 1, 而在该集合的指定邻域外为零. 本章后面将把此概念推广到流形上.

若 f 是拓扑空间 M 上的任意实值或向量值函数, f 的**支集**, 记为 $\text{supp } f$, 是 f 非零点集合的闭包:

$$\text{supp } f = \overline{\{p \in M : f(p) \neq 0\}}.$$

(例如, 若 H 是前一个引理中构造的函数, 则 $\text{supp } H = \overline{B_{r_2}}(0)$.) 若 $\text{supp } f$ 包含在某个集合 $U \subseteq M$ 中, 则称 f 支于 U 中. 若 $\text{supp } f$ 是紧集, 则称函数 f 是**紧支的**. 显然, 紧空间上的每个函数都是紧支的.

下一个构造是仿紧性最重要的应用. 设 M 是拓扑空间, 令 $\mathcal{X} = (X_\alpha)_{\alpha \in A}$ 是 M 的任意开覆盖, 由集合 A 索引. **从属于 \mathcal{X} 的单位分解**是一个由连续函数 $\psi_\alpha: M \rightarrow \mathbb{R}$ 组成的索引族 $(\psi_\alpha)_{\alpha \in A}$, 具有以下性质:

- (i) 对所有 $\alpha \in A$ 和所有 $x \in M$ 有 $0 \leq \psi_\alpha(x) \leq 1$.
- (ii) 对每个 $\alpha \in A$ 有 $\text{supp } \psi_\alpha \subseteq X_\alpha$.
- (iii) 支集族 $(\text{supp } \psi_\alpha)_{\alpha \in A}$ 是局部有限的, 这意味着每个点都有一个邻域, 该邻域只与有限多个 $\text{supp } \psi_\alpha$ 相交.

(iv) 对所有 $x \in M$ 有 $\sum_{\alpha \in A} \psi_\alpha(x) = 1$.

由于局部有限性条件 (iii), (iv) 中的和在每点的邻域内实际上只有有限多个非零项, 因此不存在收敛性问题. 若 M 是带边或不带边的光滑流形, **光滑单位分解**是指每个函数 ψ_α 都是光滑函数的单位分解.

定理 2.23 (单位分解的存在性). 设 M 是带边或不带边的光滑流形, 且 $\mathcal{X} = (X_\alpha)_{\alpha \in A}$ 是 M 的任意索引开覆盖. 则存在从属于 \mathcal{X} 的光滑单位分解.

证明. 为简单起见, 在此证明中假设 M 是不带边的光滑流形; 一般情况留作习题. 每个集合 X_α 本身是一个光滑流形, 因此根据命题 1.19 有正则坐标球构成的基 \mathcal{B}_α , 并且容易验证 $\mathcal{B} = \bigcup_\alpha \mathcal{B}_\alpha$ 是 M 的拓扑基. 由定理 1.15 可知, \mathcal{X} 有一个由 \mathcal{B} 的元素组成的可数、局部有限加细 $\{B_i\}$. 由引理 1.13(a), 覆盖 $\{\bar{B}_i\}$ 也是局部有限的.

对每个 i , B_i 在某个 X_α 中是正则坐标球这一事实保证了存在坐标球 $B'_i \subseteq X_\alpha$ 使得 $B'_i \supseteq \bar{B}_i$, 以及光滑坐标映射 $\varphi_i: B'_i \rightarrow \mathbb{R}^n$ 使得 $\varphi_i(\bar{B}_i) = \bar{B}_{r_i}(0)$ 且 $\varphi_i(B'_i) = B_{r'_i}(0)$ 对某个 $r_i < r'_i$ 成立. 对每个 i , 定义函数 $f_i: M \rightarrow \mathbb{R}$ 为

$$f_i = \begin{cases} H_i \circ \varphi_i & \text{在 } B'_i \text{ 上,} \\ 0 & \text{在 } M \setminus \bar{B}_i \text{ 上,} \end{cases}$$

其中 $H_i: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ 是如引理 2.22 中的光滑函数, 它在 $B_{r_i}(0)$ 内为正, 在其他地方为零. 在两个定义重叠的集合 $B'_i \setminus \bar{B}_i$ 上, 两个定义都给出零函数, 因此 f_i 是良定义的且光滑的, 并且 $\text{supp } f_i = \bar{B}_i$.

定义 $f: M \rightarrow \mathbb{R}$ 为 $f(x) = \sum_i f_i(x)$. 由于覆盖 $\{\bar{B}_i\}$ 的局部有限性, 这个和在每点的邻域内只有有限多个非零项, 因此定义了一个光滑函数. 因为每个 f_i 处处非负且在 B_i 上为正, 而 M 的每点都在某个 B_i 中, 故 $f(x) > 0$ 在 M 上处处成立. 因此, 由 $g_i(x) = f_i(x)/f(x)$ 定义的函数 $g_i: M \rightarrow \mathbb{R}$ 也是光滑的. 由定义立即得到 $0 \leq g_i \leq 1$ 且 $\sum_i g_i \equiv 1$.

最后, 需要将函数重新索引, 使它们由与开覆盖相同的集合 A 索引. 因为覆盖 $\{B'_i\}$ 是 \mathcal{X} 的加细, 对每个 i 可选择某个索引 $a(i) \in A$ 使得 $B'_i \subseteq X_{a(i)}$. 对每个 $\alpha \in A$, 定义 $\psi_\alpha: M \rightarrow \mathbb{R}$ 为

$$\psi_\alpha = \sum_{i: a(i)=\alpha} g_i.$$

若没有满足 $a(i) = \alpha$ 的指标 i , 则这个和应解释为零函数. 由引理 1.13(b) 可得

$$\text{supp } \psi_\alpha = \overline{\bigcup_{i: a(i)=\alpha} B_i} = \bigcup_{i: a(i)=\alpha} \bar{B}_i \subseteq X_\alpha.$$

每个 ψ_α 是满足 $0 \leq \psi_\alpha \leq 1$ 的光滑函数. 此外, 支集族 $(\text{supp } \psi_\alpha)_{\alpha \in A}$ 仍然是局部有限的, 且 $\sum_\alpha \psi_\alpha \equiv \sum_i g_i \equiv 1$, 故这就是所需的单位分解. \square

习题 2.24. 说明当 M 具有非空边界时, 前述证明需要如何修改.

基本上有两种不同的策略用于将局部定义的光滑映射拼接成全局映射. 若能以某种方式在每点的邻域内定义映射, 使得局部定义的映射在重叠处都一致, 则根据推论 2.8, 局部定义可拼接成全局光滑映射. (这通常需要某种唯一性结果.) 但若局部定义不能保证一致, 则通常不得不求助于单位分解. 此时的技巧是证明拼接后的对象仍然具有所需的性质. 全书将反复使用这两种策略.

单位分解的应用

作为单位分解的第一个应用, 我们将隆起函数的概念推广到流形的任意闭子集上. 设 M 是拓扑空间, $A \subseteq M$ 是闭子集, $U \subseteq M$ 是包含 A 的开子集, 连续函数 $\psi: M \rightarrow \mathbb{R}$ 称为**支于 U 中的 A 的隆起函数**, 若在 M 上 $0 \leq \psi \leq 1$, 在 A 上 $\psi \equiv 1$, 且 $\text{supp } \psi \subseteq U$.

命题 2.25 (光滑隆起函数的存在性). 设 M 是带边或不带边的光滑流形. 对任意闭子集 $A \subseteq M$ 和任意包含 A 的开子集 U , 存在支于 U 中的 A 的光滑隆起函数.

证明. 令 $U_0 = U$ 且 $U_1 = M \setminus A$, 令 $\{\psi_0, \psi_1\}$ 是从属于开覆盖 $\{U_0, U_1\}$ 的光滑单位分解. 因为在 A 上 $\psi_1 \equiv 0$, 故在那里 $\psi_0 = \sum_i \psi_i = 1$, 因此函数 ψ_0 具有所需的性质. \square

第二个应用是关于从闭子集延拓光滑函数可能性的重要结果. 设 M 和 N 是带边或不带边的光滑流形, 且 $A \subseteq M$ 是任意子集. 若对每个 $p \in A$ 都存在包含 p 的开子集 $W \subseteq M$ 和光滑映射 $\tilde{F}: W \rightarrow N$, 其在 $W \cap A$ 上的限制与 F 一致, 则称映射 $F: A \rightarrow N$ 在 A 上是光滑的.

引理 2.26 (光滑函数的延拓引理). 设 M 是带边或不带边的光滑流形, $A \subseteq M$ 是闭子集, 且 $f: A \rightarrow \mathbb{R}^k$ 是光滑函数. 对任意包含 A 的开子集 U , 存在光滑函数 $\tilde{f}: M \rightarrow \mathbb{R}^k$ 使得 $\tilde{f}|_A = f$ 且 $\text{supp } \tilde{f} \subseteq U$.

证明. 对每个 $p \in A$, 选择 p 的邻域 W_p 和与 f 在 $W_p \cap A$ 上一致的光滑函数 $\tilde{f}_p: W_p \rightarrow \mathbb{R}^k$. 用 $W_p \cap U$ 代替 W_p , 可假设 $W_p \subseteq U$. 集合族 $\{W_p: p \in A\} \cup \{M \setminus A\}$ 是 M 的开覆盖. 令 $\{\psi_p: p \in A\} \cup \{\psi_0\}$ 是从属于这个覆盖的光滑单位分解, 满足 $\text{supp } \psi_p \subseteq W_p$ 且 $\text{supp } \psi_0 \subseteq M \setminus A$.

对每个 $p \in A$, 乘积 $\psi_p \tilde{f}_p$ 在 W_p 上光滑, 并且若将其在 $M \setminus \text{supp } \psi_p$ 上解释为零, 则它可光滑地延拓到整个 M . (延拓后的函数是光滑的, 因为两个定义在它们重叠的开子集 $W_p \setminus \text{supp } \psi_p$ 上一致.) 因此定义 $\tilde{f}: M \rightarrow \mathbb{R}^k$ 为

$$\tilde{f}(x) = \sum_{p \in A} \psi_p(x) \tilde{f}_p(x).$$

由于支集族 $\{\text{supp } \psi_p\}$ 是局部有限的, 这个和实际上在 M 的每点的邻域内只有有限多个非零项, 因此定义了一个光滑函数. 若 $x \in A$, 则 $\psi_0(x) = 0$ 且对每个满足 $\psi_p(x) \neq 0$ 的 p 有 $\tilde{f}_p(x) = f(x)$, 故

$$\tilde{f}(x) = \sum_{p \in A} \psi_p(x) f(x) = \left(\psi_0(x) + \sum_{p \in A} \psi_p(x) \right) f(x) = f(x),$$

因此 \tilde{f} 确实是 f 的延拓. 由引理 1.13(b) 可得

$$\text{supp } \tilde{f} = \overline{\bigcup_{p \in A} \text{supp } \psi_p} = \bigcup_{p \in A} \text{supp } \psi_p \subseteq U.$$

□

习题 2.27. 举一个反例说明若 A 不是闭集, 则延拓引理的结论可能不成立.

延拓引理中假设 f 的上域是 \mathbb{R}^k 而不是其他光滑流形是有原因的: 对于其他上域, 延拓可能因拓扑原因而不存在. (例如, 恒等映射 $\mathbb{S}^1 \rightarrow \mathbb{S}^1$ 是光滑的, 但它甚至没有到从 \mathbb{R}^2 到 \mathbb{S}^1 的映射的连续延拓.) 稍后我们将证明, 从光滑流形的闭子集到光滑流形的光滑映射具有光滑延拓当且仅当它具有连续延拓 (见推论 6.27).

顺便说一下, 这个延拓引理说明了光滑流形和实解析流形之间的一个本质区别. 实解析流形上实解析函数的延拓引理的类似结论是绝对错误的, 因为在连通区域上定义的实解析函数若在开子集上为零则必须恒等于零.

接下来, 用单位分解来构造一种特殊的光滑函数. 设 M 是拓扑空间, M 的**穷竭函数**是连续函数 $f: M \rightarrow \mathbb{R}$, 具有性质: 对每个 $c \in \mathbb{R}$, 集合 $f^{-1}((-\infty, c])$ (称为 f 的**水平集**) 是紧集. 这个名称来源于当 n 取遍正整数时, 水平集 $f^{-1}((-\infty, n])$ 构成 M 的紧集穷竭; 因此穷竭函数提供了一种紧集穷竭的连续版本. 例如, 由 $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ 和 $g: \mathbb{B}^n \rightarrow \mathbb{R}$ 给出的函数

$$f(x) = |x|^2, \quad g(x) = \frac{1}{1 - |x|^2}$$

是光滑穷竭函数. 当然, 若 M 是紧的, M 上的任何连续实值函数都是穷竭函数, 因此这种函数只对非紧流形有意义.

命题 2.28 (光滑穷竭函数的存在性). 每个带边或不带边的光滑流形都存在光滑正穷竭函数.

证明. 设 M 是带边或不带边的光滑流形, 令 $\{V_j\}_{j=1}^{\infty}$ 是 M 的任意由预紧开子集构成的可数开覆盖, 令 $\{\psi_j\}$ 是从属于这个覆盖的光滑单位分解. 定义 $f \in C^\infty(M)$ 为

$$f(p) = \sum_{j=1}^{\infty} j \psi_j(p).$$

则 f 是光滑的, 因为在每点的邻域内只有有限多个项非零, 且它是正的, 因为 $f(p) \geq \sum_j \psi_j(p) = 1$.

为证明 f 是穷竭函数, 令 $c \in \mathbb{R}$ 是任意的, 选择正整数 $N > c$. 若 $p \notin \bigcup_{j=1}^N \bar{V}_j$, 则对 $1 \leq j \leq N$ 有 $\psi_j(p) = 0$, 故

$$f(p) = \sum_{j=N+1}^{\infty} j\psi_j(p) \geq \sum_{j=N+1}^{\infty} N\psi_j(p) = N \sum_{j=1}^{\infty} \psi_j(p) = N > c.$$

等价地, 若 $f(p) \leq c$, 则 $p \in \bigcup_{j=1}^N \bar{V}_j$. 因此 $f^{-1}((-\infty, c])$ 是紧集 $\bigcup_{j=1}^N \bar{V}_j$ 的闭子集, 因此是紧的. \square

作为单位分解的最后一个应用, 我们将证明一个引人注目的事实: 流形的每个闭子集都可以表示为某个光滑实值函数的水平集. 本书中不会使用这个结果 (除了在一些习题中), 但它与例 1.32 的结果形成了有趣的对比.

定理 2.29 (光滑函数的水平集). 设 M 是光滑流形. 若 K 是 M 的任意闭子集, 则存在光滑非负函数 $f: M \rightarrow \mathbb{R}$ 使得 $f^{-1}(0) = K$.

证明. 先从 $M = \mathbb{R}^n$ 且 $K \subseteq \mathbb{R}^n$ 是闭子集的特殊情况开始. 对每个 $x \in M \setminus K$, 存在正数 $r \leq 1$ 使得 $B_r(x) \subseteq M \setminus K$. 由命题 A.16, $M \setminus K$ 是可数多个这样的球 $\{B_{r_i}(x_i)\}_{i=1}^{\infty}$ 的并.

令 $h: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ 是光滑隆起函数, 它在 $\bar{B}_{1/2}(0)$ 上等于 1 且支于 $B_1(0)$ 中. 对每个正整数 i , 令 $C_i \geq 1$ 是界住 h 及其直到 i 阶的所有偏导数的绝对值的常数. 定义 $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ 为

$$f(x) = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{(r_i)^i}{2^i C_i} h\left(\frac{x - x_i}{r_i}\right).$$

级数的各项绝对值被收敛级数 $\sum_i 1/2^i$ 的相应项所界, 因此根据 Weierstrass M 判别法, 整个级数一致收敛到一个连续函数. 因为第 i 项恰好在 $x \in B_{r_i}(x_i)$ 时为正, 故 f 在 K 中为零而在其他地方为正.

还需证明 f 是光滑的. 已证明它是连续的, 因此假设 $k \geq 1$ 并通过归纳假设 f 的所有低于 k 阶的偏导数都存在且连续. 由链式法则和归纳法, 级数中第 i 项的每个 k 阶偏导数可以写成形式

$$\frac{(r_i)^{i-k}}{2^i C_i} D_k h\left(\frac{x - x_i}{r_i}\right),$$

其中 $D_k h$ 是 h 的某个 k 阶偏导数. 根据对 r_i 和 C_i 的选择, 一旦 $i \geq k$, 这些项的绝对值都被 $1/2^i$ 所界, 因此求导后的级数也一致收敛到一个连续函数. 于是由定理 C.31 可知 f 的 k 阶偏导数存在且连续. 这完成了归纳, 表明 f 是光滑的.

现在令 M 是任意光滑流形, $K \subseteq M$ 是任意闭子集. 令 $\{B_\alpha\}$ 是 M 的由光滑坐标球构成的开覆盖, 令 $\{\psi_\alpha\}$ 是从属的单位分解. 由于每个 B_α 微分同胚于 \mathbb{R}^n , 前述论证表明对每个 α 存在光滑非负函数 $f_\alpha: B_\alpha \rightarrow \mathbb{R}$ 使得 $f_\alpha^{-1}(0) = B_\alpha \cap K$. 函数 $f = \sum_\alpha \psi_\alpha f_\alpha$ 满足要求. \square

第3节 习题

习题 2-1. 定义 $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ 为

$$f(x) = \begin{cases} 1, & x \geq 0, \\ 0, & x < 0. \end{cases}$$

证明: 对每个 $x \in \mathbb{R}$, 都存在包含 x 的光滑坐标卡 (U, φ) 和包含 $f(x)$ 的光滑坐标卡 (V, ψ) , 使得 $\psi \circ f \circ \varphi^{-1}$ 作为从 $\varphi(U \cap f^{-1}(V))$ 到 $\psi(V)$ 的映射是光滑的, 但 f 在本章定义的意义下并不是光滑的.

习题 2-2. 证明命题 2.12 (到乘积流形的映射的光滑性).

习题 2-3. 对下面每个球面之间的映射, 计算足够多的坐标表示, 以证明该映射是光滑的.

(a) $p_n: \mathbb{S}^1 \rightarrow \mathbb{S}^1$ 是 n 次幂映射, 其中 $n \in \mathbb{Z}$, 在复记号下由 $p_n(z) = z^n$ 给出.

(b) $\alpha: \mathbb{S}^n \rightarrow \mathbb{S}^n$ 是对径映射 $\alpha(x) = -x$.

(c) $F: \mathbb{S}^3 \rightarrow \mathbb{S}^2$ 由下式给出

$$F(w, z) = (z\bar{w} + w\bar{z}, iw\bar{z} - iz\bar{w}, z\bar{z} - w\bar{w}),$$

其中我们将 \mathbb{S}^3 视为 \mathbb{C}^2 的子集 $\{(w, z) : |w|^2 + |z|^2 = 1\}$.

习题 2-4. 证明: 当 $\overline{\mathbb{B}^n}$ 被视为带边流形时, 包含映射 $\overline{\mathbb{B}^n} \hookrightarrow \mathbb{R}^n$ 是光滑的.

习题 2-5. 设 \mathbb{R} 为具有标准光滑结构的实直线, $\tilde{\mathbb{R}}$ 表示例 1.23 中定义的同胚流形, 但带有不同的光滑结构. 设 $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ 是通常意义下的光滑函数.

(a) 证明 f 作为从 \mathbb{R} 到 $\tilde{\mathbb{R}}$ 的映射也是光滑的.

(b) 证明 f 作为从 $\tilde{\mathbb{R}}$ 到 \mathbb{R} 的映射是光滑的当且仅当对所有不是 3 的整数倍的 n , 都有 $f^{(n)}(0) = 0$.

习题 2-6. 设 $P: \mathbb{R}^{n+1} \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{R}^{k+1} \setminus \{0\}$ 是光滑函数, 假设对某个 $d \in \mathbb{Z}$ 和所有的 $\lambda \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ 以及 $x \in \mathbb{R}^{n+1} \setminus \{0\}$, 有 $P(\lambda x) = \lambda^d P(x)$ (这样的函数称为次数为 d 的齐次函数). 证明由 $\tilde{P}([x]) = [P(x)]$ 定义的映射 $\tilde{P}: \mathbb{R}\mathbb{P}^n \rightarrow \mathbb{R}\mathbb{P}^k$ 是良定义且光滑的.

习题 2-7. 设 M 是非空的光滑 n 维流形 (带边或不带边), 且 $n \geq 1$. 证明向量空间 $C^\infty(M)$ 是无限维的. [提示: 证明若 f_1, \dots, f_k 是 $C^\infty(M)$ 中具有非空不交集的元素, 则它们线性无关.]

习题 2-8. 定义 $F: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}\mathbb{P}^n$ 为 $F(x^1, \dots, x^n) = [x^1, \dots, x^n, 1]$. 证明 F 是到 $\mathbb{R}\mathbb{P}^n$ 的一个稠密开子集的微分同胚. 对 $G: \mathbb{C}^n \rightarrow \mathbb{C}\mathbb{P}^n$ 做同样的证明, 其中 G 定义为 $G(z^1, \dots, z^n) = [z^1, \dots, z^n, 1]$ (见习题 1-9).

习题 2-9. 给定一个具有复系数且不全为零的一元多项式 p , 证明存在唯一的光滑映射 $\tilde{p}: \mathbb{C}\mathbb{P}^1 \rightarrow \mathbb{C}\mathbb{P}^1$ 使得下图交换, 其中 $\mathbb{C}\mathbb{P}^1$ 是 1 维复射影空间, $G: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}\mathbb{P}^1$ 是习题 2-8 中的映射:

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{C} & \xrightarrow{G} & \mathbb{C}\mathbb{P}^1 \\ & & \downarrow p \\ \mathbb{C} & \xrightarrow{G} & \mathbb{C}\mathbb{P}^1. \end{array}$$

(用于第 465 页.)

习题 2-10. 对任意拓扑空间 M , 记 $C(M)$ 为连续函数 $f: M \rightarrow \mathbb{R}$ 的代数. 给定连续映射 $F: M \rightarrow N$, 定义 $F^*: C(N) \rightarrow C(M)$ 为 $F^*(f) = f \circ F$.

(a) 证明 F^* 是线性映射.

(b) 设 M 和 N 是光滑流形. 证明 $F: M \rightarrow N$ 是光滑的当且仅当 $F^*(C^\infty(N)) \subseteq C^\infty(M)$.

(c) 设 $F: M \rightarrow N$ 是光滑流形之间的同胚. 证明它是微分同胚当且仅当 F^* 限制为从 $C^\infty(N)$ 到 $C^\infty(M)$ 的同构.

[注: 这一结果表明, 在某种意义上, M 的整个光滑结构都编码在子集 $C^\infty(M) \subseteq C(M)$ 中. 事实上, 有些作者将拓扑流形 M 上的光滑结构定义为 $C(M)$ 的具有某些性质的子代数; 例如参见 [Nes03].]

(用于第 75 页.)

习题 2-11. 设 V 是维数 $n \geq 1$ 的实向量空间. 定义 V 的射影化, 记为 $\mathbb{P}(V)$, 为 V 的所有 1 维线性子空间的集合, 配备由映射 $\pi: V \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{P}(V)$ 诱导的商拓扑, 该映射将 x 映到它张成的直线. (因此 $\mathbb{P}(\mathbb{R}^n) = \mathbb{R}\mathbb{P}^{n-1}$.) 证明 $\mathbb{P}(V)$ 是拓扑 $(n-1)$ 维流形, 并且具有唯一的光滑结构, 使得对每个基 (E_1, \dots, E_n) , 由 $E[v^1, \dots, v^n] = [v^i E_i]$ (方括号表示等价类) 定义的映射 $E: \mathbb{R}\mathbb{P}^{n-1} \rightarrow \mathbb{P}(V)$ 是微分同胚. (用于第 561 页.)

习题 2-12. 叙述并证明习题 2-11 对于复向量空间的一个类似结果.

习题 2-13. 设 M 是拓扑空间, 具有如下性质: 对每个 M 的指标开覆盖 \mathcal{X} , 都存在从属于 \mathcal{X} 的单位分解. 证明 M 是仿紧的.

习题 2-14. 设 A 和 B 是光滑流形 M 的不交闭子集. 证明存在 $f \in C^\infty(M)$ 使得对所有 $x \in M$ 有 $0 \leq f(x) \leq 1$; $f^{-1}(0) = A$, 且 $f^{-1}(1) = B$.

第三章

切向量

微积分的核心思想是**线性近似**. 在研究 Euclid 空间中的微积分时, 这一思想反复出现: 例如, 一元函数可以用其**切线**来近似, \mathbb{R}^n 中的参数化曲线可以用其**速度向量**来近似, \mathbb{R}^3 中的曲面可以用其**切平面**来近似, 而从 \mathbb{R}^n 到 \mathbb{R}^m 的映射则可以用其**全导数**来近似 (见附录 C).

为使流形上的微积分有意义, 需引入流形在某点处的**切空间**, 可将其视为流形在该点附近的一种“线性模型”. 由于光滑流形定义的抽象性, 这一工作需要细致处理, 本章将致力于完成它.

首先研究更为具体的对象: \mathbb{R}^n 中的**几何切向量**, 它们可被想象为附着在点上的“箭头”. 由于光滑流形的定义建立在识别哪些函数是光滑的这一思想之上, 几何切向量易于推广的性质是它作为“**方向导数**”作用于光滑函数的特性. 本章第一节证明的关键观察是: 求方向导数的过程给出了几何切向量与从 $C^\infty(\mathbb{R}^n)$ 到 \mathbb{R} 满足 Leibniz 法则的线性映射之间的一个自然的一一对应. (这样的映射称为**导子**.) 以此为动机, 将光滑流形上的切向量定义为 $C^\infty(M)$ 在某点处的导子.

在本章第二节中, 将说明流形之间的光滑映射如何导出切空间之间的线性映射, 称为该映射的**微分**, 它推广了 Euclid 空间之间映射的全导数. 由此可证明: 任意光滑坐标卡 (U, φ) 都给出 M 在 p 处的切空间到 \mathbb{R}^n 在 $\varphi(p)$ 处的切空间的一个自然同构, 从而将切向量的抽象定义与具体的几何图景联系起来; 后者又与 $\varphi(p)$ 处的几何切向量空间同构. 因此, 任意光滑坐标卡都为每个切空间给出一组基. 利用这一同构, 下面描述如何在这样的基中进行具体计算. 基于这些坐标计算, 说明如何将光滑流形上所有点处的所有切空间“粘合在一起”, 形成一个新的流形, 称为原流形的**切丛**.

接下来将说明光滑曲线如何在每点确定一个切向量, 称为其**速度**, 它可被看作 $C^\infty(M)$ 的导子, 即沿曲线对各个函数求导.

在最后两节中, 讨论并比较定义切空间的几种其他方法, 并简要概述**范畴论**的术语, 它将切空间和微分置于一个更大的框架中.



第 1 节 切向量

想象一个 Euclid 空间中的流形——例如，单位球面 $S^{n-1} \subseteq \mathbb{R}^n$. 在 S^{n-1} 上的一点，何谓“切向量”. 在回答这个问题之前，必须面对关于 \mathbb{R}^n 中元素的一种二分法. 一方面，通常把它们看作空间中的点，其唯一与位置相关的性质可用坐标 (x^1, \dots, x^n) 表示. 另一方面，在做微积分时，有时把它们看作向量，即具有大小和方向但其位置无关紧要的物体. 向量 $v = v^i e_i$ (其中 e_i 表示第 i 个标准基向量) 可可视化为一个箭头，其起点可在 \mathbb{R}^n 中的任意位置. 从向量的角度来看，唯一相关的是它指向哪个方向以及它有多长.

这里真正考虑的是在每一点都有一个独立的 \mathbb{R}^n 副本. 例如，谈论球面上点 a 处的切向量时，可想象它们生活在一个原平移到 a 的 \mathbb{R}^n 副本中.

几何切向量

以下是 Euclid 空间中切向量的初步定义. 给定一点 $a \in \mathbb{R}^n$, 将 \mathbb{R}^n 在点 a 处的几何切空间定义为集合 $\{a\} \times \mathbb{R}^n = \{(a, v) : v \in \mathbb{R}^n\}$, 记作 \mathbb{R}_a^n . \mathbb{R}^n 中的一个几何切向量是某个 $a \in \mathbb{R}^n$ 对应的 \mathbb{R}_a^n 中的元素. 为简化记号，将 (a, v) 简写为 v_a (有时若更清晰，比如当 v 本身有下标时，记作 $v|_a$). 把 v_a 看作起点在 a 的向量 v (图 3.1). 集合 \mathbb{R}_a^n 在以下自然运算下构成一个实向量空间

$$v_a + w_a = (v + w)_a, \quad c(v_a) = (cv)_a.$$

向量 $e_i|_a$, $i = 1, \dots, n$, 构成 \mathbb{R}_a^n 的一组基. 事实上，作为向量空间， \mathbb{R}_a^n 本质上与 \mathbb{R}^n 本身相同. 之所以添加下标 a , 唯一目的是让不同点 a 和 b 处的几何切空间 \mathbb{R}_a^n 和 \mathbb{R}_b^n 成为不相交的集合.

有了这个定义，可将 S^{n-1} 在点 $a \in S^{n-1}$ 处的切空间看作 \mathbb{R}_a^n 的某个子空间 (图 3.2)，即与通过 a 的径向单位向量正交的向量空间. 这里使用 \mathbb{R}_a^n 通过自然同构 $\mathbb{R}^n \cong \mathbb{R}_a^n$ 从 \mathbb{R}^n 继承的内积. 然而，这个定义的问题在于，它没有给出任何线索说明如何在任意光滑流形上定义切向量，因为在那里没有环绕的 Euclid 空间. 所以

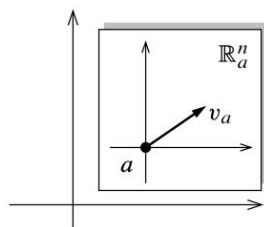
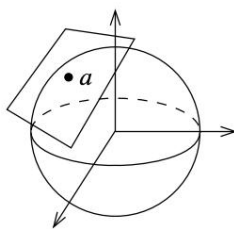


图 3.1: 几何切空间

需要寻找切向量的另一种刻画，使得它在流形上也有意义.

到目前为止，在光滑流形上能用的只有光滑函数、光滑映射和光滑坐标卡. 几何切向量提供的一种东西是计算函数方向导数的方法. 例如，任何几何切向量 $v_a \in \mathbb{R}_a^n$ 都产生一个映射 $D_v|_a$:

图 3.2: \mathbb{S}^{n-1} 的切空间

$C^\infty(\mathbb{R}^n) \rightarrow \mathbb{R}$, 它计算在 a 处沿方向 v 的方向导数:

$$D_v|_a f = D_v f(a) = \left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} f(a + tv). \quad (3.1)$$

这个运算是 \mathbb{R} 线性的, 并且满足 Leibniz 法则:

$$D_v|_a (fg) = f(a) D_v|_a g + g(a) D_v|_a f. \quad (3.2)$$

如果用标准基表示 $v_a = v^i e_i|_a$, 那么根据链式法则, $D_v|_a f$ 可以更具体地写成

$$D_v|_a f = v^i \frac{\partial f}{\partial x^i}(a).$$

(这里像往常一样使用求和约定, 所以右边的表达式被理解为对 $i = 1, \dots, n$ 求和. 若规定“分母中”的上指标应视为下指标, 则这个求和与指标约定一致.) 例如, 若 $v_a = e_j|_a$, 则

$$D_v|_a f = \frac{\partial f}{\partial x^j}(a).$$

考虑到这个构造, 给出以下定义. 若 a 是 \mathbb{R}^n 的一点, 映射 $w : C^\infty(\mathbb{R}^n) \rightarrow \mathbb{R}$ 称为在 a 处的导子, 若它是 \mathbb{R} 线性的并且满足以下 Leibniz 法则:

$$w(fg) = f(a)w g + g(a)w f. \quad (3.3)$$

用 $T_a \mathbb{R}^n$ 表示 $C^\infty(\mathbb{R}^n)$ 在 a 处的所有导子的集合. 显然, $T_a \mathbb{R}^n$ 在以下运算下构成一个向量空间

$$(w_1 + w_2)f = w_1 f + w_2 f, \quad (cw)f = c(wf).$$

切向量

关于 $T_a \mathbb{R}^n$ 最重要 (也许有些令人惊讶) 的事实是, 它是有限维的, 并且实际上与上面定义的几何切空间 \mathbb{R}_a^n 自然同构. 证明将基于以下引理.

引理 3.1 (导子的性质). 设 $a \in \mathbb{R}^n$, $w \in T_a\mathbb{R}^n$, 且 $f, g \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$.

(a) 若 f 是常值函数, 则 $wf = 0$.

(b) 若 $f(a) = g(a) = 0$, 则 $w(fg) = 0$.

证明. 只需对常值函数 $f_1(x) \equiv 1$ 证明 (a), 因为这样一来 $f(x) \equiv c$ 就意味着 $wf = w(cf_1) = cw f_1 = 0$ (由线性性). 对于 f_1 , Leibniz 法则给出

$$wf_1 = w(f_1 f_1) = f_1(a)wf_1 + f_1(a)wf_1 = 2wf_1,$$

这蕴含 $wf_1 = 0$. 类似地, (b) 也由 Leibniz 法则得出:

$$w(fg) = f(a)wg + g(a)wf = 0 + 0 = 0.$$

□

下一个命题表明, a 处的导子与几何切向量一一对应.

命题 3.2. 设 $a \in \mathbb{R}^n$.

(a) 对每个几何切向量 $v_a \in \mathbb{R}^n$, 由 (3.1) 定义的映射 $D_v|_a : C^\infty(\mathbb{R}^n) \rightarrow \mathbb{R}$ 是 a 处的一个导子.

(b) 映射 $v_a \mapsto D_v|_a$ 是从 \mathbb{R}^n 到 $T_a\mathbb{R}^n$ 的一个同构.

证明. $D_v|_a$ 是 a 处的导子这一事实, 是 Leibniz 法则 (3.2) 的直接推论.

为证明映射 $v_a \mapsto D_v|_a$ 是同构, 首先注意它是线性的, 这很容易验证. 为证明它是单射, 假设 $v_a \in \mathbb{R}^n$ 具有性质 $D_v|_a$ 是零导子. 用标准基写出 $v_a = v^i e_i|_a$, 并取 f 为第 j 个坐标函数 $x^j : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$, 看作 \mathbb{R}^n 上的光滑函数, 得到

$$0 = D_v|_a(x^j) = v^i \frac{\partial}{\partial x^i}(x^j) \Big|_{x=a} = v^j,$$

其中最后一个等式成立是因为 $\partial x^j / \partial x^i = 0$ 除非 $i = j$, 此时它等于 1. 由于这对每个 j 都成立, 可知 v_a 是零向量.

为证明满射性, 设 $w \in T_a\mathbb{R}^n$ 是任意的. 受上一段计算的启发, 定义 $v = v^i e_i$, 其中实数 v^1, \dots, v^n 由 $v^i = w(x^i)$ 给出. 下面证明 $w = D_v|_a$.

为此, 设 f 是 \mathbb{R}^n 上的任意光滑实值函数. 根据 Taylor 定理 (定理 C.15), 可以写出

$$\begin{aligned} f(x) &= f(a) + \sum_{i=1}^n \frac{\partial f}{\partial x^i}(a) (x^i - a^i) \\ &\quad + \sum_{i,j=1}^n (x^i - a^i) (x^j - a^j) \int_0^1 (1-t) \frac{\partial^2 f}{\partial x^i \partial x^j}(a + t(x-a)) dt. \end{aligned}$$

注意上面的最后一项求和中, 每一项都是 x 的两个光滑函数的乘积, 它们在 $x = a$ 处都为零: 一个是 $(x^i - a^i)$, 另一个是 $(x^j - a^j)$ 乘以积分. 根据引理 3.1(b), 导子 w 将整个和消为零. 因此

$$\begin{aligned} wf &= w(f(a)) + \sum_{i=1}^n w\left(\frac{\partial f}{\partial x^i}(a)(x^i - a^i)\right) \\ &= 0 + \sum_{i=1}^n \frac{\partial f}{\partial x^i}(a)(w(x^i) - w(a^i)) \\ &= \sum_{i=1}^n \frac{\partial f}{\partial x^i}(a)v^i = D_v|_a f. \end{aligned}$$

□

推论 3.3. 对任意 $a \in \mathbb{R}^n$, n 个导子

$$\left. \frac{\partial}{\partial x^1} \Big|_a, \dots, \frac{\partial}{\partial x^n} \Big|_a \right\} \text{ 定义为 } \left. \frac{\partial}{\partial x^i} \Big|_a f = \frac{\partial f}{\partial x^i}(a) \right\}$$

构成 $T_a\mathbb{R}^n$ 的一组基, 因此 $T_a\mathbb{R}^n$ 的维数为 n .

证明. 应用前一个命题, 并注意 $\partial/\partial x^i|_a = D_{e_i}|_a$.

□

流形上的切向量

现在能够定义流形和带边流形上的切向量了. 两种情形的定义相同. 设 M 是带边或不带边的光滑流形, p 是 M 的一点. 线性映射 $v: C^\infty(M) \rightarrow \mathbb{R}$ 称为在 p 处的导子, 若它满足

$$v(fg) = f(p)v g + g(p)v f \quad \text{对所有 } f, g \in C^\infty(M). \quad (3.4)$$

$C^\infty(M)$ 在 p 处的所有导子的集合, 记作 $T_p M$, 是一个向量空间, 称为 M 在 p 处的切空间. $T_p M$ 的元素称为在 p 处的切向量.

以下引理是引理 3.1 在流形上的类比.

引理 3.4 (流形上切向量的性质). 设 M 是带边或不带边的光滑流形, $p \in M$, $v \in T_p M$, 且 $f, g \in C^\infty(M)$.

- (a) 若 f 是常值函数, 则 $v f = 0$.
- (b) 若 $f(p) = g(p) = 0$, 则 $v(fg) = 0$.

习题 3.5. 证明引理 3.4.

考虑到 \mathbb{R}^n 中几何切向量的动机, 应该把 M 的切向量可视化为“箭头”, 它们与 M 相切, 且其基点附着在 M 的给定点上. 当然, 关于切向量的定理的证明必须基于导子的抽象定义, 但直觉应尽可能由几何图像来引导.

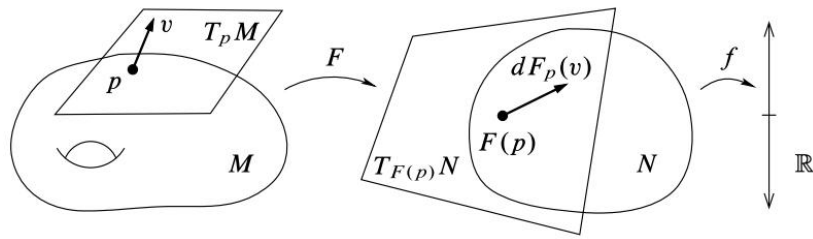


图 3.3: 微分

第 2 节 光滑映射的微分

为将流形上定义的抽象切空间与 \mathbb{R}^n 中的几何切空间联系起来, 需要探讨光滑映射如何作用于切向量. 对于 Euclid 空间之间的光滑映射, 其在某点的全导数 (由 Jacobi 矩阵表示) 是一个线性映射, 表示映射在该点附近”最佳的线性近似”. 流形情形也存在类似的线性映射, 但讨论流形之间的线性映射是没有意义的. 相反, 这体现为切空间之间的线性映射.

设 M 和 N 为带边或不带边的光滑流形, $F: M \rightarrow N$ 为光滑映射, 则对每个 $p \in M$, 定义映射

$$dF_p: T_p M \rightarrow T_{F(p)} N,$$

称为 F 在 p 处的微分 (图 3.3), 定义如下. 给定 $v \in T_p M$, 记 $dF_p(v)$ 为 $F(p)$ 处的导子, 它按如下规则作用于 $f \in C^\infty(N)$:

$$dF_p(v)(f) = v(f \circ F).$$

注意, 若 $f \in C^\infty(N)$, 则 $f \circ F \in C^\infty(M)$, 故 $v(f \circ F)$ 有意义. 算子 $dF_p(v): C^\infty(N) \rightarrow \mathbb{R}$ 是线性的, 因为 v 是线性的; 并且它是 $F(p)$ 处的导子, 因为对任意 $f, g \in C^\infty(N)$ 有

$$\begin{aligned} dF_p(v)(fg) &= v((fg) \circ F) = v((f \circ F)(g \circ F)) \\ &= f \circ F(p) v(g \circ F) + g \circ F(p) v(f \circ F) \\ &= f(F(p)) dF_p(v)(g) + g(F(p)) dF_p(v)(f). \end{aligned}$$

命题 3.6 (微分的性质). 设 M, N 和 P 为带边或不带边的光滑流形, $F: M \rightarrow N$ 和 $G: N \rightarrow P$ 为光滑映射, 且 $p \in M$.

- (a) $dF_p: T_p M \rightarrow T_{F(p)} N$ 是线性的.
- (b) $d(G \circ F)_p = dG_{F(p)} \circ dF_p: T_p M \rightarrow T_{G \circ F(p)} P$.
- (c) $d(\text{Id}_M)_p = \text{Id}_{T_p M}: T_p M \rightarrow T_p M$.
- (d) 若 F 是微分同胚, 则 $dF_p: T_p M \rightarrow T_{F(p)} N$ 是同构, 且 $(dF_p)^{-1} = d(F^{-1})_{F(p)}$.

习题 3.7. 证明命题 3.6.

微分的第一个重要应用是利用坐标卡将流形上某点的切空间与 Euclid 切空间联系起来. 但首

先必须解决一个重要的技术问题：切空间是用整个流形上的光滑函数定义的，而坐标卡通常只在开子集上定义。关键点——表达在下一个命题中——是切向量具有局部作用性。

命题 3.8. 设 M 为带边或不带边的光滑流形， $p \in M$ ，且 $v \in T_p M$ 。若 $f, g \in C^\infty(M)$ 在 p 的某个邻域上一致，则 $vf = vg$ 。

证明. 记 $h = f - g$ ，则 h 是在 p 的某个邻域上为零的光滑函数。设 $\psi \in C^\infty(M)$ 为光滑隆起函数，它在 h 的支集上恒等于 1，且在 $M \setminus \{p\}$ 上支集。因为 $\psi \equiv 1$ 在 h 非零处，故乘积 ψh 恒等于 h 。由于 $h(p) = \psi(p) = 0$ ，引理 3.4 蕴含 $vh = v(\psi h) = 0$ 。由线性性，这蕴含 $vf = vg$ 。□

利用这个命题，可将开子流形的切空间与整个流形的切空间等同起来。

命题 3.9 (开子流形的切空间). 设 M 为带边或不带边的光滑流形， $U \subseteq M$ 为开子集，且 $\iota: U \hookrightarrow M$ 为包含映射。对每个 $p \in U$ ，微分 $d\iota_p: T_p U \rightarrow T_p M$ 是同构。

证明. 为证明单射性，假设 $v \in T_p U$ 且 $d\iota_p(v) = 0 \in T_p M$ 。取 p 的邻域 B 使得 $\bar{B} \subseteq U$ 。若 $f \in C^\infty(U)$ 是任意的，光滑函数的延拓引理保证存在 $\tilde{f} \in C^\infty(M)$ 使得 $\tilde{f} \equiv f$ 在 \bar{B} 上。则由于 f 和 $\tilde{f}|_U$ 是 U 上的光滑函数且在 p 的邻域上一致，命题 3.8 蕴含

$$vf = v(\tilde{f}|_U) = v(\tilde{f} \circ \iota) = d\iota(v)_p \tilde{f} = 0.$$

由于这对每个 $f \in C^\infty(U)$ 成立，故 $v = 0$ ，所以 $d\iota_p$ 是单射。

另一方面，为证明满射性，假设 $w \in T_p M$ 为任意的。定义算子 $v: C^\infty(U) \rightarrow \mathbb{R}$ 为 $vf = w\tilde{f}$ ，其中 \tilde{f} 是 M 上任意的与 f 在 \bar{B} 上一致的光滑函数。由命题 3.8， vf 与 \tilde{f} 的选取无关，故 v 是良定义的，并且容易验证它是 $C^\infty(U)$ 在 p 处的导子。对任意 $g \in C^\infty(M)$ ，

$$d\iota_p(v)g = v(g \circ \iota) = w(\tilde{g} \circ \iota) = wg,$$

其中最后两个等式由 $g \circ \iota$ 、 $\tilde{g} \circ \iota$ 和 g 都在 B 上一致的事实得出。因此， $d\iota_p$ 也是满射。□

给定开子集 $U \subseteq M$ ， $T_p U$ 与 $T_p M$ 之间的同构 $d\iota_p$ 是典范定义的，与任何选取无关。从现在开始，对任意点 $p \in U$ 将 $T_p U$ 与 $T_p M$ 等同。这个等同等价于如下观察：

$d\iota_p(v)$ 是与 v 相同的导子，只不过看作作用于更大流形 M 上的函数而非 U 上的函数。由于导子对函数的作用只依赖于函数在任意小邻域中的取值，这是一个无害的等同。特别地，这意味着任何切向量 $v \in T_p M$ 都可以无歧义地作用于只在 p 的邻域上定义的函数，而不必作用于整个 M 上的函数。

命题 3.10 (切空间的维数). 若 M 为 n 维光滑流形，则对每个 $p \in M$ ，切空间 $T_p M$ 是 n 维向量空间。

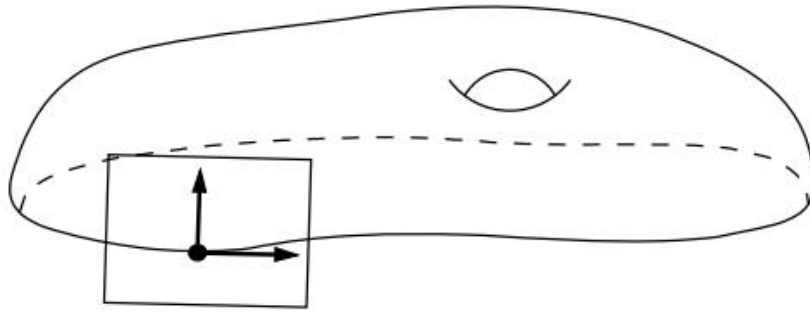


图 3.4: 带边流形的切空间

证明. 给定 $p \in M$, 设 (U, φ) 为包含 p 的光滑坐标卡. 因为 φ 是从 U 到开子集 $\hat{U} \subseteq \mathbb{R}^n$ 的微分同胚, 由命题 3.6(d) 可知 $d\varphi_p$ 是从 $T_p U$ 到 $T_{\varphi(p)} \hat{U}$ 的同构. 由于命题 3.9 保证 $T_p M \cong T_p U$ 且 $T_{\varphi(p)} \hat{U} \cong T_{\varphi(p)} \mathbb{R}^n$, 故得 $\dim T_p M = \dim T_{\varphi(p)} \mathbb{R}^n = n$. \square

接下来需要证明关于带边流形的类似结果. 事实上, 若 M 为 n 维带边流形, M 的边界点处的切空间应该是什么样子可能并不是立即清楚的. 它应该是像内点处的切空间那样的 n 维向量空间吗? 还是应该是像边界那样的 $(n-1)$ 维的? 或者它应该是 n 维半空间, 就像局部模拟 M 的空间 \mathbb{H}^n 那样?

如下所示, 定义意味着边界点处的切空间是 n 维向量空间 (图 3.4), 就像内点处的切空间一样. 这可能看起来不是最几何直观的选择, 但它的优势在于使得带边流形上几何对象的大多数定义看起来与流形上的定义完全相同.

首先, 需要对点 $a \in \partial \mathbb{H}^n$ 建立切空间 $T_a \mathbb{H}^n$ 与 $T_a \mathbb{R}^n$ 之间的联系. 由于 \mathbb{H}^n 不是 \mathbb{R}^n 的开子集, 命题 3.9 不适用. 作为替代, 有如下引理.

引理 3.11. 设 $\iota: \mathbb{H}^n \hookrightarrow \mathbb{R}^n$ 表示包含映射. 对任意 $a \in \partial \mathbb{H}^n$, 微分 $d\iota_a: T_a \mathbb{H}^n \rightarrow T_a \mathbb{R}^n$ 是同构.

证明. 设 $a \in \partial \mathbb{H}^n$. 为证明 $d\iota_a$ 是单射, 假设 $d\iota_a(v) = 0$. 设 $f: \mathbb{H}^n \rightarrow \mathbb{R}$ 为光滑函数, 且 \tilde{f} 为 f 到整个 \mathbb{R}^n 上定义的任意光滑延拓. (这样的延拓由光滑函数的延拓引理, 引理 2.26, 存在.) 则 $\tilde{f} \circ \iota = f$, 故

$$vf = v(\tilde{f} \circ \iota) = d\iota_a(v)\tilde{f} = 0,$$

这蕴含 $d\iota_a$ 是单射.

为证明满射性, 设 $w \in T_a \mathbb{R}^n$ 为任意的. 定义 $v \in T_a \mathbb{H}^n$ 为

$$vf = w\tilde{f},$$

其中 \tilde{f} 是 f 的任意光滑延拓. 用 $T_a \mathbb{R}^n$ 的标准基将 w 写成 $w = w^i \partial / \partial x^i|_a$, 这意味着

$$vf = w^i \frac{\partial \tilde{f}}{\partial x^i}(a).$$

这与 \tilde{f} 的选取无关, 因为由连续性, \tilde{f} 在 a 处的导数由 f 在 \mathbb{H}^n 中的导数决定. 容易验证 v 是 a 处的导子且 $w = dt_a(v)$, 故 dt_a 是满射. \square

正如用命题 3.9 将 U 是 M 的开子集时的 $T_p U$ 与 $T_p M$ 等同一样, 用这个引理将 $a \in \partial \mathbb{H}^n$ 时的 $T_a \mathbb{H}^n$ 与 $T_a \mathbb{R}^n$ 等同, 并且在记号上不区分 $T_a \mathbb{H}^n$ 中的元素与其在 $T_a \mathbb{R}^n$ 中的像.

命题 3.12 (带边流形上切空间的维数). 设 M 为 n 维光滑带边流形. 对每个 $p \in M$, $T_p M$ 是 n 维向量空间.

证明. 设 $p \in M$ 为任意的. 若 p 是内点, 则因为 $\text{Int } M$ 是 M 的开子流形, 命题 3.9 蕴含 $T_p(\text{Int } M) \cong T_p M$. 由于 $\text{Int } M$ 是不带边的光滑 n 维流形, 其切空间都具有维数 n .

另一方面, 若 $p \in \partial M$, 设 (U, φ) 为包含 p 的光滑边界坐标卡, 且 $\hat{U} = \varphi(U) \subseteq \mathbb{H}^n$. 存在同构 $T_p M \cong T_p U$ (由命题 3.9); $T_p U \cong T_{\varphi(p)} \hat{U}$ (由命题 3.6(d), 因为 φ 是微分同胚); $T_{\varphi(p)} \hat{U} \cong T_{\varphi(p)} \mathbb{H}^n$ (再由命题 3.9); 以及 $T_{\varphi(p)} \mathbb{H}^n \cong T_{\varphi(p)} \mathbb{R}^n$ (由引理 3.11). 结果得证. \square

回忆例 1.24, 每个有限维向量空间都有自然的、独立于任何基或范数选取的光滑流形结构. 如下命题表明, 向量空间的切空间可以自然地与向量空间本身等同.

设 V 为有限维向量空间且 $a \in V$. 正如之前在 \mathbb{R}^n 情形所做的那样, 对任意向量 $v \in V$, 定义映射 $D_v|_a: C^\infty(V) \rightarrow \mathbb{R}$ 为

$$D_v|_a f = \left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} f(a + tv). \quad (3.5)$$

命题 3.13 (向量空间的切空间). 设 V 为具有标准光滑流形结构的有限维向量空间. 对每个点 $a \in V$, 由 (3.5) 定义的映射 $v \mapsto D_v|_a$ 是从 V 到 $T_a V$ 的典范同构, 使得对任意线性映射 $L: V \rightarrow W$, 下图交换:

$$\begin{array}{ccc} V & \xrightarrow{\cong} & T_a V \\ L \downarrow & & \downarrow dL_a \\ W & \xrightarrow{\cong} & T_{La} W. \end{array} \quad (3.6)$$

证明. 一旦为 V 选取一个基, 就可以用与命题 3.2 的证明相同的论证来证明 $D_v|_a$ 确实是 a 处的导子, 且映射 $v \mapsto D_v|_a$ 是同构.

现设 $L: V \rightarrow W$ 为线性映射. 因为它关于 V 和 W 的任意基选取的分量都是坐标的线性函数, L 是光滑的. 展开定义并利用 L 的线性性, 计算

$$\begin{aligned} dL_a(D_v|_a) f &= D_v|_a(f \circ L) \\ &= \left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} f(L(a + tv)) = \left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} f(La + tLv) \\ &= D_{Lv}|_{La} f. \end{aligned}$$

\square

重要的是要理解, 每个同构 $V \cong T_a V$ 都是典范定义的, 独立于任何基的选取 (尽管用了基的选取来证明它是同构). 由于这个结果, 可以将有限维向量空间的切向量与该空间的元素等同起来. 更一般地, 若 M 为向量空间 V 的开子流形, 可以将等同 $T_p M \cong T_p V \cong V$ 结合起来, 得到 M 的每个切空间与 V 的典范等同. 例如, 由于 $GL(n, \mathbb{R})$ 是向量空间 $\mathbf{M}(n, \mathbb{R})$ 的开子流形, 可以将它在每点 $X \in GL(n, \mathbb{R})$ 处的切空间与整个矩阵空间 $\mathbf{M}(n, \mathbb{R})$ 等同.

对于乘积流形的切空间, 还有另一种自然的等同.

命题 3.14 (乘积流形的切空间). 设 M_1, \dots, M_k 为光滑流形, 且对每个 j , 设 $\pi_j: M_1 \times \dots \times M_k \rightarrow M_j$ 为到 M_j 因子的投影. 对任意点 $p = (p_1, \dots, p_k) \in M_1 \times \dots \times M_k$, 映射

$$\alpha: T_p(M_1 \times \dots \times M_k) \rightarrow T_{p_1} M_1 \oplus \dots \oplus T_{p_k} M_k$$

定义为

$$\alpha(v) = (d(\pi_1)_p(v), \dots, d(\pi_k)_p(v)) \tag{3.7}$$

是同构. 若其中一个空间 M_i 是光滑带边流形, 结论同样成立.

证明. 见习题 3-2. □

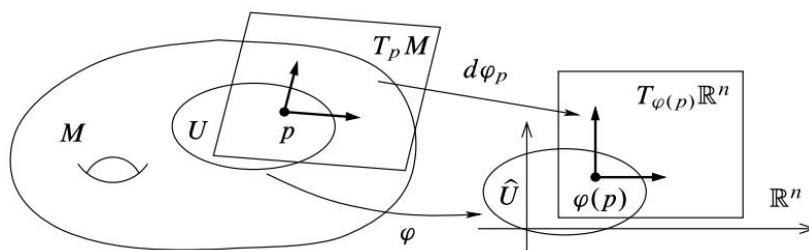


图 3.5: 坐标中的切向量

再次强调, 因为同构 (3.7) 是典范定义的, 独立于任何坐标选取, 可以将它视为典范等同, 并且总是这样做. 因此, 例如, 将 $T_{(p,q)}(M \times N)$ 与 $T_p M \oplus T_q N$ 等同, 并将 $T_p M$ 和 $T_q N$ 视为 $T_{(p,q)}(M \times N)$ 的子空间.

第 3 节 坐标中的计算

迄今为止, 对流形上切空间的处理可能显得过于抽象. 为使其具体化, 下面介绍如何在局部坐标中计算切向量和微分.

首先, 假设 M 是一个光滑流形 (无边), (U, φ) 是 M 上的一个光滑坐标卡. 那么 φ 是一个从 U 到开子集 $\hat{U} \subseteq \mathbb{R}^n$ 的微分同胚. 结合命题 3.9 和 3.6(d), 可得 $d\varphi_p: T_p M \rightarrow T_{\varphi(p)} \mathbb{R}^n$ 是一个同构.

根据推论 3.3, 导子 $\partial/\partial x^1|_{\varphi(p)}, \dots, \partial/\partial x^n|_{\varphi(p)}$ 构成 $T_{\varphi(p)}\mathbb{R}^n$ 的一组基. 因此, 这些向量在微分同胚 $d\varphi_p$ 下的原像构成 T_pM 的一组基 (图 3.5). 按照将坐标映射尽可能视为等同的标准做法, 使用记号 $\partial/\partial x^i|_p$ 表示这些向量, 它们由以下任一表达式刻画:

$$\frac{\partial}{\partial x^i}\Big|_p = (d\varphi_p)^{-1} \left(\frac{\partial}{\partial x^i}\Big|_{\varphi(p)} \right) = d(\varphi^{-1})_{\varphi(p)} \left(\frac{\partial}{\partial x^i}\Big|_{\varphi(p)} \right). \quad (3.8)$$

展开定义, 可见 $\partial/\partial x^i|_p$ 作用于函数 $f \in C^\infty(U)$ 的方式为

$$\frac{\partial}{\partial x^i}\Big|_p f = \frac{\partial}{\partial x^i}\Big|_{\varphi(p)} (f \circ \varphi^{-1}) = \frac{\partial \hat{f}}{\partial x^i}(\hat{p}),$$

其中 $\hat{f} = f \circ \varphi^{-1}$ 是 f 的坐标表示, 而 $\hat{p} = (p^1, \dots, p^n) = \varphi(p)$ 是 p 的坐标表示. 换言之, $\partial/\partial x^i|_p$ 正是这样一个导子: 它在 (p 的坐标表示处) 取 (f 的坐标表示的) 第 i 个偏导数. 向量 $\partial/\partial x^i|_p$ 称为与给定坐标系相关的点 p 处的**坐标向量**. 在 \mathbb{R}^n 的标准坐标的特殊情形, 向量 $\partial/\partial x^i|_p$ 就是通常的偏导数算子.

当 M 是带边光滑流形且 p 是内点时, 上述讨论完全适用. 对于 $p \in \partial M$, 唯一需要做的修改是用 \mathbb{H}^n 代替 \mathbb{R}^n , 并理解记号 $\partial/\partial x^i|_{\varphi(p)}$ 可以互换地用来表示 $T_{\varphi(p)}\mathbb{R}^n$ 的元素或 $T_{\varphi(p)}\mathbb{H}^n$ 的元素, 这符合将同构 $dl_{\varphi(p)}: T_{\varphi(p)}\mathbb{H}^n \rightarrow T_{\varphi(p)}\mathbb{R}^n$ 视为等同的约定. 在这种情况下, 第 n 个坐标向量 $\partial/\partial x^n|_p$ 应当理解为单侧导数.

下面命题总结了上述讨论.

命题 3.15. 设 M 是带边或不带边的光滑 n -流形, $p \in M$. 则 T_pM 是一个 n 维向量空间, 并且对任何包含 p 的光滑坐标卡 $(U, (x^i))$, 坐标向量 $\partial/\partial x^1|_p, \dots, \partial/\partial x^n|_p$ 构成 T_pM 的一组基.

因此, 切向量 $v \in T_pM$ 可以唯一地写成线性组合

$$v = v^i \frac{\partial}{\partial x^i}\Big|_p,$$

其中如常使用求和约定, 分母中的上指标被视为下指标, 如第 52 页所述. 有序基 $(\partial/\partial x^i|_p)$ 称为 T_pM 的**坐标基**, 而数 (v^1, \dots, v^n) 称为 v 关于坐标基的**分量**. 若 v 已知, 其分量可以从它对坐标函数的作用容易地算出. 对每个 j , v 的分量由 $v^j = v(x^j)$ 给出 (其中将 x^j 视为 U 上的光滑实值函数), 因为

$$v(x^j) = \left(v^i \frac{\partial}{\partial x^i}\Big|_p \right) (x^j) = v^i \frac{\partial x^j}{\partial x^i}(p) = v^j.$$

坐标中的微分

下面探讨微分在坐标中的形式. 首先考虑特殊情形: 光滑映射 $F: U \rightarrow V$, 其中 $U \subseteq \mathbb{R}^n$ 和 $V \subseteq \mathbb{R}^m$ 是 Euclid 空间的开子集. 对任意 $p \in U$, 下面确定 $dF_p: T_p\mathbb{R}^n \rightarrow T_{F(p)}\mathbb{R}^m$ 关于标准坐标基的矩阵. 用 (x^1, \dots, x^n) 记定义域的坐标, 用 (y^1, \dots, y^m) 记上域的坐标, 由链式法则计算 dF_p 在典型基向量上的作用如下:

$$\begin{aligned} dF_p \left(\frac{\partial}{\partial x^i} \Big|_p \right) f &= \frac{\partial}{\partial x^i} \Big|_p (f \circ F) = \frac{\partial f}{\partial y^j} (F(p)) \frac{\partial F^j}{\partial x^i} (p) \\ &= \left(\frac{\partial F^j}{\partial x^i} (p) \frac{\partial}{\partial y^j} \Big|_{F(p)} \right) f. \end{aligned}$$

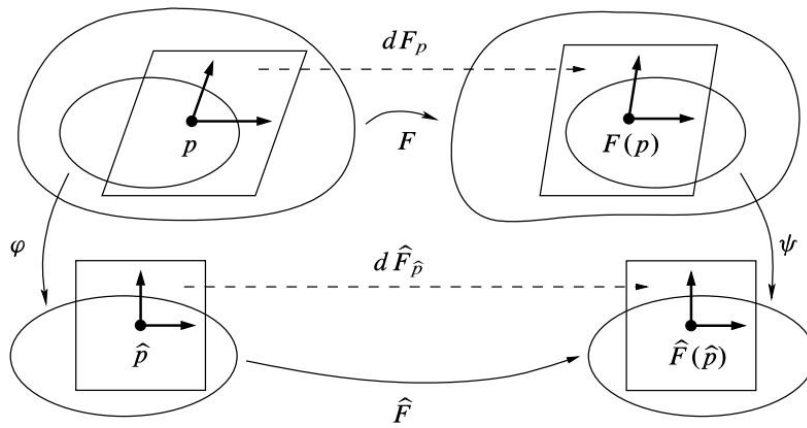


图 3.6: 坐标中的微分

因此

$$dF_p \left(\frac{\partial}{\partial x^i} \Big|_p \right) = \frac{\partial F^j}{\partial x^i} (p) \frac{\partial}{\partial y^j} \Big|_{F(p)}. \tag{3.9}$$

换言之, dF_p 关于坐标基的矩阵是

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial F^1}{\partial x^1} (p) & \cdots & \frac{\partial F^1}{\partial x^n} (p) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial F^m}{\partial x^1} (p) & \cdots & \frac{\partial F^m}{\partial x^n} (p) \end{pmatrix}.$$

(回忆矩阵的列是基向量像的分量.) 这个矩阵不是别的, 正是 F 在 p 处的 Jacobi 矩阵, 它是全导数 $DF(p): \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ 的矩阵表示. 因此, 在这种情况下, $dF_p: T_p\mathbb{R}^n \rightarrow T_{F(p)}\mathbb{R}^m$ 对应于全导数 $DF(p): \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$, 在通常将 Euclid 空间与其切空间等同的意义下. 若 U 是 \mathbb{H}^n 的开子集而 V 是 \mathbb{H}^m 的开子集, 同样的计算也适用.

现在考虑更一般的情形：带边或不带边光滑流形之间的光滑映射 $F: M \rightarrow N$. 选取包含 p 的 M 的光滑坐标卡 (U, φ) 和包含 $F(p)$ 的 N 的光滑坐标卡 (V, ψ) , 得到坐标表示 $\widehat{F} = \psi \circ F \circ \varphi^{-1}: \varphi(U \cap F^{-1}(V)) \rightarrow \psi(V)$ (图 3.6). 记 $\widehat{p} = \varphi(p)$ 为 p 的坐标表示. 由上述计算, $d\widehat{F}_{\widehat{p}}$ 关于标准坐标基由 \widehat{F} 在 \widehat{p} 处的 Jacobi 矩阵表示. 利用 $F \circ \varphi^{-1} = \psi^{-1} \circ \widehat{F}$ 这一事实, 计算得

$$\begin{aligned} dF_p \left(\left. \frac{\partial}{\partial x^i} \right|_p \right) &= dF_p \left(d(\varphi^{-1})_{\widehat{p}} \left(\left. \frac{\partial}{\partial x^i} \right|_{\widehat{p}} \right) \right) = d(\psi^{-1})_{\widehat{F}(\widehat{p})} \left(d\widehat{F}_{\widehat{p}} \left(\left. \frac{\partial}{\partial x^i} \right|_{\widehat{p}} \right) \right) \\ &= d(\psi^{-1})_{\widehat{F}(\widehat{p})} \left(\left. \frac{\partial \widehat{F}^j}{\partial x^i}(\widehat{p}) \frac{\partial}{\partial y^j} \right|_{\widehat{F}(\widehat{p})} \right) \\ &= \left. \frac{\partial \widehat{F}^j}{\partial x^i}(\widehat{p}) \frac{\partial}{\partial y^j} \right|_{F(p)}. \end{aligned} \tag{3.10}$$

因此, dF_p 在坐标基中由 (F 的坐标表示的) Jacobi 矩阵表示. 事实上, 微分的定义正是为了赋予 Jacobi 矩阵以坐标无关的意义.

在微分几何文献中, 微分有时称为**切映射**、**全导数**, 或简称 F 的**导数**. 因为它将切向量从定义域流形“前推”到上域, 它也称为 (逐点的) **前推**. 不同作者用如下符号表示它:

$$F'(p), \quad DF, \quad DF(p), \quad F_*, \quad TF, \quad T_p F.$$

坚持使用记号 dF_p 表示流形之间光滑映射的微分, 而保留 $DF(p)$ 表示有限维向量空间之间映射的全导数, 在 Euclid 空间的情形下将其等同于 F 的 Jacobi 矩阵.

坐标变换

假设 (U, φ) 和 (V, ψ) 是 M 上的两个光滑坐标卡, $p \in U \cap V$. 记 φ 的坐标函数为 (x^i) , ψ 的坐标函数为 (\tilde{x}^i) . 在 p 点的任何切向量都可以关于基 $(\partial/\partial x^i|_p)$ 或基 $(\partial/\partial \tilde{x}^i|_p)$ 表示. 这两个表示之间有何关系?

在这种情况下, 通常用如下简写记号写出转移映射 $\psi \circ \varphi^{-1}: \varphi(U \cap V) \rightarrow \psi(U \cap V)$:

$$\psi \circ \varphi^{-1}(x) = (\tilde{x}^1(x), \dots, \tilde{x}^n(x)).$$

这里沉溺于一种典型的记号滥用: 在表达式 $\tilde{x}^i(x)$ 中, 将 \tilde{x}^i 视为坐标函数 (其定义域是 M 的开子集, 与 \mathbb{R}^n 或 \mathbb{H}^n 的开子集等同); 但把 x 视为表示一个点 (在此情形下, 在 $\varphi(U \cap V)$ 中). 由 (3.9),

微分 $d(\psi \circ \varphi^{-1})_{\varphi(p)}$ 可以写成

$$d(\psi \circ \varphi^{-1})_{\varphi(p)} \left(\frac{\partial}{\partial x^i} \Big|_{\varphi(p)} \right) = \frac{\partial \tilde{x}^j}{\partial x^i}(\varphi(p)) \frac{\partial}{\partial \tilde{x}^j} \Big|_{\psi(p)}.$$

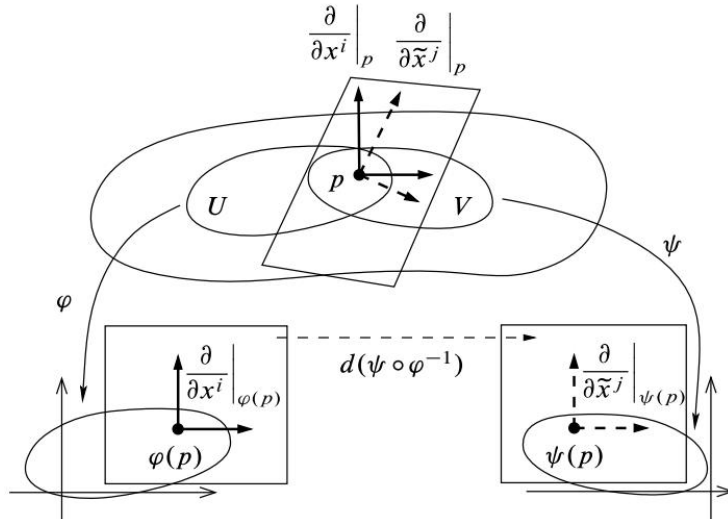


图 3.7: 坐标变换

(见图 3.7.) 利用坐标向量的定义, 得到

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x^i} \Big|_p &= d(\varphi^{-1})_{\varphi(p)} \left(\frac{\partial}{\partial x^i} \Big|_{\varphi(p)} \right) \\ &= d(\psi^{-1})_{\psi(p)} \circ d(\psi \circ \varphi^{-1})_{\varphi(p)} \left(\frac{\partial}{\partial x^i} \Big|_{\varphi(p)} \right) \\ &= d(\psi^{-1})_{\psi(p)} \left(\frac{\partial \tilde{x}^j}{\partial x^i}(\varphi(p)) \frac{\partial}{\partial \tilde{x}^j} \Big|_{\psi(p)} \right) = \frac{\partial \tilde{x}^j}{\partial x^i}(\hat{p}) \frac{\partial}{\partial \tilde{x}^j} \Big|_p, \end{aligned} \tag{3.11}$$

其中再次记 $\hat{p} = \varphi(p)$. (这个公式容易记住, 因为它看起来与 \mathbb{R}^n 中偏导数的链式法则完全一样.) 将此应用于向量 $v = v^i \partial / \partial x^i|_p = \tilde{v}^j \partial / \partial \tilde{x}^j|_p$ 的分量, 可见 v 的分量按如下法则变换:

$$\tilde{v}^j = \frac{\partial \tilde{x}^j}{\partial x^i}(\hat{p}) v^i. \tag{3.12}$$

例 3.16. 平面中适当开子集上极坐标与标准坐标之间的转移映射由 $(x, y) = (r \cos \theta, r \sin \theta)$ 给出. 设 p 是 \mathbb{R}^2 中极坐标表示为 $(r, \theta) = (2, \pi/2)$ 的点, $v \in T_p \mathbb{R}^2$ 是极坐标表示为

$$v = 3 \frac{\partial}{\partial r} \Big|_p - \frac{\partial}{\partial \theta} \Big|_p$$

的切向量.

将 (3.11) 应用于坐标向量, 得到

$$\frac{\partial}{\partial r}\Big|_p = \cos\left(\frac{\pi}{2}\right) \frac{\partial}{\partial x}\Big|_p + \sin\left(\frac{\pi}{2}\right) \frac{\partial}{\partial y}\Big|_p = \frac{\partial}{\partial y}\Big|_p,$$

$$\frac{\partial}{\partial \theta}\Big|_p = -2 \sin\left(\frac{\pi}{2}\right) \frac{\partial}{\partial x}\Big|_p + 2 \cos\left(\frac{\pi}{2}\right) \frac{\partial}{\partial y}\Big|_p = -2 \frac{\partial}{\partial x}\Big|_p,$$

因此 v 在标准坐标中有如下坐标表示:

$$v = 3 \frac{\partial}{\partial y}\Big|_p + 2 \frac{\partial}{\partial x}\Big|_p.$$

应当牢记的一个重要事实是, 每个坐标向量 $\partial/\partial x^i|_p$ 依赖于整个坐标系, 而不仅仅是单个坐标函数 x^i . 几何上, 这反映了 $\partial/\partial x^i|_p$ 是这样得到的导子: 对 x^i 求导, 同时保持所有其他坐标不变. 若除 x^i 外的坐标函数发生变化, 这个坐标导数的方向也会改变. 下面的习题说明了这种情况是如何发生的.

习题 3.17. 设 (x, y) 表示 \mathbb{R}^2 上的标准坐标. 验证 (\tilde{x}, \tilde{y}) 是 \mathbb{R}^2 上的整体光滑坐标, 其中

$$\tilde{x} = x, \quad \tilde{y} = y + x^3.$$

设 p 是点 $(1, 0) \in \mathbb{R}^2$ (在标准坐标中), 并证明

$$\frac{\partial}{\partial x}\Big|_p \neq \frac{\partial}{\partial \tilde{x}}\Big|_p,$$

即使坐标函数 x 和 \tilde{x} 完全相等.

第 4 节 切丛

流形上所有点处的切向量集合通常具有重要意义. 对于带边或不带边的光滑流形 M , 定义 M 的**切丛**, 记为 TM , 为 M 上所有点处切空间的不交并:

$$TM = \coprod_{p \in M} T_p M.$$

通常将这个不交并的元素记为有序对 (p, v) , 其中 $p \in M$ 且 $v \in T_p M$ (而非像不交并的元素更常见的写法那样将点 p 放在第二个位置). 切丛配备了一个**自然投影**映射 $\pi: TM \rightarrow M$, 它将 $T_p M$

中的每个向量送到其作为切向量的那个点 p : $\pi(p, v) = p$. 通常将 $T_p M$ 与其在典范单射 $v \mapsto (p, v)$ 下的像等同, 并根据对点 p 的强调程度, 采用记号 (p, v) 、 v_p 或 v 表示 $T_p M$ 中的切向量.

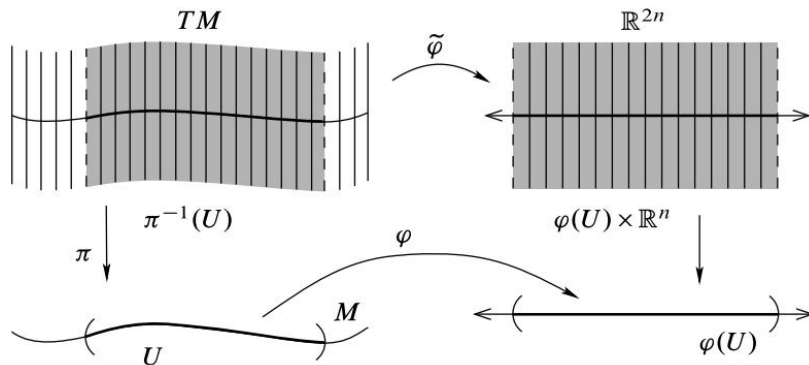


图 3.8: 切丛的坐标

例如, 在特殊情形 $M = \mathbb{R}^n$ 中, 利用命题 3.2, \mathbb{R}^n 的切丛可典范地等同于其几何切空间的并, 而后者正是 \mathbb{R}^n 与自身的笛卡儿积:

$$T\mathbb{R}^n = \coprod_{a \in \mathbb{R}^n} T_a \mathbb{R}^n \cong \coprod_{a \in \mathbb{R}^n} \mathbb{R}^n_a = \coprod_{a \in \mathbb{R}^n} \{a\} \times \mathbb{R}^n = \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n.$$

该笛卡儿积的元素 (a, v) 可看作代表几何切向量 v_a , 或由 (3.1) 定义的导子 $D_v|_a$. 然而需注意, 一般而言, 光滑流形的切丛不能自然地等同于笛卡儿积, 因为不同点处的切空间之间没有典范的等同方式. 下面将深入讨论这一点.

若 M 为光滑流形, 切丛 TM 可简单视为向量空间的不交并, 但其实际结构更为丰富. 下述命题表明, TM 本身可构成光滑流形.

命题 3.18. 对任意光滑 n 维流形 M , 切丛 TM 具有自然的拓扑和光滑结构, 使其成为 $2n$ 维光滑流形. 关于该结构, 投影 $\pi: TM \rightarrow M$ 光滑.

证明. 首先定义将成为光滑坐标卡的映射. 给定 M 的任意光滑坐标卡 (U, φ) , 注意到 $\pi^{-1}(U) \subseteq TM$ 是 U 中各点处切向量的全体. 记 (x^1, \dots, x^n) 为 φ 的坐标函数, 并定义映射 $\tilde{\varphi}: \pi^{-1}(U) \rightarrow \mathbb{R}^{2n}$ 如下:

$$\tilde{\varphi} \left(v^i \frac{\partial}{\partial x^i} \Big|_p \right) = (x^1(p), \dots, x^n(p), v^1, \dots, v^n). \quad (3.13)$$

(见图 3.8.) 其像集为 $\varphi(U) \times \mathbb{R}^n$, 这是 \mathbb{R}^{2n} 的开子集. 它是到其像的双射, 因其逆可显式写成

$$\tilde{\varphi}^{-1} (x^1, \dots, x^n, v^1, \dots, v^n) = v^i \frac{\partial}{\partial x^i} \Big|_{\varphi^{-1}(x)}.$$

现设给定 M 的两个光滑坐标卡 (U, φ) 和 (V, ψ) , 并记 $(\pi^{-1}(U), \tilde{\varphi})$ 、 $(\pi^{-1}(V), \tilde{\psi})$ 为 TM 上相

应的坐标卡. 集合

$$\tilde{\varphi}(\pi^{-1}(U) \cap \pi^{-1}(V)) = \varphi(U \cap V) \times \mathbb{R}^n \quad \text{和}$$

$$\tilde{\psi}(\pi^{-1}(U) \cap \pi^{-1}(V)) = \psi(U \cap V) \times \mathbb{R}^n$$

在 \mathbb{R}^{2n} 中为开集, 且转移映射 $\tilde{\psi} \circ \tilde{\varphi}^{-1}: \varphi(U \cap V) \times \mathbb{R}^n \rightarrow \psi(U \cap V) \times \mathbb{R}^n$ 可利用 (3.12) 显式写成

$$\begin{aligned} & \tilde{\psi} \circ \tilde{\varphi}^{-1}(x^1, \dots, x^n, v^1, \dots, v^n) \\ &= \left(\tilde{x}^1(x), \dots, \tilde{x}^n(x), \frac{\partial \tilde{x}^1}{\partial x^j}(x)v^j, \dots, \frac{\partial \tilde{x}^n}{\partial x^j}(x)v^j \right). \end{aligned}$$

显然光滑.

选取 M 的光滑坐标域可数覆盖 $\{U_i\}$, 可得 TM 的由坐标域 $\{\pi^{-1}(U_i)\}$ 构成的可数覆盖, 满足光滑流形坐标卡引理 (引理 1.35) 的条件 (i)–(iv). 为验证 Hausdorff 条件 (v), 只需注意到 π 的同一纤维中任意两点位于同一坐标卡内, 而若 (p, v) 和 (q, w) 位于不同纤维, 则存在不交的光滑坐标域 U, V 使得 $p \in U$ 且 $q \in V$, 于是 $\pi^{-1}(U)$ 和 $\pi^{-1}(V)$ 分别为包含 (p, v) 和 (q, w) 的不交坐标邻域.

为说明 π 光滑, 注意到关于 M 的坐标卡 (U, φ) 和 TM 的坐标卡 $(\pi^{-1}(U), \tilde{\varphi})$, 坐标表示为 $\pi(x, v) = x$. □

由 (3.13) 给出的坐标 (x^i, v^i) 称为 TM 上的自然坐标.

习题 3.19. 设 M 为带边光滑流形. 证明 TM 具有自然的拓扑和光滑结构, 使其成为带边光滑流形, 且若 $(U, (x^i))$ 为 M 的任意光滑边界坐标卡, 则在 TM 的自然坐标卡 $(\pi^{-1}(U), (x^i, v^i))$ 中重排坐标即得边界坐标卡 $(\pi^{-1}(U), (v^i, x^i))$.

命题 3.20. 若 M 为带边或不带边的光滑 n 维流形, 且 M 可被单个光滑坐标卡覆盖, 则 TM 微分同胚于 $M \times \mathbb{R}^n$.

证明. 若 (U, φ) 为 M 的整体光滑坐标卡, 则 φ 为从 $U = M$ 到开子集 $\hat{U} \subseteq \mathbb{R}^n$ 或 \mathbb{H}^n 的微分同胚. 前一命题的证明表明自然坐标卡 $\tilde{\varphi}$ 是从 TM 到 $\hat{U} \times \mathbb{R}^n$ 的双射, 且 TM 上的光滑结构本质上由声明 $\tilde{\varphi}$ 为微分同胚而定义. □

尽管如图 3.8 所示, 乘积 $U \times \mathbb{R}^n$ 的图像可局部可视化切丛的光滑结构, 但不应误以为每个切丛都整体微分同胚 (甚至同胚) 于流形与 \mathbb{R}^n 的乘积. 对大多数光滑流形而言, 情况并非如此. 第 8、10 和 16 章将重新讨论这一问题.

通过将 F 在 M 各点处的微分聚合, 可得切丛之间的整体映射, 称为**整体微分**或**整体切映射**, 记为 $dF: TM \rightarrow TN$. 该映射在每个切空间 $T_pM \subseteq TM$ 上的限制恰为 dF_p . 将 F 的微分作用于向量 $v \in T_pM$ 时, 可记为 $dF_p(v)$ 或 $dF(v)$, 取决于对点 p 的强调程度. 前者更具信息性, 后者更为简洁.

上述 TM 上定义的光滑结构的一个重要特征是, 它使光滑映射的微分成为切丛间的光滑映射.

命题 3.21. 若 $F: M \rightarrow N$ 为光滑映射, 则其整体微分 $dF: TM \rightarrow TN$ 为光滑映射.

证明. 由 dF_p 在坐标中的局部表达式 (3.9) 可知, dF 关于 TM 和 TN 的自然坐标具有如下坐标表示:

$$dF(x^1, \dots, x^n, v^1, \dots, v^n) = \left(F^1(x), \dots, F^n(x), \frac{\partial F^1}{\partial x^i}(x)v^i, \dots, \frac{\partial F^n}{\partial x^i}(x)v^i \right).$$

因 F 光滑, 故此式光滑. □

整体微分的下述性质由命题 3.6 立得.

推论 3.22 (整体微分的性质). 设 $F: M \rightarrow N$ 和 $G: N \rightarrow P$ 为光滑映射.

- (a) $d(G \circ F) = dG \circ dF$.
- (b) $d(\text{Id}_M) = \text{Id}_{TM}$.
- (c) 若 F 为微分同胚, 则 $dF: TM \rightarrow TN$ 亦为微分同胚, 且 $(dF)^{-1} = d(F^{-1})$.

由于该推论的 (c) 部分, 当 F 为微分同胚时, 可无歧义地使用记号 dF^{-1} 表示 $(dF)^{-1}$ 或 $d(F^{-1})$ 中的任一个.

第 5 节 曲线的速度向量

Euclid 空间 \mathbb{R}^n 中光滑参数化曲线的速度是初等微积分中熟悉的内容. 它就是分量等于曲线的分量函数之导数的向量. 本节将这一概念推广到流形中的曲线.

若 M 是带边或不带边的流形, 定义 M 中的**曲线**为连续映射 $\gamma: J \rightarrow M$, 其中 $J \subseteq \mathbb{R}$ 是一个区间. (大多数情况下, 我们关注定义域为开区间的曲线, 但对于某些目的, 允许 J 有一个或两个端点是有用的; 在这种情况下, 通过将 J 视为带边流形或将导数解释为单侧导数, 定义仍然有效.) 注意, 在本书中, 术语**曲线**总是指从一个区间到 M 的映射 (参数化曲线), 而非仅仅是 M 中的一组点.

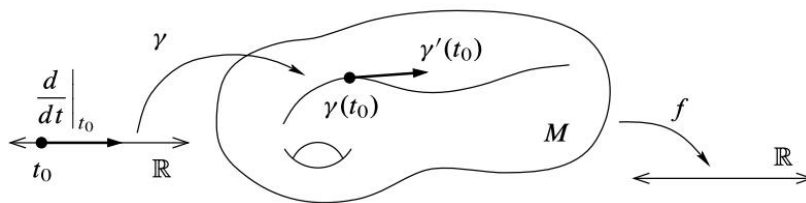


图 3.9: 曲线的速度

现在设 M 是光滑流形, 仍可带边或不带边. 切空间的定义引出了速度向量的自然解释: 给定光滑曲线 $\gamma: J \rightarrow M$ 和 $t_0 \in J$, 定义 γ 在 t_0 处的**速度** (图 3.9), 记为 $\gamma'(t_0)$, 它是向量

$$\gamma'(t_0) = d\gamma \left(\frac{d}{dt} \Big|_{t_0} \right) \in T_{\gamma(t_0)}M,$$

其中 $d/dt|_{t_0}$ 是 $T_{t_0}\mathbb{R}$ 中的标准坐标基向量. (与普通微积分中一样, 当流形是一维时, 习惯上使用 d/dt 而不是 $\partial/\partial t$.) 速度的其他常见记号为

$$\dot{\gamma}(t_0), \quad \frac{d\gamma}{dt}(t_0), \quad \text{以及} \quad \left. \frac{d\gamma}{dt} \right|_{t=t_0}.$$

这个切向量对函数的作用由下式给出

$$\gamma'(t_0)f = d\gamma \left(\left. \frac{d}{dt} \right|_{t_0} \right) f = \left. \frac{d}{dt} \right|_{t_0} (f \circ \gamma) = (f \circ \gamma)'(t_0).$$

换言之, $\gamma'(t_0)$ 是在 $\gamma(t_0)$ 处通过沿 γ 对函数求导而得到的导子. (若 t_0 是 J 的端点, 这仍然成立, 只要将关于 t 的导数解释为单侧导数, 或等价地解释为 $f \circ \gamma$ 到 \mathbb{R} 的某个开子集的任何光滑延拓的导数.)

现在设 (U, φ) 是具有坐标函数 (x^i) 的光滑坐标卡. 若 $\gamma(t_0) \in U$, 可将 γ 的坐标表示写为 $\gamma(t) = (\gamma^1(t), \dots, \gamma^n(t))$, 至少在 t 充分接近 t_0 时成立, 于是微分的坐标公式给出

$$\gamma'(t_0) = \frac{d\gamma^i}{dt}(t_0) \left. \frac{\partial}{\partial x^i} \right|_{\gamma(t_0)}.$$

这意味着 $\gamma'(t_0)$ 本质上由与在 Euclid 空间中相同的公式给出: 它是坐标基中分量等于 γ 的分量函数之导数的切向量.

下面命题表明, 流形上的每个切向量都是某条曲线的速度向量. 这给出了关于切丛的另一种更具几何意义的理解方式: 它就是 M 中所有光滑曲线的速度向量的集合.

命题 3.23. 设 M 是带边或不带边的光滑流形, 且 $p \in M$. 则每个 $v \in T_p M$ 都是 M 中某条光滑曲线的速度.

证明. 首先设 $p \in \text{Int } M$ (这包括 $\partial M = \emptyset$ 的情形). 设 (U, φ) 是以 p 为中心的光滑坐标卡, 并将 v 按坐标基写为 $v = v^i \partial/\partial x^i|_p$. 对于充分小的 $\varepsilon > 0$, 定义曲线 $\gamma: (-\varepsilon, \varepsilon) \rightarrow U$ 的坐标表示如下

$$\gamma(t) = (tv^1, \dots, tv^n). \tag{3.14}$$

(记住, 这实际上是说 $\gamma(t) = \varphi^{-1}(tv^1, \dots, tv^n)$.) 这是一条满足 $\gamma(0) = p$ 的光滑曲线, 且上面的计算表明 $\gamma'(0) = v^i \partial/\partial x^i|_{\gamma(0)} = v$.

现在设 $p \in \partial M$. 设 (U, φ) 是以 p 为中心的光滑边界坐标卡, 并如前将 v 写为 $v = v^i \partial/\partial x^i|_p$. 我们希望将 γ 定义为坐标表示如 (3.14) 的曲线, 但这个公式仅在 $tv^n \geq 0$ 时才表示 M 中的点. 可以通过适当限制 γ 的定义域来满足这一要求: 若 $v^n = 0$, 则如前定义 $\gamma: (-\varepsilon, \varepsilon) \rightarrow U$; 若 $v^n > 0$, 则取定义域为 $[0, \varepsilon)$; 若 $v^n < 0$, 则取定义域为 $(-\varepsilon, 0]$. 在每种情况下, γ 都是 M 中满足 $\gamma(0) = p$ 和

$\gamma'(0) = v$ 的光滑曲线. □

下面命题表明, 速度向量在与光滑映射复合时表现良好.

命题 3.24 (复合曲线的速度). 设 $F: M \rightarrow N$ 是光滑映射, 且 $\gamma: J \rightarrow M$ 是光滑曲线. 则对任意 $t_0 \in J$, 复合曲线 $F \circ \gamma: J \rightarrow N$ 在 $t = t_0$ 处的速度为

$$(F \circ \gamma)'(t_0) = dF(\gamma'(t_0)).$$

证明. 只需回到曲线速度的定义:

$$(F \circ \gamma)'(t_0) = d(F \circ \gamma) \left(\left. \frac{d}{dt} \right|_{t_0} \right) = dF \circ d\gamma \left(\left. \frac{d}{dt} \right|_{t_0} \right) = dF(\gamma'(t_0)). \quad \square$$

表面上, 上述命题告诉我们如何用微分计算复合曲线的速度. 然而, 更有用的是将其反过来, 用它作为计算微分的简洁方式. 设 $F: M \rightarrow N$ 是光滑映射, 需要计算在某点 $p \in M$ 处的微分 dF_p . 对任意 $v \in T_p M$, 通过选取一条初始切向量为 v 的光滑曲线 γ , 然后将命题 3.23 应用于复合曲线 $F \circ \gamma$ 来计算 $dF_p(v)$. 下面推论总结了这一结果.

推论 3.25 (用速度向量计算微分). 设 $F: M \rightarrow N$ 是光滑映射, $p \in M$, 且 $v \in T_p M$. 则

$$dF_p(v) = (F \circ \gamma)'(0)$$

对任意满足 $0 \in J$, $\gamma(0) = p$ 且 $\gamma'(0) = v$ 的光滑曲线 $\gamma: J \rightarrow M$ 成立.

这个推论经常能给出 dF 的更为简洁的计算, 特别是当 F 以某种非显式坐标表示的形式给出时. 后续章节中将看到许多这种技巧的例子.

第 6 节 切空间的其他定义

在文献中, 切向量有多种不同的定义方式. 下面介绍最常见的几种 (另一种定义见习题 11-4 后的注释). 熟悉所有这些定义是有益的. 在本节中, M 表示任意带边或不带边的光滑流形.

作为芽空间导子的切向量

最常见的替代定义基于光滑函数芽的概念, 下面给出其定义.

M 上的**光滑函数元**是一个有序对 (f, U) , 其中 U 是 M 的开子集, $f: U \rightarrow \mathbb{R}$ 是光滑函数. 给定一点 $p \in M$, 在所有定义域包含 p 的光滑函数元集合上定义一个等价关系: 若 f 与 g 在 p 的某

邻域上恒等, 则记 $(f, U) \sim (g, V)$. 函数元 (f, U) 的等价类称为 f 在 p 处的芽. 光滑函数在 p 处的所有芽构成的集合记为 $C_p^\infty(M)$. 该集合在下列运算下构成一个实向量空间和结合代数:

$$\begin{aligned} c[(f, U)] &= [(cf, U)], \\ [(f, U)] + [(g, V)] &= [(f + g, U \cap V)], \\ [(f, U)] [(g, V)] &= [(fg, U \cap V)]. \end{aligned}$$

(该代数的零元是 M 上零函数的等价类.) 将函数元 (f, U) 在 p 处的芽简记为 $[f]_p$; 记号中无需包含定义域 U , 因为将 f 限制到 p 的任意邻域都代表相同的芽. 两个芽 $[f]_p$ 和 $[g]_p$ 相等, 即 f 与 g 在 p 的某邻域 (无论多小) 上恒等.

称满足如下乘积法则 (类似于 (3.4)) 的线性映射 $v: C_p^\infty(M) \rightarrow \mathbb{R}$ 为 $C_p^\infty(M)$ 的一个导子:

$$v[fg]_p = f(p)v[g]_p + g(p)v[f]_p.$$

通常将 M 在 p 处的切空间定义为 $C_p^\infty(M)$ 的导子构成的向量空间 $\mathcal{D}_p M$. 借助命题 3.8, 易证 $\mathcal{D}_p M$ 与这里定义的切空间自然同构 (见习题 3-7).

芽的定义有若干优点. 其中最重要的一点在于, 它使切空间的局部本性更加清晰, 且无需使用隆起函数. 由于不存在解析的隆起函数, 在实解析或复解析流形上, 切向量的芽定义是唯一可用的定义. 芽方法的主要缺点在于, 它为高度抽象的定义增添了额外的复杂性.

作为曲线等价类的切向量

定义切向量的另一种常见方法是对具有相同起点的光滑曲线集合定义一个内蕴的等价关系, 以刻画“具有相同速度”这一概念, 并将切向量定义为曲线的等价类. 下面介绍这样一种等价关系.

设 p 是 M 的一点. 考虑所有形如 $\gamma: J \rightarrow M$ 的光滑曲线, 其中 J 是包含 0 的区间且 $\gamma(0) = p$. 给定两条这样的曲线 $\gamma_1: J_1 \rightarrow M$ 和 $\gamma_2: J_2 \rightarrow M$, 若对定义在 p 某邻域上的每个光滑实值函数 f 都有 $(f \circ \gamma_1)'(0) = (f \circ \gamma_2)'(0)$, 则称 $\gamma_1 \sim \gamma_2$. 记等价类的集合为 $\mathcal{V}_p M$. 切空间常被定义为集合 $\mathcal{V}_p M$.

使用这一定义, 易定义光滑映射 $F: M \rightarrow N$ 的微分: 它将 $[\gamma] \in \mathcal{V}_p M$ 映到 $[F \circ \gamma] \in \mathcal{V}_{F(p)} N$. 光滑曲线的速度向量也同样易定义. 设 $\gamma: J \rightarrow M$ 是任意光滑曲线. 若 $0 \in J$, 则 γ 在 0 处的速度就是 γ 在 $\mathcal{V}_{\gamma(0)} M$ 中的等价类. 任意其他点 $t_0 \in J$ 处的速度定义为曲线 γ_{t_0} 在 $\mathcal{V}_{\gamma(t_0)} M$ 中的等价类, 其中 γ_{t_0} 由 $\gamma_{t_0}(t) = \gamma(t_0 + t)$ 给出.

习题 3-8 表明, $\mathcal{V}_p M$ 与 $T_p M$ 之间存在自然的一一对应. 这一定义的优点在于几何上更加直观, 但它有一个严重缺陷: $\mathcal{V}_p M$ 上向量空间结构的存在性并不明显.

作为 n -元组等价类的切向量

还有一种定义切空间的方法是基于切向量分量的坐标变换法则 (3.12). 将 $p \in M$ 处的切向量定义为: 对每个包含 p 的光滑坐标卡指定一个有序 n -元组 $(v^1, \dots, v^n) \in \mathbb{R}^n$, 且要求对重叠的坐标卡指定的 n -元组按 (3.12) 变换. (事实上, 这是最古老的定义, 许多物理学家至今仍倾向于这样理解切向量.)

在这种方法中, 曲线的速度用坐标下的通常 Euclid 公式定义, 而 $F: M \rightarrow N$ 的微分则定义为坐标下 F 的 Jacobi 矩阵所确定的线性映射. 之后需通过繁琐的链式法则计算来证明这些运算是良定义的, 与坐标的选择无关.

选择哪种 $T_p M$ 的特征描述作为定义, 是个人偏好. 然而, 这里所选择的定义尽管初看起来很抽象, 却有若干优点: 它相对具体 (切向量是 $C^\infty(M)$ 的实际的导子, 不涉及等价类); 它使 $T_p M$ 上的向量空间结构显而易见; 它导出了微分、速度以及后续将要研究的许多其他几何对象的简洁的坐标无关定义.

第 7 节 范畴与函子

范畴论为切空间和微分提供了另一个有用的视角. 本节总结范畴论的基本定义. 本书不准备对这一理论作过多展开, 但提及它是因为它为讨论遇到的许多数学结构提供了一种方便而有力的语言.

一个范畴 C 由以下要素组成:

一个类 $\text{Ob}(C)$, 其元素称为 C 的**对象**;

一个类 $\text{Hom}(C)$, 其元素称为 C 的**态射**;

对每个态射 $f \in \text{Hom}(C)$, 两个对象 $X, Y \in \text{Ob}(C)$ 分别称为 f 的**源**和**靶**;

对每组三元组 $X, Y, Z \in \text{Ob}(C)$, 一个称为**复合**的映射:

$$\text{Hom}_C(X, Y) \times \text{Hom}_C(Y, Z) \rightarrow \text{Hom}_C(X, Z),$$

记作 $(f, g) \mapsto g \circ f$, 其中 $\text{Hom}_C(X, Y)$ 表示所有以 X 为源、 Y 为靶的态射构成的类.

这些态射需要满足以下公理:

(i) **结合律**: $(f \circ g) \circ h = f \circ (g \circ h)$;

(ii) **单位态射的存在性**: 对每个对象 $X \in \text{Ob}(C)$, 存在一个单位态射 $\text{Id}_X \in \text{Hom}_C(X, X)$, 使得对所有的 $f \in \text{Hom}_C(X, Y)$ 都有 $\text{Id}_Y \circ f = f = f \circ \text{Id}_X$.

一个态射 $f \in \text{Hom}_C(X, Y)$ 如果存在态射 $g \in \text{Hom}_C(Y, X)$ 使得 $f \circ g = \text{Id}_Y$ 且 $g \circ f = \text{Id}_X$, 则称 f 为 C 中的**同构**.

例 3.26 (范畴). 在自然界中遇到的大多数范畴里, 对象是带有某种额外结构的集合, 态射是保持该结构的映射, 而复合律和单位态射都是显然的. 下面列出本书中 (隐含或明确地) 出现的一些这

类范畴. 在每种情况下, 通过给出其对象和态射来描述该范畴.

Set: 集合与映射

Top: 拓扑空间与连续映射

Man: 拓扑流形与连续映射

Man_b: 带边拓扑流形与连续映射

Diff: 光滑流形与光滑映射

Diff_b: 光滑带边流形与光滑映射

Vec_ℝ: 实向量空间与实线性映射

Vec_ℂ: 复向量空间与复线性映射

Grp: 群与群同态

Ab: *Abel* 群与群同态

Rng: 环与环同态

CRng: 交换环与环同态

还有一些重要的范畴, 其对象是带有指定基点 (可能还有其他结构) 的集合. **带基点集合**是指有序对 (X, p) , 其中 X 是一个集合, p 是 X 的一个元素. 其他带基点的对象, 如**带基点拓扑空间**或**带基点光滑流形**, 也类似定义. 如果 (X, p) 和 (X', p') 是带基点集合 (或拓扑空间等), 映射 $F: X \rightarrow X'$ 若满足 $F(p) = p'$, 则称为**带基点映射**; 此时记作 $F: (X, p) \rightarrow (X', p')$. 下面是一些带基点对象范畴的重要例子.

Set_{*}: 带基点集合与带基点映射

Top_{*}: 带基点拓扑空间与带基点连续映射

Man_{*}: 带基点拓扑流形与带基点连续映射

Diff_{*}: 带基点光滑流形与带基点光滑映射

用“类”而非“集合”来表示范畴中对象和态射的汇集, 是因为在某些范畴中它们“太大”而不能被视为集合. 例如在范畴 Set 中, $\text{Ob}(\text{Set})$ 是所有集合构成的类; 任何试图将其本身当作集合来处理的做法都会导致集合论中著名的 Russell 悖论 (详见 [LeeTM, 附录 A] 或几乎任何一本集合论教材). 即使对象和态射的类不构成集合, 仍然可以使用诸如 $X \in \text{Ob}(\mathcal{C})$ 和 $f \in \text{Hom}(\mathcal{C})$ 这样的记号来表示 X 是 \mathcal{C} 中的对象, f 是 \mathcal{C} 中的态射. 若 $\text{Ob}(\mathcal{C})$ 和 $\text{Hom}(\mathcal{C})$ 都是集合, 则称该范畴为**小范畴**; 若每个态射类 $\text{Hom}_{\mathcal{C}}(X, Y)$ 都是集合, 则称该范畴为**局部小的**. 上面列出的所有范畴都是局部小的, 但不是小范畴.

如果 \mathcal{C} 和 \mathcal{D} 是范畴, 从 \mathcal{C} 到 \mathcal{D} 的**协变函子**是一个规则 \mathcal{F} , 它为每个对象 $X \in \text{Ob}(\mathcal{C})$ 指定一个对象 $\mathcal{F}(X) \in \text{Ob}(\mathcal{D})$, 并为每个态射 $f \in \text{Hom}_{\mathcal{C}}(X, Y)$ 指定一个态射 $\mathcal{F}(f) \in \text{Hom}_{\mathcal{D}}(\mathcal{F}(X), \mathcal{F}(Y))$, 使得单位态射和复合都被保持:

$$\mathcal{F}(\text{Id}_X) = \text{Id}_{\mathcal{F}(X)}; \quad \mathcal{F}(g \circ h) = \mathcal{F}(g) \circ \mathcal{F}(h).$$

还需要考虑反转态射的函子: 从 C 到 D 的**反变函子**是一个规则 \mathcal{F} , 它为每个对象 $X \in \text{Ob}(C)$ 指定一个对象 $\mathcal{F}(X) \in \text{Ob}(D)$, 并为每个态射 $f \in \text{Hom}_C(X, Y)$ 指定一个态射 $\mathcal{F}(f) \in \text{Hom}_D(\mathcal{F}(Y), \mathcal{F}(X))$, 使得

$$\mathcal{F}(\text{Id}_X) = \text{Id}_{\mathcal{F}(X)}; \quad \mathcal{F}(g \circ h) = \mathcal{F}(h) \circ \mathcal{F}(g).$$

习题 3.27. 证明任何 (协变或反变) 函子从 C 到 D 都将 C 中的同构映到 D 中的同构.

协变函子的一个平凡例子是从任意范畴到其自身的**恒等函子**: 它将每个对象和每个态射映到自身. 另一个例子是**遗忘函子**: 若 C 是一个范畴, 其对象是带有某种额外结构的集合, 其态射是保持该结构的映射 (例 3.26 第一部分中列出的所有范畴, 除了 Set 本身, 都属于这种情况), 则遗忘函子 $\mathcal{F}: C \rightarrow \text{Set}$ 将每个对象映到其底层集合, 将每个态射映到作为集合间映射的同一个映射.

将“不变量”与数学对象类相关联时, 会出现更有趣的函子. 例如, 基本群是从 Top_* 到 Grp 的协变函子. 习题 2-10 的结果表明, 存在一个从 Diff 到 $\text{Vec}_{\mathbb{R}}$ 的反变函子, 它将每个光滑流形 M 映到向量空间 $C^\infty(M)$, 将每个光滑映射 $F: M \rightarrow N$ 映到线性映射 $F^*: C^\infty(N) \rightarrow C^\infty(M)$, 后者由 $F^*(f) = f \circ F$ 定义.

本章的讨论给出了函子的其他一些重要例子. 首先, **切空间函子**是从带基点光滑流形范畴 Diff_* 到实向量空间范畴 $\text{Vec}_{\mathbb{R}}$ 的协变函子. 它为每个带基点光滑流形 (M, p) 指定切空间 $T_p M$; 为每个带基点光滑映射 $F: (M, p) \rightarrow (N, F(p))$ 指定微分 dF_p . 这构成一个函子的事实正是命题 3.6 中 (b) 和 (c) 两部分的结论.

类似地, 可以将对应关系 $M \mapsto TM$ 和 $F \mapsto dF$ (将每个光滑流形映到其切丛, 将每个光滑映射映到其整体微分) 视为从 Diff 到自身的协变函子, 称为**切函子**.

第 8 节 习题

习题 3-1. 设 M 和 N 是带边或不带边的光滑流形, $F: M \rightarrow N$ 是光滑映射. 证明 $dF_p: T_p M \rightarrow T_{F(p)} N$ 在每个 $p \in M$ 处都是零映射当且仅当 F 在每个连通分支上为常值映射.

习题 3-2. 证明命题 3.14 (乘积流形的切空间).

习题 3-3. 证明若 M 和 N 是光滑流形, 则 $T(M \times N)$ 与 $TM \times TN$ 微分同胚.

习题 3-4. 证明 TS^1 与 $S^1 \times \mathbb{R}$ 微分同胚.

习题 3-5. 记 $S^1 \subseteq \mathbb{R}^2$ 为单位圆周, $K \subseteq \mathbb{R}^2$ 为以原点为中心、边长为 2 的正方形的边界: $K = \{(x, y) : \max(|x|, |y|) = 1\}$. 证明存在同胚 $F: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ 使得 $F(S^1) = K$, 但不存在具有此性质的微分同胚. [提示: 设 γ 为像集落在 S^1 中的光滑曲线, 考虑 $dF(\gamma'(t))$ 对坐标函数 x 和 y 的作用.] (用于第 123 页.)

习题 3-6. 在通常的等同 $\mathbb{C}^2 \cong \mathbb{R}^4$ 下, 将 S^3 看作 \mathbb{C}^2 中的单位球面. 对每个 $z = (z^1, z^2) \in S^3$, 定义曲线 $\gamma_z: \mathbb{R} \rightarrow S^3$ 为 $\gamma_z(t) = (e^{it} z^1, e^{it} z^2)$. 证明 γ_z 是光滑曲线且其速度恒不为零.

习题 3-7. 设 M 是带边或不带边的光滑流形, p 为 M 中一点. 记 $C_p^\infty(M)$ 为 p 处光滑实值函数的芽代数, $\mathcal{D}_p M$ 为 $C_p^\infty(M)$ 的导子空间. 定义映射 $\phi: \mathcal{D}_p M \rightarrow T_p M$ 为 $(\phi v)f = v([f]_p)$. 证明 ϕ 为同构. (用于第 71 页.)

习题 3-8. 设 M 是带边或不带边的光滑流形, $p \in M$. 记 $\mathcal{V}_p M$ 为从 p 出发的光滑曲线在等价关系 $\gamma_1 \sim \gamma_2$ 下的等价类集合, 其中等价关系满足: 对 p 的某邻域上定义的所有光滑实值函数 f , 都有 $(f \circ \gamma_1)'(0) = (f \circ \gamma_2)'(0)$. 证明映射 $\psi: \mathcal{V}_p M \rightarrow T_p M$ 定义为 $\psi[\gamma] = \gamma'(0)$ 是良定义的, 且为双射. (用于第 72 页.)

第四章

淹没、浸入与嵌入

光滑映射的微分表示该映射在给定点附近的“最佳线性近似”。因此,通过研究其微分的线性代数性质,我们可以了解该映射的诸多性质.微分最本质的性质——事实上,几乎是唯一可以不依赖于基的选择而定义的性质——是它的**秩**(即其像的维数)。

本章详细研究从微分中探测光滑映射几何性质的各种方法.那些微分能够提供良好局部模型的映射,恰好就是具有**常秩**的映射.这类映射中有三类起着特殊的作用:**光滑淹没**(其微分处处是满射)、**光滑浸入**(其微分处处是单射)以及**光滑嵌入**(是单射的光滑浸入,同时还是到其像上的同胚).光滑浸入与嵌入,正如将在下一章中看到的,是子流形理论的重要组成部分;而光滑淹没在光滑流形理论中所起的作用,与商映射在拓扑学中所起的作用密切相关。

推动这一讨论的核心是**秩定理**,它是反函数定理的一个推论.本章第一节证明秩定理及其一些重要推论.然后更深入地探讨光滑嵌入和光滑淹没,并将该理论应用于一类特别有用的光滑淹没,即**光滑覆叠映射**。

第 1 节 常秩映射

线性映射的关键代数性质是其**秩**.事实上,如定理 B.20 所示,若能为定义域和到达域独立地选取基,则秩是区分不同线性映射的唯一性质。

假设 M 和 N 是带边或不带边的光滑流形.给定光滑映射 $F: M \rightarrow N$ 和点 $p \in M$,定义 F 在 p 处的**秩**为线性映射 $dF_p: T_p M \rightarrow T_{F(p)} N$ 的秩.它在任意光滑坐标卡下是 F 的 Jacobi 矩阵的秩,也等于 $\text{Im } dF_p \subseteq T_{F(p)} N$ 的维数.若 F 在每一点的秩均为 r ,则称其具有**常秩**,并记 $\text{rank } F = r$ 。

因线性映射的秩不会超过其定义域或到达域的维数(习题 B.22),故 F 在每一点的秩都以 $\min\{\dim M, \dim N\}$ 为上界.若 dF_p 的秩等于该上界,则称 F 在 p 处**满秩**.若 F 处处满秩,则称 F **满秩**。

最重要的常秩映射是满秩映射. 光滑映射 $F: M \rightarrow N$ 称为**光滑淹没**, 若其微分在每一点都是满射 (或等价地, $\text{rank } F = \dim N$). 称为**光滑浸入**, 若其微分在每一点都是单射 (等价地, $\text{rank } F = \dim M$).

命题 4.1. 假设 $F: M \rightarrow N$ 是光滑映射且 $p \in M$. 若 dF_p 是满射, 则 p 存在邻域 U 使得 $F|_U$ 是淹没. 若 dF_p 是单射, 则 p 存在邻域 U 使得 $F|_U$ 是浸入.

证明. 任取 M 在 p 附近和 N 在 $F(p)$ 附近的光滑坐标, 任一假设都意味着 F 在坐标下的 Jacobi 矩阵在 p 处满秩. 例 1.28 表明满秩 $m \times n$ 矩阵的集合是 $\mathbf{M}(m \times n, \mathbb{R})$ 的开子集 (其中 $m = \dim M$, $n = \dim N$). 故由连续性, F 的 Jacobi 矩阵在 p 的某邻域内满秩. \square

如本章所见, 光滑淹没和浸入分别表现得像满射和单射线性映射. (也存在拓扑淹没和拓扑浸入的类似概念, 适用于仅仅是连续的映射. 此处不需要使用这些概念, 但为了完整性, 仍将在本章后面予以描述.)

例 (淹没与浸入). (a) 设 M_1, \dots, M_k 是光滑流形. 则每个投影映射 $\pi_i: M_1 \times \dots \times M_k \rightarrow M_i$ 都是光滑淹没. 特别地, 投影 $\pi: \mathbb{R}^{n+k} \rightarrow \mathbb{R}^n$ 到前 n 个坐标是光滑淹没.

(b) 设 $\gamma: J \rightarrow M$ 是带边或不带边的光滑流形 M 中的光滑曲线, 则 γ 是光滑浸入当且仅当 $\gamma'(t) \neq 0$ 对所有 $t \in J$ 成立.

(c) 设 M 是光滑流形, 其切丛 TM 具有命题 3.18 中描述的光滑流形结构, 则投影 $\pi: TM \rightarrow M$ 是光滑淹没. 为验证这一点, 只需注意, 关于 M 的开子集 $U \subseteq M$ 上的任意光滑局部坐标 (x^i) 和 TM 的 $\pi^{-1}(U) \subseteq TM$ 上相应的自然坐标 (x^i, v^i) (见命题 3.18), π 的坐标表示为 $\hat{\pi}(x, v) = x$.

(d) 由

$$X(u, v) = ((2 + \cos 2\pi u) \cos 2\pi v, (2 + \cos 2\pi u) \sin 2\pi v, \sin 2\pi u)$$

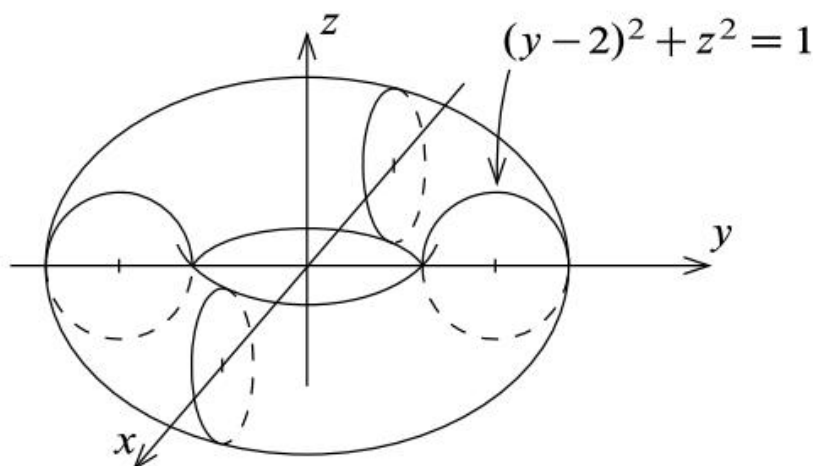
给出的光滑映射 $X: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$ 是 \mathbb{R}^2 到 \mathbb{R}^3 的光滑浸入, 其像是通过将 (y, z) -平面上的圆 $(y-2)^2 + z^2 = 1$ 绕 z -轴旋转得到的环面状曲面 (图 4.1).

习题 4.3. 验证上例中的断言.

习题 4.4. 证明光滑淹没的复合是光滑淹没, 光滑浸入的复合是光滑浸入. 举例说明常秩映射的复合不必具有常秩.

局部微分同胚

设 M 和 N 是带边或不带边的光滑流形, 映射 $F: M \rightarrow N$ 称为**局部微分同胚**, 若每一点 $p \in M$ 都存在邻域 U 使得 $F(U)$ 在 N 中开且 $F|_U: U \rightarrow F(U)$ 是微分同胚. 下一定理是局部微分同胚最重要性质的关键.

图 4.1: \mathbb{R}^3 中的旋转环面

定理 4.5 (流形的反函数定理). 设 M 和 N 是光滑流形, $F: M \rightarrow N$ 是光滑映射. 若 $p \in M$ 是使得 dF_p 可逆的点, 则存在连通的邻域 U_0 和 V_0 分别包含 p 和 $F(p)$, 使得 $F|_{U_0}: U_0 \rightarrow V_0$ 是微分同胚.

证明. dF_p 是双射这一事实意味着 M 和 N 具有相同的维数, 设为 n . 选取以 p 为中心的光滑坐标卡 (U, φ) 和以 $F(p)$ 为中心的光滑坐标卡 (V, ψ) , 满足 $F(U) \subseteq V$. 那么 $\hat{F} = \psi \circ F \circ \varphi^{-1}$ 是从开子集 $\hat{U} = \varphi(U) \subseteq \mathbb{R}^n$ 到 $\hat{V} = \psi(V) \subseteq \mathbb{R}^n$ 的光滑映射, 且 $\hat{F}(p) = 0$. 因 φ 和 ψ 是微分同胚, 微分 $d\hat{F}_0 = d\psi_{F(p)} \circ dF_p \circ d(\varphi^{-1})_0$ 是非奇异的. 普通反函数定理 (定理 C.34) 表明存在包含 0 的连通开子集 $\hat{U}_0 \subseteq \hat{U}$ 和 $\hat{V}_0 \subseteq \hat{V}$ 使得 \hat{F} 限制为从 \hat{U}_0 到 \hat{V}_0 的微分同胚. 那么 $U_0 = \varphi^{-1}(\hat{U}_0)$ 和 $V_0 = \psi^{-1}(\hat{V}_0)$ 分别是 p 和 $F(p)$ 的连通邻域, 且由复合可知 $F|_{U_0}$ 是从 U_0 到 V_0 的微分同胚. \square

需注意, 上述定理仅对无边流形陈述. 事实上, 对于定义域具有非空边界的映射, 它可能失效 (见问题 4-1). 然而, 当到达域具有非空边界时, 仍有一些有用的结论: 只要映射取值为到达域的内部, 相同的结论就成立, 因为内部是一个无边光滑流形. 问题 4-2 表明, 在微分可逆的点处总是这种情况.

命题 4.6 (局部微分同胚的基本性质). (a) 局部微分同胚的复合仍是局部微分同胚.

(b) 光滑流形之间局部微分同胚的有限乘积仍是局部微分同胚.

(c) 每个局部微分同胚都是局部同胚和开映射.

(d) 局部微分同胚到带边或不带边开子流形的限制仍是局部微分同胚.

(e) 每个微分同胚都是局部微分同胚.

(f) 每个双射局部微分同胚都是微分同胚.

(g) 带边或不带边光滑流形之间的映射是局部微分同胚当且仅当在其定义域的每一点的邻域内, 它具有局部微分同胚的坐标表示.

习题 4.7. 证明上述命题.

命题 4.8. 设 M 和 N 是光滑流形 (不带边界), $F: M \rightarrow N$ 是映射.

- (a) F 是局部微分同胚当且仅当它既是光滑浸入又是光滑淹没.
 (b) 若 $\dim M = \dim N$ 且 F 是光滑浸入或光滑淹没, 则它是局部微分同胚.

证明. 首先假设 F 是局部微分同胚. 给定 $p \in M$, 存在 p 的邻域 U 使得 F 是从 U 到 $F(U)$ 的微分同胚. 则由命题 3.6(d) 可知 $dF_p: T_p M \rightarrow T_{F(p)} N$ 是同构. 因此 $\text{rank } F = \dim M = \dim N$, 故 F 既是光滑浸入又是光滑淹没. 反之, 若 F 既是光滑浸入又是光滑淹没, 则 dF_p 在每一点 $p \in M$ 都是同构. 流形的反函数定理 (定理 4.5) 表明 p 存在邻域使得 F 限制在其上是到其像的微分同胚. 这证明了 (a).

为证明 (b), 注意若 M 和 N 具有相同的维数, 则 dF_p 的单射性或满射性都意味着双射性, 故 F 是光滑淹没当且仅当它是光滑浸入, 因此 (b) 由 (a) 得出. \square

习题 4.9. 证明若允许 N 是带边光滑流形, 命题 4.8 的结论仍然成立, 但若 M 是带边光滑流形则不然. (见问题 4-1 和 4-2.)

习题 4.10. 设 M, N, P 是带边或不带边的光滑流形, $F: M \rightarrow N$ 是局部微分同胚. 证明下列结论:

- (a) 若 $G: P \rightarrow M$ 连续, 则 G 光滑当且仅当 $F \circ G$ 光滑.
 (b) 此外若 F 满射且 $G: N \rightarrow P$ 是任意映射, 则 G 光滑当且仅当 $G \circ F$ 光滑.

例 (局部微分同胚). 例 2.13(b) 中定义的映射 $\varepsilon: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{S}^1$ 是局部微分同胚, 因为在每一点的邻域内它具有形式 $t \mapsto 2\pi t + c$ 的坐标表示, 这是一个局部微分同胚. 类似地, 例 2.13(c) 中定义的映射 $\varepsilon^n: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{T}^n$ 是局部微分同胚, 因为它是局部微分同胚的乘积.

在本章末尾, 将探讨局部微分同胚的一个重要特殊类, 即光滑覆叠映射.

秩定理

关于常秩映射最重要的事实是反函数定理的以下推论, 它表明常秩光滑映射可以通过坐标变换局部地化为特别简单的典范形式. 它是定理 B.20 中给出的线性映射典范形式定理的非线性版本.

定理 4.12 (秩定理). 设 M 和 N 分别是维数为 m 和 n 的光滑流形, $F: M \rightarrow N$ 是常秩 r 的光滑映射. 对每个 $p \in M$, 存在以 p 为中心的 M 的光滑坐标卡 (U, φ) 和以 $F(p)$ 为中心的 N 的光滑坐标卡 (V, ψ) 使得 $F(U) \subseteq V$, 在其中 F 具有如下形式的坐标表示:

$$\widehat{F}(x^1, \dots, x^r, x^{r+1}, \dots, x^m) = (x^1, \dots, x^r, 0, \dots, 0). \quad (4.1)$$

特别地, 若 F 是光滑淹没, 则变为

$$\widehat{F}(x^1, \dots, x^n, x^{n+1}, \dots, x^m) = (x^1, \dots, x^n), \quad (4.2)$$

若 F 是光滑浸入, 则为

$$\widehat{F}(x^1, \dots, x^m) = (x^1, \dots, x^m, 0, \dots, 0). \quad (4.3)$$

证明. 因定理是局部的, 选取光滑坐标后可以用开子集 $U \subseteq \mathbb{R}^m$ 和 $V \subseteq \mathbb{R}^n$ 代替 M 和 N . $DF(p)$ 的秩为 r 意味着其矩阵有一个 $r \times r$ 子矩阵行列式非零. 通过重排坐标, 可以假设它是左上子矩阵 $(\partial F^i / \partial x^j)$, $i, j = 1, \dots, r$. 将标准坐标重新标记为 \mathbb{R}^m 中的 $(x, y) = (x^1, \dots, x^r, y^1, \dots, y^{m-r})$ 和 \mathbb{R}^n 中的 $(v, w) = (v^1, \dots, v^r, w^1, \dots, w^{n-r})$. 通过坐标的初始平移, 可以不失一般性地假设 $p = (0, 0)$ 且 $F(p) = (0, 0)$. 若写 $F(x, y) = (Q(x, y), R(x, y))$, 其中 $Q: U \rightarrow \mathbb{R}^r$ 和 $R: U \rightarrow \mathbb{R}^{n-r}$ 是某光滑映射, 则假设是 $(\partial Q^i / \partial x^j)$ 在 $(0, 0)$ 处非奇异.

定义 $\varphi: U \rightarrow \mathbb{R}^m$ 为 $\varphi(x, y) = (Q(x, y), y)$. 它在 $(0, 0)$ 处的全导数为

$$D\varphi(0, 0) = \begin{pmatrix} \frac{\partial Q^i}{\partial x^j}(0, 0) & \frac{\partial Q^i}{\partial y^j}(0, 0) \\ 0 & \delta_j^i \end{pmatrix},$$

其中使用了以下标准记号: 对正整数 i 和 j , 符号 δ_j^i , 称为 **Kronecker delta**, 定义为

$$\delta_j^i = \begin{cases} 1 & \text{若 } i = j, \\ 0 & \text{若 } i \neq j. \end{cases} \quad (4.4)$$

矩阵 $D\varphi(0, 0)$ 由假设非奇异. 因此, 由反函数定理, 存在 $(0, 0)$ 的连通邻域 U_0 和 $\varphi(0, 0) = (0, 0)$ 的连通邻域 \tilde{U}_0 使得 $\varphi: U_0 \rightarrow \tilde{U}_0$ 是微分同胚. 通过必要时缩小 U_0 和 \tilde{U}_0 , 可以假设 \tilde{U}_0 是开方体. 将逆映射写为 $\varphi^{-1}(x, y) = (A(x, y), B(x, y))$, 其中 $A: \tilde{U}_0 \rightarrow \mathbb{R}^r$ 和 $B: \tilde{U}_0 \rightarrow \mathbb{R}^{m-r}$ 是某光滑函数, 计算得

$$(x, y) = \varphi(A(x, y), B(x, y)) = (Q(A(x, y), B(x, y)), B(x, y)). \quad (4.5)$$

比较 y 分量表明 $B(x, y) = y$, 因此 φ^{-1} 具有形式

$$\varphi^{-1}(x, y) = (A(x, y), y).$$

另一方面, $\varphi \circ \varphi^{-1} = \text{Id}$ 意味着 $Q(A(x, y), y) = x$, 因此 $F \circ \varphi^{-1}$ 具有形式

$$F \circ \varphi^{-1}(x, y) = (x, \tilde{R}(x, y)),$$

其中 $\tilde{R}: \tilde{U}_0 \rightarrow \mathbb{R}^{n-r}$ 由 $\tilde{R}(x, y) = R(A(x, y), y)$ 定义. 该复合映射在任意点 $(x, y) \in \tilde{U}_0$ 的 Jacobi 矩阵为

$$D(F \circ \varphi^{-1})(x, y) = \begin{pmatrix} \delta_j^i & 0 \\ \frac{\partial \tilde{R}^i}{\partial x^j}(x, y) & \frac{\partial \tilde{R}^i}{\partial y^j}(x, y) \end{pmatrix}.$$

因与微分同胚复合不改变映射的秩, 该矩阵在 \tilde{U}_0 中处处秩为 r . 前 r 列显然是线性无关的, 故秩能为 r 仅当偏导数 $\partial \tilde{R}^i / \partial y^j$ 在 \tilde{U}_0 上恒为零, 这意味着 \tilde{R} 实际上与 (y^1, \dots, y^{m-r}) 无关. (这就是安排 \tilde{U}_0 为方体的原因之一.) 因此, 若令 $S(x) = \tilde{R}(x, 0)$, 则有

$$F \circ \varphi^{-1}(x, y) = (x, S(x)). \quad (4.6)$$

为完成证明, 需要在 $(0, 0) \in V$ 的某邻域内定义适当的光滑坐标卡. 令 $V_0 \subseteq V$ 为开子集, 由 $V_0 = \{(v, w) \in V : (v, 0) \in \tilde{U}_0\}$ 定义. 则 V_0 是 $(0, 0)$ 的邻域. 因 \tilde{U}_0 是方体且 $F \circ \varphi^{-1}$ 具有形式 (4.6), 可知 $F \circ \varphi^{-1}(\tilde{U}_0) \subseteq V_0$, 因此 $F(U_0) \subseteq V_0$. 定义 $\psi: V_0 \rightarrow \mathbb{R}^n$ 为 $\psi(v, w) = (v, w - S(v))$. 这是到其像的微分同胚, 因为其逆由 $\psi^{-1}(s, t) = (s, t + S(s))$ 显式给出; 因此 (V_0, ψ) 是光滑坐标卡. 由 (4.6) 可得

$$\psi \circ F \circ \varphi^{-1}(x, y) = \psi(x, S(x)) = (x, S(x) - S(x)) = (x, 0),$$

这就是要证明的. □

下述推论可以看作秩定理的一个更不变的陈述. 它说常秩映射正是那些局部行为与其微分相同的映射.

推论 4.13. 设 M 和 N 是光滑流形, $F: M \rightarrow N$ 是光滑映射, 假设 M 连通. 则下列等价:

- (a) 对每个 $p \in M$, 存在包含 p 和 $F(p)$ 的光滑坐标卡使得 F 的坐标表示是线性的.
- (b) F 有常秩.

证明. 首先假设 F 在每一点的邻域内都有线性坐标表示. 因每个线性映射都有常秩, 故 F 的秩在每一点的邻域内是常数, 因此由连通性它在整个 M 上是常数. 反之, 若 F 有常秩, 秩定理表明它在每一点的邻域内都有线性坐标表示 (4.1). □

秩定理是一个纯局部的陈述. 然而, 它有如下强有力的整体推论.

定理 4.14 (整体秩定理). 设 M 和 N 是光滑流形, 假设 $F: M \rightarrow N$ 是常秩光滑映射.

- (a) 若 F 满射, 则它是光滑淹没.
- (b) 若 F 单射, 则它是光滑浸入.
- (c) 若 F 双射, 则它是微分同胚.

证明. 令 $m = \dim M$, $n = \dim N$, 假设 F 有常秩 r . 为证明 (a), 假设 F 不是光滑淹没, 这意味着 $r < n$. 由秩定理, 对每个 $p \in M$ 存在以 p 为中心的 M 的光滑坐标卡 (U, φ) 和以 $F(p)$ 为中心的 N 的光滑坐标卡 (V, ψ) 使得 $F(U) \subseteq V$ 且 F 的坐标表示由 (4.1) 给出. (见图 4.2.) 必要时缩小 U , 可以假设它是正则坐标球且 $F(\bar{U}) \subseteq \bar{V}$. 这意味着 $F(\bar{U})$ 是集合 $\{y \in V : y^{r+1} = \dots = y^n = 0\}$ 的紧子集, 故它在 N 中是闭集且不包含 N 的任何开子集; 因此它在 N 中无处稠密. 因流形的每个开覆盖都有可数子覆盖, 可以选取可数多个这样的坐标卡 $\{(U_i, \varphi_i)\}$ 覆盖 M , 相应的坐标卡 $\{(V_i, \psi_i)\}$ 覆

盖 $F(M)$. 因 $F(M)$ 等于无处稠密集 $F(\overline{U}_i)$ 的可数并, 由 Baire 范畴定理 (定理 A.58) 可知 $F(M)$ 在 N 中有空内部, 这意味着 F 不能是满射.

为证明 (b), 假设 F 不是光滑浸入, 故 $r < m$. 由秩定理, 对每个 $p \in M$ 可以选取 p 和 $F(p)$ 的邻域上的坐标卡使得 F 具有坐标表示 (4.1). 由此可得对任意充分小的 ε 有 $F(0, \dots, 0, \varepsilon) = F(0, \dots, 0, 0)$, 故 F 不是单射.

最后, (c) 由 (a) 和 (b) 得出, 因双射常秩光滑映射由 (a) 部分是光滑淹没, 由 (b) 部分是光滑浸入; 故命题 4.8 意味着 F 是局部微分同胚, 又因它是双射, 所以它是微分同胚. \square

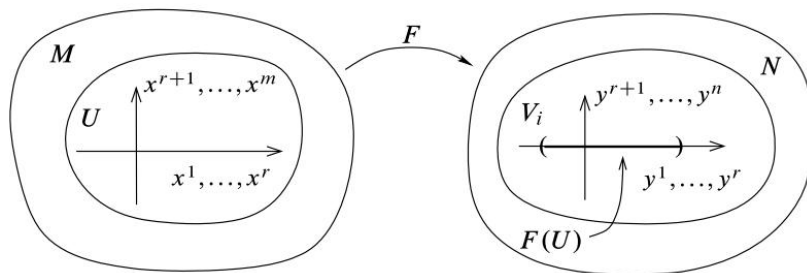


图 4.2: 定理 4.14(a) 的证明

带边流形的秩定理

在带边流形的背景下, 只需要一个特殊情况秩定理: 即定义域是带边光滑流形的光滑浸入的情况. 当然, 因带边光滑流形的内部是光滑流形, 在定义域的任何内点附近普通秩定理都适用. 对于边界点, 有如下秩定理的替代形式.

定理 4.15 (带边流形的局部浸入定理). 设 M 是 m 维带边光滑流形, N 是 n 维光滑流形, $F: M \rightarrow N$ 是光滑浸入. 对任意 $p \in \partial M$, 存在以 p 为中心的 M 的光滑边界坐标卡 (U, φ) 和以 $F(p)$ 为中心的 N 的光滑坐标卡 (V, ψ) 使得 $F(U) \subseteq V$, 在其中 F 具有坐标表示

$$\widehat{F}(x^1, \dots, x^m) = (x^1, \dots, x^m, 0, \dots, 0). \tag{4.7}$$

证明. 通过为 M 和 N 选取初始光滑坐标卡, 可以假设 M 和 N 分别是 \mathbb{H}^m 和 \mathbb{R}^n 的开子集, 也可以假设 $p = 0 \in \mathbb{H}^m$ 且 $F(p) = 0 \in \mathbb{R}^n$. 由 \mathbb{H}^m 上函数光滑性的定义, F 延拓为光滑映射 $\widetilde{F}: W \rightarrow \mathbb{R}^n$, 其中 W 是包含 0 的某开子集. 因 $d\widetilde{F}_0 = dF_0$ 是单射, 通过必要时缩小 W , 可以假设 \widetilde{F} 是光滑浸入. 将 \mathbb{R}^m 上的坐标记为 $x = (x^1, \dots, x^m)$, \mathbb{R}^n 上的坐标记为 $(v, w) = (v^1, \dots, v^m, w^1, \dots, w^{n-m})$.

由秩定理, 存在以 0 为中心的 \mathbb{R}^m 的光滑坐标卡 (U_0, φ_0) 和以 0 为中心的 \mathbb{R}^n 的光滑坐标卡 (V_0, ψ_0) 使得 $\widehat{F} = \psi_0 \circ \widetilde{F} \circ \varphi_0^{-1}$ 由 (4.7) 给出. 这些坐标的唯一问题是 φ_0 可能不限制为 M 的边界坐标卡. 但可以如下轻松纠正这一点. 因 φ_0 是从 U_0 到开子集 $\widehat{U}_0 = \varphi_0(U_0) \subseteq \mathbb{R}^m$ 的微分同胚, 映射

$\varphi_0^{-1} \times \text{Id}_{\mathbb{R}^{n-m}}$ 是从 $\widehat{U}_0 \times \mathbb{R}^{n-m}$ 到 $U_0 \times \mathbb{R}^{n-m}$ 的微分同胚. 令 $\psi = (\varphi_0^{-1} \times \text{Id}_{\mathbb{R}^{n-m}}) \circ \psi_0$, 这是从包含 0 的某开子集 $V \subseteq V_0$ 到 \mathbb{R}^n 中 0 的邻域的微分同胚. 利用 (4.7), 计算得

$$\begin{aligned} \psi \circ F(x) &= (\varphi_0^{-1} \times \text{Id}_{\mathbb{R}^{n-m}}) \circ \psi_0 \circ F \circ \varphi_0^{-1} \circ \varphi_0(x) \\ &= (\varphi_0^{-1} \times \text{Id}_{\mathbb{R}^{n-m}}) \circ \widehat{F}(\varphi_0(x)) \\ &= (\varphi_0^{-1} \times \text{Id}_{\mathbb{R}^{n-m}})(\varphi_0(x), 0) = (x, 0). \end{aligned}$$

因此, M 的原始坐标 (限制到 0 的充分小邻域) 和 N 的坐标卡 (V, ψ) 满足所需条件. \square

对于从带边流形出发的具有常秩的更一般的映射, 可以证明类似的定理, 但证明更复杂, 因 F 到开子集的延拓不会自动具有常秩. 既然不需要这个更一般的结果, 将它留给有兴趣的读者去探讨 (问题 4-3). 另一方面, 对于到达域是带边流形的映射, 情况要复杂得多: 因映射的像可能以不可预测的方式与边界相交, 没有强有力的限制, 无法将这样的映射化为简单的典范形式.

第 2 节 嵌入

浸入是一类特别重要的光滑映射. 若 M 和 N 是带边或不带边的光滑流形, 则 M 到 N 的**光滑嵌入**是指这样的光滑浸入 $F: M \rightarrow N$, 它同时也是**拓扑嵌入**, 即它关于子空间拓扑是其像 $F(M) \subseteq N$ 上的同胚映射. 光滑嵌入是同时满足拓扑嵌入和光滑浸入的映射, 而不仅仅是恰好光滑的拓扑嵌入.

习题 4.16. 证明光滑嵌入的复合仍是光滑嵌入.

例 4.17 (光滑嵌入). (a) 若 M 是带边或不带边的光滑流形, 且 $U \subseteq M$ 是开子流形, 则包含映射 $U \hookrightarrow M$ 是光滑嵌入.

(b) 若 M_1, \dots, M_k 是光滑流形, 且 $p_i \in M_i$ 是任意选取的点, 则由

$$\iota_j(q) = (p_1, \dots, p_{j-1}, q, p_{j+1}, \dots, p_k)$$

给出的每个映射 $\iota_j: M_j \rightarrow M_1 \times \dots \times M_k$ 都是光滑嵌入. 特别地, 将 (x^1, \dots, x^n) 映到 $(x^1, \dots, x^n, 0, \dots, 0)$ 的包含映射 $\mathbb{R}^n \hookrightarrow \mathbb{R}^{n+k}$ 是光滑嵌入.

(c) 问题 4-12 表明, 例 4.2(d) 中的映射 $X: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$ 可以下降到环面 $S^1 \times S^1$ 到 \mathbb{R}^3 的光滑嵌入.

为更好地理解光滑嵌入的含义, 下面给出几个不是光滑嵌入的单射光滑映射的例子. 这三个例子说明了三种不同的失效方式.

例 4.18 (一个光滑拓扑嵌入). 由 $\gamma(t) = (t^3, 0)$ 给出的映射 $\gamma: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2$ 是光滑映射且是拓扑嵌入, 但它不是光滑嵌入, 因为 $\gamma'(0) = 0$.

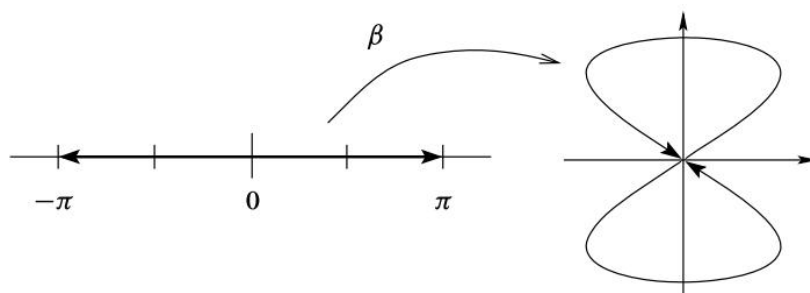


图 4.3: 例 4.19 的八字曲线

例 4.19 (八字曲线). 考虑由

$$\beta(t) = (\sin 2t, \sin t)$$

定义的曲线 $\beta: (-\pi, \pi) \rightarrow \mathbb{R}^2$. 它的像是平面上形如八字的集合 (图 4.3), 称为**双纽线**. (可验证它是满足 $x^2 = 4y^2(1 - y^2)$ 的点 (x, y) 的轨迹.) 容易看出 β 是单射光滑浸入, 因为 $\beta'(t)$ 永不为零. 但它不是拓扑嵌入, 因为其像在子空间拓扑下是紧的, 而其定义域不是.

例 4.20 (环面上的稠密曲线). 设 $\mathbb{T}^2 = \mathbb{S}^1 \times \mathbb{S}^1 \subseteq \mathbb{C}^2$ 表示环面, α 为任意无理数. 由

$$\gamma(t) = (e^{2\pi it}, e^{2\pi i\alpha t})$$

给出的映射 $\gamma: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{T}^2$ 是光滑浸入, 因为 $\gamma'(t)$ 永不为零. 它也是单射, 因为 $\gamma(t_1) = \gamma(t_2)$ 意味着 $t_1 - t_2$ 和 $\alpha t_1 - \alpha t_2$ 都是整数, 除非 $t_1 = t_2$ 否则这是不可能的.

考虑集合 $\gamma(\mathbb{Z}) = \{\gamma(n) : n \in \mathbb{Z}\}$. 由 *Dirichlet* 逼近定理 (见下) 可知, 对每个 $\varepsilon > 0$, 存在整数 n, m 使得 $|\alpha n - m| < \varepsilon$. 利用事实: 对 $t_1, t_2 \in \mathbb{R}$ 有 $|e^{it_1} - e^{it_2}| \leq |t_1 - t_2|$ (因为从 e^{it_1} 到 e^{it_2} 的线段比长度为 $|t_1 - t_2|$ 的圆弧更短), 有

$$|e^{2\pi i\alpha n} - 1| = |e^{2\pi i\alpha n} - e^{2\pi im}| \leq |2\pi(\alpha n - m)| < 2\pi\varepsilon.$$

因此

$$|\gamma(n) - \gamma(0)| = |(e^{2\pi in}, e^{2\pi i\alpha n}) - (1, 1)| = |(1, e^{2\pi i\alpha n}) - (1, 1)| < 2\pi\varepsilon.$$

于是, $\gamma(0)$ 是 $\gamma(\mathbb{Z})$ 的极限点. 但这意味着 γ 不是其像上的同胚, 因为 \mathbb{Z} 在 \mathbb{R} 中没有极限点. 事实上, 像集 $\gamma(\mathbb{R})$ 实际上在 \mathbb{T}^2 中稠密 (见问题 4-4).

前面的例子和问题 4-4 依赖于如下来自数论的初等结果.

引理 4.21 (Dirichlet 逼近定理). 给定 $\alpha \in \mathbb{R}$ 和任意正整数 N , 存在整数 n, m 满足 $1 \leq n \leq N$ 使得 $|n\alpha - m| < 1/N$.

证明. 对任意实数 x , 记 $f(x) = x - [x]$, 其中 $[x]$ 是不超过 x 的最大整数. 由于 $N + 1$ 个数

$\{f(i\alpha) : i = 0, \dots, N\}$ 都落在区间 $[0, 1)$ 中, 根据鸽笼原理, 必存在整数 i 和 j 满足 $0 \leq i < j \leq N$, 使得 $f(i\alpha)$ 和 $f(j\alpha)$ 都落在 N 个子区间 $[0, 1/N), [1/N, 2/N), \dots, [(N-1)/N, 1)$ 之一中. 这意味着 $|f(j\alpha) - f(i\alpha)| < 1/N$, 故可取 $n = j - i$ 和 $m = \lfloor j\alpha \rfloor - \lfloor i\alpha \rfloor$. \square

下面的命题给出单射浸入成为嵌入的几个简单的充分条件.

命题 4.22. 设 M 和 N 是带边或不带边的光滑流形, $F: M \rightarrow N$ 是单射光滑浸入. 若下列条件之一成立, 则 F 是光滑嵌入.

- (a) F 是开映射或闭映射.
- (b) F 是真映射.
- (c) M 是紧的.
- (d) M 的边界为空且 $\dim M = \dim N$.

证明. 若 F 是开的或闭的, 则由定理 A.38 知它是拓扑嵌入, 因此是光滑嵌入. (b) 或 (c) 都蕴含 F 是闭映射: 若 F 是真的, 则由定理 A.57 知它是闭的; 若 M 是紧的, 则由闭映射引理知 F 是闭的. 最后, 假设 M 的边界为空且 $\dim M = \dim N$. 则 dF_p 处处非奇异, 问题 4-2 表明 $F(M) \subseteq \text{Int } N$. 命题 4.8(b) 表明 $F: M \rightarrow \text{Int } N$ 是局部微分同胚, 所以它是开映射. 于是 $F: M \rightarrow N$ 是开映射的复合 $M \rightarrow \text{Int } N \hookrightarrow N$, 因此是嵌入. \square

例 4.23. 设 $\iota: \mathbb{S}^n \hookrightarrow \mathbb{R}^{n+1}$ 为包含映射. 在例 2.13(d) 中通过计算它关于图坐标的坐标表示证明了 ι 是光滑的. 容易在同一坐标下验证其微分在每一点都是单射, 因此它是单射光滑浸入. 因为 \mathbb{S}^n 是紧的, 由命题 4.22 知 ι 是光滑嵌入.

习题 4.24. 给出一个既不是开映射也不是闭映射的光滑嵌入的例子.

定理 4.25 (局部嵌入定理). 设 M 和 N 是带边或不带边的光滑流形, $F: M \rightarrow N$ 是光滑映射. 则 F 是光滑浸入当且仅当 M 的每一点都有邻域 $U \subseteq M$ 使得 $F|_U: U \rightarrow N$ 是光滑嵌入.

证明. 一个方向是显然的: 若每一点都有邻域使得 F 在其上是光滑嵌入, 则 F 处处满秩, 因此是光滑浸入.

反之, 假设 F 是光滑浸入, 且 $p \in M$. 先证明 p 有邻域使得 F 在其上是单射. 若 $F(p) \notin \partial N$, 则由秩定理 (若 $p \notin \partial M$) 或定理 4.15 (若 $p \in \partial M$) 可知, 存在 p 的邻域 U_1 使得 F 在其上有形如 (4.3) 的坐标表示. 由该公式可知 $F|_{U_1}$ 是单射. 另一方面, 假设 $F(p) \in \partial N$, 令 (W, ψ) 为 N 的以 $F(p)$ 为中心的任意光滑边界坐标卡. 若 $U_0 = F^{-1}(W)$, 这是 p 的邻域, 记 $\iota: \mathbb{H}^n \hookrightarrow \mathbb{R}^n$ 为包含映射, 则可将前面的论证应用于复合映射 $\iota \circ \psi \circ F|_{U_0}: U_0 \rightarrow \mathbb{R}^n$, 以证明 p 有邻域 $U_1 \subseteq U_0$ 使得 $\iota \circ \psi \circ F|_{U_1}$ 是单射, 从而 $F|_{U_1}$ 是单射.

现在令 $p \in M$ 任意, U_1 是 p 的邻域使得 F 在其上是单射. 存在 p 的预紧邻域 U 使得 $\bar{U} \subseteq U_1$. F 在 \bar{U} 上的限制是定义域为紧集的单射连续映射, 因此由闭映射引理知它是拓扑嵌入. 因为拓扑嵌入的限制仍是拓扑嵌入, 所以 $F|_U$ 既是拓扑嵌入又是光滑浸入, 从而是光滑嵌入. \square

定理 4.25 指出了适用于任意拓扑空间的浸入概念的方向: 若 X 和 Y 是拓扑空间, 连续映射 $F: X \rightarrow Y$ 称为**拓扑浸入**, 如果 X 的每一点都有邻域 U 使得 $F|_U$ 是拓扑嵌入. 因此, 每个光滑浸入都是拓扑浸入. 但正如嵌入的情形一样, 恰好光滑的拓扑浸入不必是光滑浸入 (参见例 4.18).

第 3 节 淹没

秩定理最重要的应用之一是大幅拓展淹没的性质. 若 $\pi: M \rightarrow N$ 是任意连续映射, π 的**截面**是指 π 的连续右逆, 即连续映射 $\sigma: N \rightarrow M$ 满足 $\pi \circ \sigma = \text{Id}_N$:

$$\begin{array}{c} M \\ \pi \downarrow \rangle \sigma \\ N. \end{array}$$

π 的**局部截面**是指定义在 N 的某个开子集 $U \subseteq N$ 上的连续映射 $\sigma: U \rightarrow M$, 且满足类似的关系 $\pi \circ \sigma = \text{Id}_U$. 光滑淹没的许多重要性质均得益于它们具有充足的光滑局部截面.

定理 4.26 (局部截面定理). 设 M 和 N 是光滑流形, $\pi: M \rightarrow N$ 是光滑映射. 则 π 是光滑淹没当且仅当 M 的每一点都在 π 的某个光滑局部截面的像中.

证明. 首先假设 π 是光滑淹没. 给定 $p \in M$, 记 $q = \pi(p) \in N$. 由秩定理, 可取以 p 为中心的 M 的光滑坐标 (x^1, \dots, x^m) 和以 q 为中心的 N 的光滑坐标 (y^1, \dots, y^n) , 使得 π 的坐标表示为

$$\pi(x^1, \dots, x^n, x^{n+1}, \dots, x^m) = (x^1, \dots, x^n)$$

的形式. 若 ε 是充分小的正数, 则坐标方体

$$C_\varepsilon = \{x : |x^i| < \varepsilon \text{ 关于 } i = 1, \dots, m\}$$

是 p 的邻域, 它在 π 下的像是方体

$$C'_\varepsilon = \{y : |y^i| < \varepsilon \text{ 关于 } i = 1, \dots, n\}.$$

映射 $\sigma: C'_\varepsilon \rightarrow C_\varepsilon$ 的坐标表示为

$$\sigma(x^1, \dots, x^n) = (x^1, \dots, x^n, 0, \dots, 0)$$

的映射是满足 $\sigma(q) = p$ 的 π 的光滑局部截面 (图 4.4).

反之, 假设 M 的每一点都在某个光滑局部截面的像中. 给定 $p \in M$, 设 $\sigma: U \rightarrow M$ 是满足 $\sigma(q) = p$ 的光滑局部截面, 其中 $q = \pi(\sigma(q)) = \pi(p) \in N$. 方程 $\pi \circ \sigma = \text{Id}_U$ 意味着 $d\pi_p \circ d\sigma_q = \text{Id}_{T_q N}$,

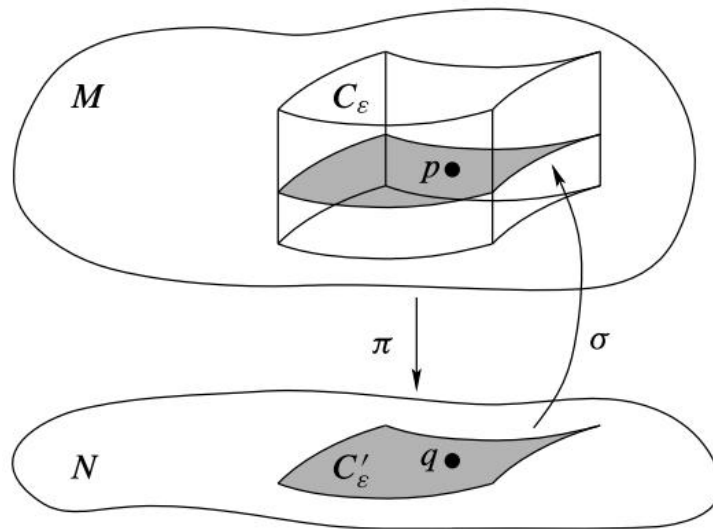


图 4.4: 淹没的局部截面

故 $d\pi_p$ 是满射. □

这个定理启发我们给出如下定义: 若 $\pi: X \rightarrow Y$ 是连续映射, 称 π 是**拓扑淹没**, 若 X 的每一点都在 π 的某个 (连续) 局部截面的像中. 前述定理表明每个光滑淹没都是拓扑淹没.

习题 4.27. 举一个例子, 它是光滑映射、是拓扑淹没但不是光滑淹没.

命题 4.28 (光滑淹没的性质). 设 M 和 N 是光滑流形, $\pi: M \rightarrow N$ 是光滑淹没. 则 π 为开映射, 且若它是满射则是商映射.

证明. 设 W 是 M 的开子集, q 是 $\pi(W)$ 中的一点. 对任意满足 $\pi(p) = q$ 的 $p \in W$, 存在 q 的邻域 U , 在其上存在满足 $\sigma(q) = p$ 的 π 的光滑局部截面 $\sigma: U \rightarrow M$. 对每个 $y \in \sigma^{-1}(W)$, 由 $\sigma(y) \in W$ 知 $y = \pi(\sigma(y)) \in \pi(W)$. 于是 $\sigma^{-1}(W)$ 是包含于 $\pi(W)$ 中的 q 的邻域, 故 $\pi(W)$ 是开集. 第二个断言由第一个即得, 因为每个满射的开连续映射都是商映射. □

接下来三个定理提供了我们将经常用于研究淹没的重要工具. 注意这些结果与定理 A.27(a)、A.30 和 A.31 的相似性. 这说明满的光滑淹没在光滑流形理论中的作用类似于商映射在拓扑学中的作用. 第一个定理推广了习题 4.10(b) 的结果.

定理 4.29 (满射光滑淹没的特征性质). 设 M 和 N 是光滑流形, $\pi: M \rightarrow N$ 是满射光滑淹没. 对任意带边或不带边的光滑流形 P , 映射 $F: N \rightarrow P$ 是光滑的当且仅当 $F \circ \pi$ 是光滑的:

$$\begin{array}{ccc}
 M & & \\
 \pi \downarrow & \searrow F \circ \pi & \\
 N & \xrightarrow{F} & P.
 \end{array}$$

证明. 若 F 是光滑的, 则由复合知 $F \circ \pi$ 是光滑的. 反之, 假设 $F \circ \pi$ 是光滑的, 并设 $q \in N$ 是任意的. 因 π 满射, 存在点 $p \in \pi^{-1}(q)$, 故由局部截面定理, 存在 q 的邻域 U 和 π 的光滑局部截面 $\sigma: U \rightarrow M$ 使得 $\sigma(q) = p$. 那么由 $\pi \circ \sigma = \text{Id}_U$ 可得

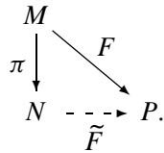
$$F|_U = F|_U \circ \text{Id}_U = F|_U \circ (\pi \circ \sigma) = (F \circ \pi) \circ \sigma,$$

这是光滑映射的复合. 这说明 F 在每点邻域内光滑, 故 F 光滑. □

习题 4-7 说明了这一性质在何种意义下是“特征的”.

下一个定理给出了一个非常一般的充分条件, 使得光滑映射可以被淹没“推下去”.

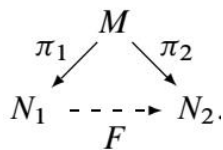
定理 4.30 (光滑地过渡到商). 设 M 和 N 是光滑流形, $\pi: M \rightarrow N$ 是满射光滑淹没. 若 P 是带边或不带边的光滑流形, $F: M \rightarrow P$ 是在 π 的纤维上为常值的光滑映射, 则存在唯一的光滑映射 $\tilde{F}: N \rightarrow P$ 使得 $\tilde{F} \circ \pi = F$:



证明. 因为满射光滑淹没是商映射, 由定理 A.30, 存在唯一的连续映射 $\tilde{F}: N \rightarrow P$ 满足 $\tilde{F} \circ \pi = F$. 由定理 4.29 可知它是光滑的. □

最后给出唯一性结果.

定理 4.31 (光滑商的唯一性). 设 M, N_1 和 N_2 是光滑流形, $\pi_1: M \rightarrow N_1$ 和 $\pi_2: M \rightarrow N_2$ 是满射光滑淹没, 它们在彼此的纤维上为常值. 则存在唯一的微分同胚 $F: N_1 \rightarrow N_2$ 使得 $F \circ \pi_1 = \pi_2$:



习题 4.32. 证明定理 4.31.

第 4 节 光滑覆叠映射

本节介绍一类在光滑流形理论中起重要作用的局部微分同胚. 读者可能已经熟悉拓扑空间之间的覆叠映射的概念: 这是连通且局部道路连通空间之间的满射连续映射 $\pi: E \rightarrow M$, 具有性质 M 的每一点都有一个邻域 U 是均匀覆叠的, 即 $\pi^{-1}(U)$ 的每个连通分支都被 π 同胚地映到 U 上. 覆叠映射的基本性质总结在附录 A 中 (第 615–616 页).

在光滑流形的框架下, 引入一种稍微更具限制性的覆叠映射是有用的. 若 E 和 M 是连通的光滑流形 (带边或不带边), 则称映射 $\pi: E \rightarrow M$ 为**光滑覆叠映射**, 如果 π 是光滑且满射的, 并且 M 的每一点都有一个邻域 U , 使得 $\pi^{-1}(U)$ 的每个连通分支都被 π 微分同胚地映到 U 上. 在这种情形下, 也称 U 是**均匀覆叠的**. 空间 M 称为**覆叠的底空间**, E 称为 M 的**覆叠流形**. 若 E 是单连通的, 则称它为 M 的**万有覆叠流形**.

为将此新定义与之前的定义区分开, 常将普通的 (不必光滑的) 覆叠映射称为**拓扑覆叠映射**. 光滑覆叠映射特别地也是拓扑覆叠映射. 但正如本章研究的其他类型的映射一样, 光滑覆叠映射不仅仅是光滑的拓扑覆叠映射: 定义还要求 π 限制在均匀覆叠集的每个原像分支上是微分同胚, 而不只是光滑同胚.

命题 4.33 (光滑覆叠的性质). (a) 每个光滑覆叠映射都是局部微分同胚、光滑淹没、开映射和商映射.

(b) 单射的光滑覆叠映射是微分同胚.

(c) 拓扑覆叠映射是光滑覆叠映射当且仅当它是局部微分同胚.

习题 4.34. 证明命题 4.33.

例 4.35 (光滑覆叠映射). 例 2.13(b) 中定义的映射 $\varepsilon: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{S}^1$ 是拓扑覆叠映射且是局部微分同胚 (又见例 4.11), 故它是光滑覆叠映射. 类似地, 例 2.13(c) 中的映射 $\varepsilon^n: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{T}^n$ 是光滑覆叠映射. 对每个 $n \geq 1$, 例 2.13(f) 中定义的映射 $q: \mathbb{S}^n \rightarrow \mathbb{RP}^n$ 是二叶光滑覆叠映射 (见习题 4-10).

因为光滑覆叠映射是满射的光滑淹没, 前节中关于光滑淹没的所有结果都可应用于它们. 例如, 定理 4.30 是定义覆叠空间底空间上的光滑映射的一个特别有用的工具. 见习题 4-12 和 4-13 关于这种技术的例子.

对于光滑覆叠映射, 局部截面定理可以得到加强.

命题 4.36 (光滑覆叠映射的局部截面定理). 设 E 和 M 是带边或不带边的光滑流形, $\pi: E \rightarrow M$ 是光滑覆叠映射. 给定任意均匀覆叠的开子集 $U \subseteq M$, 任意 $q \in U$, 以及纤维 $\pi^{-1}(q)$ 中的任意点 p , 存在唯一的光滑局部截面 $\sigma: U \rightarrow E$ 使得 $\sigma(q) = p$.

证明. 设 $U \subseteq M$ 是均匀覆叠的, $q \in U$, 且 $p \in \pi^{-1}(q)$. 记 \tilde{U}_0 为 $\pi^{-1}(U)$ 的包含 p 的连通分支. 由于 π 在 \tilde{U}_0 上的限制是到 U 的微分同胚, 映射 $\sigma = (\pi|_{\tilde{U}_0})^{-1}$ 就是所求的光滑局部截面.

为证唯一性, 设 $\sigma': U \rightarrow E$ 是满足 $\sigma'(q) = p$ 的任意其他光滑局部截面. 由于 U 是连通的, $\sigma'(U)$ 包含在包含 p 的连通分支 \tilde{U}_0 中. 因为 σ' 是双射 $\pi|_{\tilde{U}_0}$ 的右逆, 它必等于其逆, 因此等于 σ . \square

习题 4.37. 设 $\pi: E \rightarrow M$ 是光滑覆叠映射. 证明 π 的每个局部截面都是光滑的.

习题 4.38. 设 E_1, \dots, E_k 和 M_1, \dots, M_k 是不带边的光滑流形, 且对每个 $i = 1, \dots, k$, $\pi_i: E_i \rightarrow M_i$ 是光滑覆叠映射. 证明 $\pi_1 \times \dots \times \pi_k: E_1 \times \dots \times E_k \rightarrow M_1 \times \dots \times M_k$ 是光滑覆叠映射.

习题 4.39. 设 $\pi: E \rightarrow M$ 是光滑覆叠映射. 由于 π 也是拓扑覆叠映射, 关于子集 $U \subseteq M$ 为均匀覆叠的含义存在潜在的歧义: π 是将 $\pi^{-1}(U)$ 的分支微分同胚地映到 U 上, 还是仅仅同胚地? 证明这两个概念是等价的: 若 $U \subseteq M$ 在拓扑意义下是均匀覆叠的, 则 π 将 $\pi^{-1}(U)$ 的每个分支微分同胚地映到 U 上.

命题 4.40 (光滑流形的覆叠空间). 设 M 是连通的 n 维光滑流形, $\pi: E \rightarrow M$ 是拓扑覆叠映射. 则 E 是拓扑 n -流形, 且有唯一的光滑结构使得 π 是光滑覆叠映射.

证明. 因为 π 是局部同胚, E 是局部 Euclid 的. 为证它是 Hausdorff 空间, 设 p_1 和 p_2 是 E 中不同的点. 若 $\pi(p_1) = \pi(p_2)$ 且 $U \subseteq M$ 是包含 $\pi(p_1)$ 的均匀覆叠开子集, 则 $\pi^{-1}(U)$ 的包含 p_1 和 p_2 的分支是 E 中分离 p_1 和 p_2 的不交开子集. 另一方面, 若 $\pi(p_1) \neq \pi(p_2)$, 则存在不交开子集 $U_1, U_2 \subseteq M$ 分别包含 $\pi(p_1)$ 和 $\pi(p_2)$, 于是 $\pi^{-1}(U_1)$ 和 $\pi^{-1}(U_2)$ 是 E 中分别包含 p_1 和 p_2 的不交开子集. 因此 E 是 Hausdorff 空间.

为证 E 是第二可数的, 先证 π 的每条纤维都是可数的. 给定 $q \in M$ 和任意点 $p_0 \in \pi^{-1}(q)$, 构造一个满射 $\beta: \pi_1(M, q) \rightarrow \pi^{-1}(q)$; 由于 $\pi_1(M, q)$ 由命题 1.16 是可数的, 这就足够了. 设 $[f] \in \pi_1(M, q)$ 是基于 q 的任意环路 $f: [0, 1] \rightarrow M$ 的道路类. 覆叠映射的道路提升性质 (命题 A.77(b)) 保证存在 f 的提升 $\tilde{f}: [0, 1] \rightarrow E$ 始于 p_0 , 而单值定理 (命题 A.77(c)) 表明终点 $\tilde{f}(1) \in \pi^{-1}(q)$ 只依赖于 f 的道路类, 因此定义 $\beta[f] = \tilde{f}(1)$ 是有意义的. 为看出 β 是满射, 注意对任意点 $p \in \pi^{-1}(q)$, 存在 E 中从 p_0 到 p 的道路 \tilde{f} , 于是 $f = \pi \circ \tilde{f}$ 是 M 中的环路使得 $p = \beta[f]$.

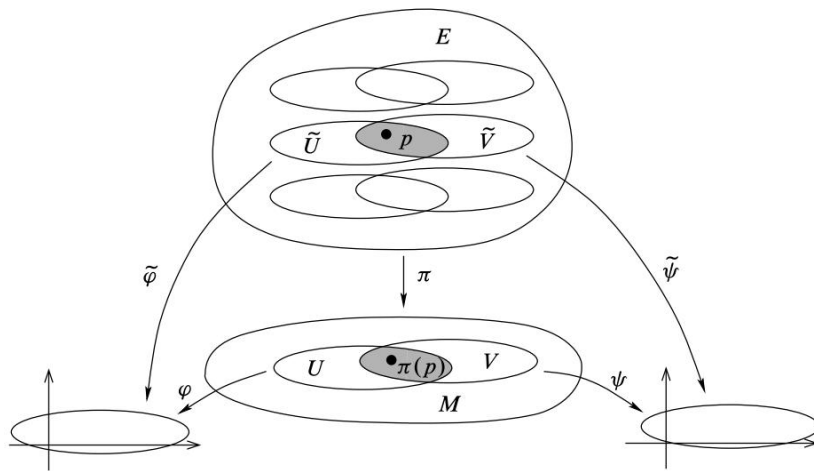


图 4.5: 覆叠流形上图表的光滑相容性

所有均匀覆叠开子集的集合是 M 的开覆盖, 因此有一个可数子覆盖 $\{U_i\}$. 对任意给定的 i , $\pi^{-1}(U_i)$ 的每个分支恰包含 U_i 上每条纤维中的一个点, 因此 $\pi^{-1}(U_i)$ 有可数多个分支. 所有形如 $\pi^{-1}(U_i)$ 的集合的所有分支的集合因此是 E 的可数开覆盖; 由于每个这样的分支都是第二可数的, 由习题 A.22 可知 E 是第二可数的. 这就完成了 E 是拓扑流形的证明.

为构造 E 上的光滑结构, 设 p 是 E 中任意点, U 是 $\pi(p)$ 的均匀覆叠邻域. 必要时缩小 U , 还可假设它是光滑坐标映射 $\varphi: U \rightarrow \mathbb{R}^n$ 的定义域 (见图 4.5). 若 \tilde{U} 是 $\pi^{-1}(U)$ 的包含 p 的分支, 且

$\tilde{\varphi} = \varphi \circ \pi|_{\tilde{U}}: \tilde{U} \rightarrow \mathbb{R}^n$, 则 $(\tilde{U}, \tilde{\varphi})$ 是 E 上的一个坐标卡. 若两个这样的坐标卡 $(\tilde{U}, \tilde{\varphi})$ 和 $(\tilde{V}, \tilde{\psi})$ 重叠, 转移映射可以写成

$$\tilde{\psi} \circ \tilde{\varphi}^{-1} = (\psi \circ \pi|_{\tilde{U} \cap \tilde{V}}) \circ (\varphi \circ \pi|_{\tilde{U} \cap \tilde{V}})^{-1} = \psi \circ (\pi|_{\tilde{U} \cap \tilde{V}}) \circ (\pi|_{\tilde{U} \cap \tilde{V}})^{-1} \circ \varphi^{-1} = \psi \circ \varphi^{-1},$$

这是光滑的. 因此所有这样的坐标卡的集合定义了 E 上的一个光滑结构. 此光滑结构的唯一性留给读者 (习题 4-9).

最后, π 是光滑覆叠映射, 因为它在上面构造的任意一对坐标卡 $(\tilde{U}, \tilde{\varphi})$ 和 (U, φ) 下的坐标表示是恒等映射. □

下面是关于带边流形的类似结果.

命题 4.41 (带边光滑流形的覆叠空间). 设 M 是连通的 n 维带边光滑流形, $\pi: E \rightarrow M$ 是拓扑覆叠映射. 则 E 是 n 维带边拓扑流形, 满足 $\partial E = \pi^{-1}(\partial M)$, 且它有唯一的光滑结构使得 π 是光滑覆叠映射.

习题 4.42. 证明上述命题.

推论 4.43 (万有覆叠流形的存在性). 若 M 是连通的光滑流形, 则存在单连通的光滑流形 \tilde{M} , 称为 M 的万有覆叠流形, 以及光滑覆叠映射 $\pi: \tilde{M} \rightarrow M$. 万有覆叠流形在下述意义下是唯一的: 若 \tilde{M}' 是任何其他允许光滑覆叠映射 $\pi': \tilde{M}' \rightarrow M$ 的单连通光滑流形, 则存在微分同胚 $\phi: \tilde{M} \rightarrow \tilde{M}'$ 使得 $\pi' \circ \phi = \pi$.

习题 4.44. 证明上述推论.

习题 4.45. 将上述推论推广到带边的光滑流形.

即使已知一个映射是满射的局部微分同胚, 判断它是否为光滑覆叠映射的简单判据也不多. 下面的命题给出了一个有用的充分条件. (然而它不是必要的; 见习题 4-11.)

命题 4.46. 设 E 和 M 是非空连通的光滑流形 (带边或不带边). 若 $\pi: E \rightarrow M$ 是真局部微分同胚, 则 π 是光滑覆叠映射.

证明. 因为 π 是局部微分同胚, 它是开映射, 又因为它真是映射, 它是闭映射 (定理 A.57). 因此 $\pi(E)$ 在 M 中既是开的又是闭的. 由于它显然非空, 它就是整个 M ; 所以 π 是满射.

设 $q \in M$ 是任意的. 因为 π 是局部微分同胚, $\pi^{-1}(q)$ 的每一点都有一个邻域使得 π 在其上是单射, 因此 $\pi^{-1}(q)$ 是 E 的离散子集. 由于 π 是真映射, $\pi^{-1}(q)$ 也是紧的, 因此它是有限的. 写 $\pi^{-1}(q) = \{p_1, \dots, p_k\}$. 对每个 i , 存在 p_i 的邻域 V_i 使得 π 微分同胚地映到开子集 $U_i \subseteq M$ 上. 必要时缩小每个 V_i , 还可假设对 $i \neq j$ 有 $V_i \cap V_j = \emptyset$.

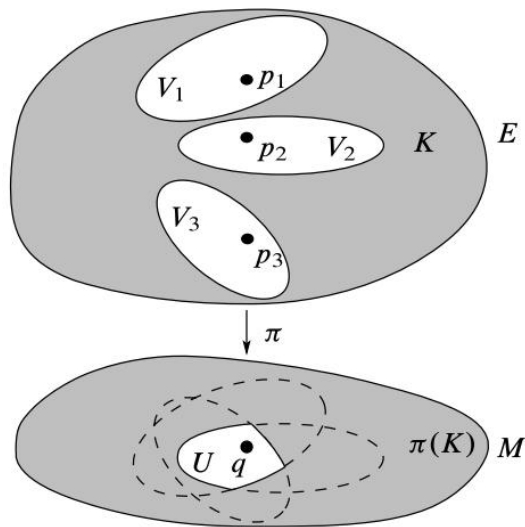


图 4.6: 真局部微分同胚是覆盖映射

令 $U = U_1 \cap \cdots \cap U_k$ (图 4.6), 它是 q 的邻域. 于是 U 满足

$$U \subseteq U_i \quad \text{对每个 } i. \tag{4.8}$$

因为 $K = E \setminus (V_1 \cup \cdots \cup V_k)$ 在 E 中是闭的且 π 是闭映射, $\pi(K)$ 在 M 中是闭的. 用 $U \setminus \pi(K)$ 代替 U , 可假设 U 还满足

$$\pi^{-1}(U) \subseteq V_1 \cup \cdots \cup V_k. \tag{4.9}$$

最后, 在用 U 的包含 q 的连通分支代替 U 后, 可假设 U 是连通的且仍然满足 (4.8) 和 (4.9). 下证 U 是均匀覆盖的.

令 $\tilde{V}_i = \pi^{-1}(U) \cap V_i$. 由 (4.9) 知, $\pi^{-1}(U) = \tilde{V}_1 \cup \cdots \cup \tilde{V}_k$. 因为 $\pi: V_i \rightarrow U_i$ 是微分同胚, (4.8) 意味着 $\pi: \tilde{V}_i \rightarrow U$ 仍是微分同胚, 特别地 \tilde{V}_i 是连通的. 因为 $\tilde{V}_1, \dots, \tilde{V}_k$ 是 $\pi^{-1}(U)$ 的不交连通开子集, 它们恰是 $\pi^{-1}(U)$ 的连通分支. \square

第 5 节 习题

习题 4-1. 利用包含映射 $\mathbb{H}^n \hookrightarrow \mathbb{R}^n$ 说明定理 4.5 不能推广到 M 为带边流形的情形. (用于第 80 页.)

习题 4-2. 设 M 是光滑流形 (不带边界), N 是光滑带边流形, $F: M \rightarrow N$ 是光滑映射. 证明: 若 $p \in M$ 满足 dF_p 非奇异, 则 $F(p) \in \text{Int } N$. (用于第 80、87 页.)

习题 4-3. 叙述并证明定义域为光滑带边流形的常秩映射的秩定理版本. [提示: 按照定理 4.15 的证明方式先将 F 任意延拓, 然后沿着秩定理的证明过程进行, 直到使用常秩假设的那一步, 再说明如何修改延拓后的映射使其具有常秩.]

习题 4.4. 设 $\gamma: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{T}^2$ 为例 4.20 中的曲线. 证明像集 $\gamma(\mathbb{R})$ 在 \mathbb{T}^2 中稠密. (用于第 502、542 页.)

习题 4.5. 设 $\mathbb{C}P^n$ 表示 n 维复射影空间, 定义见习题 1-9.

(a) 证明商映射 $\pi: \mathbb{C}^{n+1} \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{C}P^n$ 是满射光滑淹没.

(b) 证明 $\mathbb{C}P^1$ 与 S^2 微分同胚.

(用于第 172、560 页.)

习题 4.6. 设 M 是非空光滑紧流形. 证明对任意 $k > 0$ 都不存在光滑淹没 $F: M \rightarrow \mathbb{R}^k$.

习题 4.7. 设 M 和 N 是光滑流形, $\pi: M \rightarrow N$ 是满射光滑淹没. 证明 N 上不存在其他光滑流形结构能满足定理 4.29 的结论; 换言之, 假设 \tilde{N} 与 N 表示同一个集合, 但带有可能不同的拓扑和光滑结构, 且对任意带边或不带边的光滑流形 P , 映射 $F: \tilde{N} \rightarrow P$ 光滑当且仅当 $F \circ \pi$ 光滑, 证明 Id_N 是 N 与 \tilde{N} 之间的微分同胚. [注记: 这说明定理 4.29 所描述的性质是“特征性的”, 其意义类似于定理 4.27(a) 对商拓扑的特征性刻画.]

习题 4.8. 本题说明定理 4.29 的逆命题不成立. 设 $\pi: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ 定义为 $\pi(x, y) = xy$. 证明 π 是满射且光滑, 且对任意光滑流形 P , 映射 $F: \mathbb{R} \rightarrow P$ 光滑当且仅当 $F \circ \pi$ 光滑; 但 π 不是光滑淹没.

习题 4.9. 设 M 是连通光滑流形, $\pi: E \rightarrow M$ 是拓扑覆叠映射. 利用光滑局部截面的存在性, 完成命题 4.40 的证明, 证明 E 上使 π 成为光滑覆叠映射的光滑结构是唯一的.

习题 4.10. 证明例 2.13(f) 中定义的映射 $q: S^n \rightarrow \mathbb{R}P^n$ 是光滑覆叠映射. (用于第 550 页.)

习题 4.11. 证明拓扑覆叠映射是真映射当且仅当其纤维有限, 因此命题 4.46 的逆命题不成立.

习题 4.12. 利用覆叠映射 $\varepsilon^2: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{T}^2$ (见例 4.35), 证明例 4.2(d) 中定义的浸入 $X: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$ 可下降到商空间, 从而定义出 \mathbb{T}^2 到 \mathbb{R}^3 的光滑嵌入. 具体而言, 证明 X 可下降到商, 定义出光滑映射 $\tilde{X}: \mathbb{T}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$, 然后证明 \tilde{X} 是光滑嵌入, 且其像为给定的旋转曲面.

习题 4.13. 定义映射 $F: S^2 \rightarrow \mathbb{R}^4$ 为 $F(x, y, z) = (x^2 - y^2, xy, xz, yz)$. 利用例 2.13(f) 中的光滑覆叠映射和习题 4-10, 证明 F 可下降到 $\mathbb{R}P^2$ 到 \mathbb{R}^4 的光滑嵌入.

术语表

外文术语	中文术语
abelian group	Abel 群.
affine hyperplane	仿射超平面.
angle function	辐角函数.
antipodal map	对径映射.
associative algebra	结合代数.
atlas	图册.
base of the covering	覆盖的底空间.
basis isomorphism	基同构.
boundary chart	边界坐标卡.
boundary point	边界点.
bump function	隆起函数.
C^∞ structure	C^∞ 结构.
canonical form	典范形式.
category	范畴.
change of coordinates	坐标变换.
C^k manifold	C^k 流形.
C^k structure	C^k 结构.
closed manifold	闭流形.
closed subset	闭子集.
codomain	上域.
commutative ring	交换环.
compactly supported	紧支的.
complex manifold	复流形.
complex-analytic	复解析的.
complex-analytic structure	复解析结构.



外文术语	中文术语
component	连通分支.
component map	分量映射.
composite function	复合函数.
composite map	复合映射.
connected	连通的.
constant map	常值映射.
constant rank	常秩.
continuous function	连续函数.
contravariant functor	反变函子.
coordinate ball	坐标球.
coordinate basis	坐标基.
coordinate chart	坐标卡.
coordinate cube	坐标方体.
coordinate domain	坐标域.
coordinate half-ball	坐标半球.
coordinate map	坐标映射.
coordinate neighborhood	坐标邻域.
coordinate projection	坐标投影.
coordinate representation	坐标表示.
coordinate vectors	坐标向量.
countable basis	可数基.
covariant functor	协变函子.
covering manifold	覆盖流形.
curve	曲线.
cutoff function	截断函数.
de Rham cohomology	de Rham 上同调.
derivation	导子.
diffeomorphic	微分同胚的.
diffeomorphism	微分同胚.
diffeomorphism invariance of dimension	维数的微分同胚不变性.
differentiable structure	微分结构.
differential	微分.
directional derivative	方向导数.
Dirichlet's approximation theorem	Dirichlet 逼近定理.
disjoint union	不交并.
domain	定义域.
dummy index	哑指标.
Einstein summation convention	Einstein 求和约定.

外文术语	中文术语
embedding	嵌入.
equivalence class	等价类.
equivalence relation	等价关系.
Euclidean space	Euclid 空间.
evenly covered	均匀覆叠的.
exhaustion by compact sets	紧集穷竭.
exhaustion function	穷竭函数.
extension lemma	延拓引理.
fiber	纤维.
figure-eight curve	八字曲线.
forgetful functor	遗忘函子.
full rank	满秩.
functor	函子.
general linear group	一般线性群.
geometric tangent space	几何切空间.
geometric tangent vector	几何切向量.
germ	芽.
gluing lemma	粘合引理.
Grassmann manifold	Grassmann 流形.
Grassmannian	Grassmann 流形.
Hausdorff space	Hausdorff 空间.
homeomorphic	同胚的.
homeomorphism	同胚.
homogeneous	齐次的.
identity map	恒等映射.
identity matrix	单位矩阵.
immersion	浸入.
implicit function theorem	隐函数定理.
inclusion map	包含映射.
interior	内部.
interior chart	内部坐标卡.
interior point	内点.
inverse function theorem for manifolds	流形的反函数定理.
isomorphic	同构的.
isomorphism	同构.
Jacobian matrix	Jacobi 矩阵.
Kronecker delta	Kronecker delta.
lemniscate	双纽线.

外文术语	中文术语
level set	水平集.
linear approximation	线性近似.
linear subspace	线性子空间.
local diffeomorphism	局部微分同胚.
local embedding theorem	局部嵌入定理.
local immersion theorem for manifolds with boundary	带边流形的局部浸入定理.
local section	局部截面.
local section theorem	局部截面定理.
local section theorem for smooth covering maps	光滑覆叠映射的局部截面定理.
locally compact	局部紧的.
locally Euclidean	局部 Euclid 的.
locally finite	局部有限的.
locally path-connected	局部道路连通的.
locally small	局部小的.
lower index	下指标.
manifold boundary	流形边界.
manifold with boundary	带边流形.
matrices of full rank	满秩矩阵.
maximal smooth atlas	极大光滑图册.
metric space	度量空间.
morphism	态射.
natural coordinates	自然坐标.
natural isomorphism	自然同构.
nonsingular	非奇异的.
n -sphere	n 维球面.
n -torus	n 维环面.
open ball	开球.
open cover	开覆盖.
open manifold	开流形.
open map	开映射.
open submanifold	开子流形.
open subset	开子集.
ordinary differential equation	常微分方程.
paracompact	仿紧的.
partial derivative	偏导数.
partial differential equation	偏微分方程.
partition of unity	单位分解.

外文术语	中文术语
path component	道路连通分支.
path-connected	道路连通的.
pointed map	带基点映射.
pointed set	带基点集合.
pointed smooth manifold	带基点光滑流形.
pointed topological space	带基点拓扑空间.
polar coordinates	极坐标.
power series	幂级数.
precompact	预紧的.
product manifold	乘积流形.
product rule	Leibniz 法则.
product space	乘积空间.
projection	投影.
projective plane	射影平面.
projective space	射影空间.
projectivization	射影化.
proper map	真映射.
pushforward	前推.
quotient map	商映射.
quotient topology	商拓扑.
rank	秩.
rank theorem	秩定理.
real projective space	实射影空间.
real-analytic	实解析的.
real-analytic manifold	实解析流形.
real-analytic structure	实解析结构.
real-valued function	实值函数.
refinement	加细.
regular coordinate ball	正则坐标球.
regular coordinate half-ball	正则坐标半球.
saturated open subset	饱和开子集.
second-countable	第二可数的.
section	截面.
simple connectivity	单连通性.
small category	小范畴.
smooth atlas	光滑图册.
smooth bundle	光滑丛.
smooth chart	光滑坐标卡.

外文术语	中文术语
smooth compatible	光滑相容的.
smooth coordinate ball	光滑坐标球.
smooth coordinate cube	光滑坐标方体.
smooth coordinate domain	光滑坐标域.
smooth coordinate map	光滑坐标映射.
smooth coordinate neighborhood	光滑坐标邻域.
smooth covering map	光滑覆叠映射.
smooth curve	光滑曲线.
smooth embedding	光滑嵌入.
smooth extension	光滑延拓.
smooth function	光滑函数.
smooth function element	光滑函数元.
smooth immersion	光滑浸入.
smooth invariance of the boundary	边界的光滑不变性.
smooth manifold	光滑流形.
smooth manifold structure	光滑流形结构.
smooth manifold with boundary	光滑带边流形.
smooth map	光滑映射.
smooth partition of unity	光滑单位分解.
smooth structure	光滑结构.
smooth submersion	光滑淹没.
smoothly compatible	光滑相容的.
source	源 (态射的).
space of linear maps	线性映射空间.
spacetime	时空.
standard basis	标准基.
standard basis vector	标准基向量.
standard coordinates	标准坐标.
standard smooth structure	标准光滑结构.
stereographic coordinates	球极坐标.
stereographic projection	球极投影.
sublevel set	水平集.
submersion	淹没.
subspace topology	子空间拓扑.
support	支集.
tangent bundle	切丛.
tangent functor	切函子.
tangent line	切线.

外文术语	中文术语
tangent plane	切平面.
tangent space	切空间.
tangent space functor	切空间函子.
tangent vector	切向量.
target	靶 (态射的).
Taylor's theorem	Taylor 定理.
topological boundary	拓扑边界.
topological covering map	拓扑覆叠映射.
topological embedding	拓扑嵌入.
topological immersion	拓扑浸入.
topological invariance of dimension	维数的拓扑不变性.
topological invariance of the boundary	边界的拓扑不变性.
topological invariant	拓扑不变量.
topological manifold	拓扑流形.
topological space	拓扑空间.
topological submersion	拓扑淹没.
torus	环面.
total derivative	全导数.
transition map	转移映射.
uniformly covered	均匀覆叠的.
universal covering manifold	万有覆叠流形.
upper half-space	上半空间.
upper index	上指标.
vector-valued function	向量值函数.
velocity	速度.
velocity vector	速度向量.
σ -compact	σ 紧的.