

复超曲面的奇点

Singular Points of Complex Hypersurfaces

流沫老师特供

原著作者 John Milnor (美国)

中文翻译 临江仙

更新发布 <https://afdian.com/a/solitairemiya>

更新日期 2026 年 4 月 6 日

惊鸿舟数海，一笔临江仙。



目录

第一章 引言	2
第二章 关于实或复代数集的基本事实	5
第三章 曲线选择引理	16
第四章 纤维化定理	21
第五章 纤维与 K 的拓扑	30
第六章 孤立临界点的情形	37
第七章 纤维的中间 Betti 数	40
第八章 K 是拓扑球面吗？	44
第九章 Brieskorn 簇与加权齐次多项式	48
第十章 \mathbb{C}^2 中曲线的经典情形	55
第十一章 实奇点的纤维化定理	66
附录 A Whitney 关于代数集的有限性定理	71
附录 B 解析方程组孤立解的重数	74
术语表	78

第一章 引言

设 $f(z_1, \dots, z_{n+1})$ 为 $n+1$ 个复变量的非零多项式, V 为由所有满足 $f(z) = 0$ 的 $n+1$ 元组

$$z = (z_1, \dots, z_{n+1})$$

构成的代数集. (这样的集合称为复超曲面.) 本文旨在研究 V 在某点 z^0 邻域内的拓扑性质.

下面采用 Brauner 提出的构造方法. 将超曲面 V 与以给定点 z^0 为中心的小球面 S_ϵ 相交, 则 V 在 S_ϵ 所界圆盘内的拓扑与集合

$$K = V \cap S_\epsilon$$

的拓扑密切相关. (参见第 2.10 节和第 2.11 节.)

例如, 若 z^0 是 f 的正则点 (即某个偏导数 $\partial f / \partial z_j$ 在 z^0 处不为零), 则 V 在 z^0 附近是一个实维数为 $2n$ 的光滑流形. 此时交集 K 是一个光滑的 $(2n-1)$ 维流形, 微分同胚于 $(2n-1)$ 维球面, 且 K 以不打结的方式嵌入到 $(2n+1)$ 维球面 S_ϵ 中. (见第 2.12 节.)

作为对比, 考虑二元多项式

$$f(z_1, z_2) = z_1^p + z_2^q$$

它在原点处有一个临界点 ($\partial f / \partial z_1 = \partial f / \partial z_2 = 0$). 假设整数 p 和 q 互素且 ≥ 2 .

断言 (Brauner). 超曲面 $V = f^{-1}(0)$ 与以原点为中心的球面 S_ϵ 的交是 3 维球面 S_ϵ 中一个打了结的圆周, 其类型为“环面纽结” (p, q) 型.

证明. 容易验证交集 K 位于由所有满足 $|z_1| = \xi$ 和 $|z_2| = \eta$ 的点 (z_1, z_2) 组成的环面上, 其中 ξ 和 η 为正常数. 事实上, K 由所有形如 $(\xi e^{qi\theta}, \eta e^{pi\theta + \pi i/q})$ 的点组成, 其中参数 θ 从 0 变化到 2π . 因此 K 在环面的一个坐标方向上环绕 q 次, 在另一个坐标方向上环绕 p 次. \square

例如, 图 1 展示了 $(2, 3)$ 型的环面纽结.



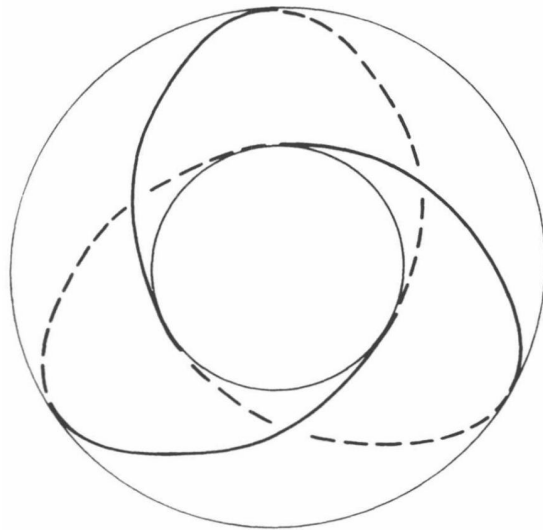


图 1.1: (2,3) 型的环面纽结

(当然，通过使用更复杂的多项式可以得到更复杂的纽结. 参见第 10.11 节.)

Brieskorn 研究了这些环面纽结的高维类比. 例如，设 $V(3, 2, 2, \dots, 2)$ 为多项式

$$f(z_1, \dots, z_{n+1}) = z_1^3 + z_2^2 + \dots + z_{n+1}^2$$

的零点轨迹.

对于所有奇数 n ，该超曲面与 S_ϵ 的交是一个光滑流形 K ，它与球面 S^{2n-1} 同胚. 在某些情况下 (例如 $n = 3$)， K 微分同胚于标准的 $(2n - 1)$ 维球面；而在其他情况下 (例如 $n = 5$)， K 是一个“怪”球面. 但在所有情况下， K 都以打了结的方式嵌入到 $(2n + 1)$ 维球面 S_ϵ 中.

这些 Brieskorn 球面将在第 9 节中更详细地研究.

本文旨在介绍一种纤维化，用于描述此类交集

$$K = V \cap S_\epsilon \subset S_\epsilon$$

的拓扑结构. 以下是一些主要结果，将在第 4 节到第 7 节中证明.

纤维化定理. 若 z^0 是复超曲面 $V = f^{-1}(0)$ 上的任一点，且 S_ϵ 是以 z^0 为中心的充分小的球面，则从 $S_\epsilon - K$ 到单位圆周的映射

$$\phi(z) = f(z)/|f(z)|$$

是一个光滑纤维丛的投影映射*. 每个纤维

$$F_\theta = \phi^{-1}(e^{i\theta}) \subset S_\epsilon - K$$

都是一个光滑的可平行化的 $2n$ 维流形.

若多项式 f 在 z^0 附近除了 z^0 本身外没有其他临界点, 则可给出更精确的描述.

定理. 若 z^0 是 f 的孤立临界点, 则每个纤维 F_θ 都具有球束 $S^n \vee \cdots \vee S^n$ 的同伦型, 该球束由 n 个球面组成, 球面的个数 (即 F_θ 的中间 Betti 数) 严格为正. 每个纤维都可视为光滑的紧带边流形的内部,

$$\text{Closure}(F_\theta) = F_\theta \cup K,$$

其中公共边界 K 是一个 $(n-2)$ 连通的流形.

因此, 所有的纤维 F_θ 围绕它们的公共边界 K 排列, 方式如图 2 所示. 光滑流形 K 当 $n \geq 2$ 时是连通的, 当 $n \geq 3$ 时是单连通的.

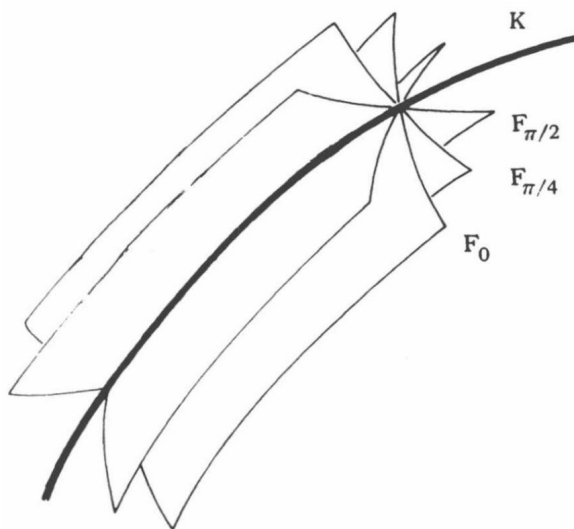


图 1.2: 纤维化示意图

以下是后续内容的更详细概述. 第 2 节描述实代数集的基本性质, 遵循 Whitney 的工作. 关于实代数集上实解析曲线存在性的一个基本引理在第 3 节中证明, 后续所有证明都依赖于该引理. 基本纤维化定理在第 4 节中证明. 第 5 节进一步研究 K 和 F_θ 的拓扑性质.

接下来引入额外的假设: 原点是 f 的孤立临界点. 在此假设下, 纤维可以得到更精确的描述 (第 6 节), 并给出纤维中间 Betti 数的精确公式 (第 7 节). 交集 K 的拓扑则用一个具有整数系数的特定多项式 $\Delta(t)$ 来描述, 它推广了纽结的 Alexander 多项式. (第 8 节.)

作为拓扑流形的奇异簇的 Brieskorn 例子在第 9 节中描述, 复曲线奇点的经典理论在第 10 节中介绍. 最后一节证明纤维化定理到某些实多项式系统的推广, 并给出 Hopf 纤维化的多项式描述作为例子.

两个附录结束了本文的叙述.

第二章

关于实或复代数集的基本事实

设 Φ 是任意无限域, Φ^m 是由 Φ 的元素构成的所有 m 元组 $x = (x_1, \dots, x_m)$ 组成的坐标空间. (我们主要关注 Φ 是实数域 \mathbb{R} 或复数域 \mathbb{C} 的情形.)

定义. 子集 $V \subset \Phi^m$ 称为**代数集**, 如果 V 是 Φ^m 上某些多项式函数的公共零点轨迹.

从 Φ^m 到 Φ 的所有多项式函数构成的环将用传统记号 $\Phi[x_1, \dots, x_m]$ 表示. 设

$$I(V) \subset \Phi[x_1, \dots, x_m]$$

为在 V 上恒为零的多项式构成的理想. **Hilbert 基定理**断言每个理想都可由有限个多项式张成 (作为 $\Phi[x_1, \dots, x_m]$ -模). 由此可知, 每个代数集 V 都可由有限个多项式方程定义.

Hilbert 基定理的一个重要推论如下:

2.1 降链条件. 代数集的任意嵌套序列 $V_1 \supset V_2 \supset V_3 \supset \dots$ 都必在有限步后终止或稳定 ($V_i = V_{i+1} = V_{i+2} = \dots$).

注意, Φ^m 中任意两个代数集 V 与 V' 的并 $V \cup V'$ 仍是代数集.

非空的代数集 V 称为**簇**或**不可约代数集**, 如果它不能表示为两个真代数子集的并. 注意 V 不可约当且仅当 $I(V)$ 是素理想. 若 V 不可约, 则整环

$$\Phi[x_1, \dots, x_m]/I(V)$$

中形如 f/g (其中 f 与 g 属于该整环) 的分式构成的域称为 V 上的**有理函数域**. 它在 Φ 上的超越次数称为 V 在 Φ 上的**代数维数**.

若 W 是 V 的真子簇, 注意 W 的维数小于 V 的维数. (例如参见 LANG, Algebraic Geometry, p. 29.)



现设 $V \subset \Phi^m$ 是任意非空代数集. 选取生成理想 $I(V)$ 的有限个多项式 f_1, \dots, f_k , 对每个 $x \in V$, 考虑在 x 处取值的 $k \times m$ 矩阵 $(\partial f_i / \partial x_j)$. 设 ρ 为该矩阵在 V 上各点所能达到的最大秩.

定义. 点 $x \in V$ 称为**非奇异的** 或**简单的**, 如果矩阵 $(\partial f_i / \partial x_j)$ 在 x 处达到其最大秩 ρ ; 而如果

$$\text{rank}(\partial f_i(x) / \partial x_j) < \rho,$$

则称该点为**奇异的**.

注意这一定义不依赖于 $\{f_1, \dots, f_k\}$ 的选取. (因为若添加额外的多项式 $f_{k+1} = g_1 f_1 + \dots + g_k f_k$, 所得矩阵的新行将是旧行的线性组合.)

引理 2.2. V 的所有奇异点构成的集合 $\Sigma(V)$ 形成 V 的一个真代数子集 (可能为空).

因为点 $x \in V$ 属于 $\Sigma(V)$ 当且仅当矩阵 $(\partial f_i / \partial x_j)$ 的每个 $\rho \times \rho$ 子式在 x 处为零. 因此 $\Sigma(V)$ 由多项式方程确定.

现在让我们专门讨论实或复代数集的情形.

定理 2.3 (Whitney). 若 Φ 是实数 (或复数) 域, 则 V 的非奇异点构成的集合 $V - \Sigma(V)$ 构成一个光滑的非空流形. 事实上, 该流形是实 (或复) 解析的, 且在 Φ 上的维数为 $m - \rho$.

读者可参考 WHITNEY 的《Elementary Structure of Real Algebraic Varieties》中关于定理 2.3 的优美证明.

对于不可约的 V , Whitney 证明了在 Φ 上, 解析流形 $V - \Sigma(V)$ 的维数恰好等于 V 在 Φ 上的代数维数.

这是另一个基本结果.

定理 2.4 (Whitney). 对于实或复坐标空间中任意一对代数集 $V \supset W$, 差集 $V - W$ 至多具有有限个拓扑分支.

例如, V 本身只有有限多个分支; 而光滑流形 $V - \Sigma(V)$ 也只有有限多个分支.

定理 2.4 的证明与 WHITNEY 的证明略有不同, 将在附录 A 中给出.

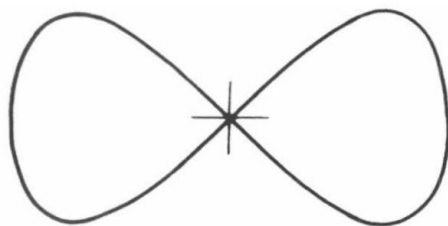
下面是三个例子 (见图 3). 每个例子都是实平面中的一条曲线, 以原点为唯一的奇异点.

例子 A. 由 \mathbb{R}^2 中满足

$$y^2 - x^2(1 - x^2) = 0$$

的所有 (x, y) 构成的簇描述的是最良态且最易理解的奇异点类型, 即一个“双重点”, 在该点处两条具有不同切线的实解析分支 (即 $y = x\sqrt{1 - x^2}$ 和 $y = -x\sqrt{1 - x^2}$) 相互交叉.

(图 3-A. 关于“分支”一词的定义见第 3.3 节.)

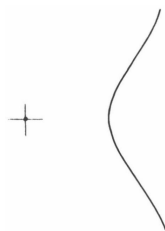
图 2.1: 曲线 $y = \pm x\sqrt{1-x^2}$

例子 B. 图 3-B 所示的三次曲线

$$y^2 - x^2(x-1) = 0$$

在原点处有一个孤立点；然而这条曲线也是不可约的。

(注记. 在复数域上, 这种类型的例子不可能出现. 事实上, RITT 的一个定理表明, 复簇 V 的简单点构成的流形在 V 中是处处稠密的. 参见 VAN DER WAERDEN 的《Zur algebraische Geometrie III》, 或《Algebraische Geometrie》第 134 页.)

图 2.2: 曲线 $y = \pm x\sqrt{x-1}$

例子 C. 方程 $y^3 = x^{100}$ 可以将 y 解为 x 的 33 次可微函数, 但这个方程定义的簇 $V \subset \mathbb{R}^2$ 在原点处有一个奇异点. 方程 $y^3 + 2x^2y - x^4 = 0$ (见图 3-C) 实际上可以将 y 解为 x 的实解析函数*, 但这个方程定义的簇在原点处也有一个奇异点.

图 2.3: 曲线 $x^2 = y(1 + \sqrt{1+y})$

若允许 x 和 y 在复数范围内变化, 那么这一现象就更容易理解. 事实上, 复曲线 $y^3 = x^{100}$ 在原点附近是“打结的”(参见第 1 节), 而复曲线 $y^3 + 2x^2y = x^4$ 有三条不同的非奇异分支通过原点.

注记. 复簇在奇异点的一个邻域内永远不可能成为光滑流形.

证明. 假设复簇 V 在 C^m 中原点的一个邻域 U 内是类 C^1 的可微流形. 该光滑流形 $U \cap V$ 在任一简单点处的切空间显然是复数域上的向量空间. 由于简单点是稠密的 (见上述注记), 根据连续性可知, 在任意点 z 处, $U \cap V$ 的 (实) 切空间 $T_z \subset C^m$ 实际上是一个复向量空间 (即 $T_z = iT_z$). 现在用更小的邻域 U' 代替 U , 并在必要时重新编号坐标, 隐函数定理表明 $U' \cap V$ 可以视为从 (z_1, \dots, z_n) 坐标空间的一个开子集到 (z_{n+1}, \dots, z_m) 坐标空间的 C^1 光滑映射 F 的图像. F 在每一点处的导数是复线性的, 因此满足 Cauchy-Riemann 方程, 从而 F 是复解析的. 这证明了 $U' \cap V$ 是一个复流形.

接下来, 设 $h(z)$ 是定义在 0 的某个邻域内且在 V 上恒为零的任一复解析函数, 又设 f_1, \dots, f_k 是生成素理想 $I(V) \subset C[z_1, \dots, z_m]$ 的多项式. 局部解析零点定理 (例如参见 Gunning 和 Rossi 第 90 页) 断言, 某个幂次 h^s 可以表示为线性组合 $a_1 f_1 + \dots + a_k f_k$, 其中 a_1, \dots, a_k 是解析函数的芽. 转到由原点处所有形式幂级数构成的更大的环 $C[[z]]$, 则更有 h^s 属于相应的理想 $C[[z]]I(V)$. 但这个理想可以表示为素理想的交 (参见 LEFSCHETZ 《Algebraic Geometry》第 91 页). 因此 h 本身必属于理想 $C[[z]]I(V)$, 而它在 $C[[z]]$ 中由 f_1, \dots, f_k 生成. 取导数可知, 这意味着余向量 $dh(0)$ 可以表示为余向量 $df_1(0), \dots, df_k(0)$ 的复线性组合. 由此容易推出矩阵 $(\partial f_i / \partial z_j)$ 在 0 处的秩为 $m - n$, 这就证明了原点不可能是 V 的奇异点. \square

读者利用下述结论不难验证, 例 A、B、C 确实具有前述性质.

引理 2.5. 设 V 是由单个多项式方程 $f(x) = 0$ 定义的实代数集或复代数集, 其中 f 是不可约的. 在实数情形, 还需假设 V 包含 f 的一个正则点*. 则每个在 V 上恒为零的多项式都是 f 的倍数.

因此 V 是不可约的, 且奇异集 $\Sigma(V)$ 恰好是 V 与 f 的临界点的交集.

证明. 在复数情形, 这可直接由 Hilbert 零点定理得出. 在实数情形, 将 $V \subset \mathbb{R}^m$ 表示为若干簇 $V_1 \cup \dots \cup V_k$ 的并. 由于 V 中正则点的一个邻域是 $(m - 1)$ 维流形, 拓扑论证表明至少有一个 V_j 的维数必须为 $m - 1$. 于是, 根据 Whitney 的结论, 商域 $\mathbb{R}[x_1, \dots, x_m]/I(V_j)$ 在 \mathbb{R} 上的超越次数为 $m - 1$. 但 $\mathbb{R}[x_1, \dots, x_m]$ 关于主素理想 (f) 的商显然在 \mathbb{R} 上的超越次数也为 $m - 1$. 由于

$$(f) \subset I(V_j),$$

标准论证表明 $(f) = I(V_j)$. (例如参见 LANG, 《代数几何引论》第 29 页.)

因此 f 的零点集与簇 V_j 重合. 这证明了 $V = V_j$, 从而 $I(V)$ 等于主理想 (f) . \square

(注. 对任何局部紧域, 类似的结论也成立, 但对任意域则不成立. 例如, 在有理数域上, 不可约多项式 $x^2 - y - y^3$ 在有理平面上没有临界点, 且只有一个有理零点.)

现在, 我们从 Whitney 的两个定理进一步推出一些推论.

推论 2.6. 任何实代数集或复代数集 V 都可以表示为有限个互不相交集的并

$$V = M_1 \cup M_2 \cup \dots \cup M_p,$$

其中每个 M_j 是只有有限多个分支的光滑流形. 类似地, 任何簇的差 $V - W$ 也可以表示为这样的有限并.

证明. 记 $M_1 = V - \Sigma(V)$ 为 V 的简单点集, 记 $M_2 = \Sigma(V) - \Sigma(\Sigma(V))$ 为 $\Sigma(V)$ 的简单点集, 依此类推. 由于序列

$$V \supset \Sigma(V) \supset \Sigma(\Sigma(V)) \supset \dots$$

必在有限步后终止 (由 2.1), 上述构造必在有限步后停止. 显然 V 是流形 M_i 的不交并. 类似地, $V - W$ 可以表示为不交并 $M'_1 \cup M'_2 \cup \dots \cup M'_p$, 其中每个

$$M'_i = M_i - (W \cap M_i)$$

根据 2.4 都是只有有限多个分支的光滑流形. □

下述引理常常很有用. 如常, 令 Φ 表示实数域或复数域.

记 $M_1 = V - \Sigma(V)$ 为代数集 $V \subset \Phi^m$ 的简单点构成的流形, 并设 g 是 Φ^m 上的多项式函数.

引理 2.7. 限制函数 $g|_{M_1}$ 从 M_1 到 Φ 的临界点*集等于 M_1 与代数集 W 的交集, 其中 W 由 V 中所有使得矩阵

$$\begin{bmatrix} \partial g / \partial x_1 & \dots & \partial g / \partial x_m \\ \partial f_1 / \partial x_1 & \dots & \partial f_1 / \partial x_m \\ \vdots & & \vdots \\ \partial f_k / \partial x_1 & \dots & \partial f_k / \partial x_m \end{bmatrix}$$

的秩 $\leq \rho$ 的点 x 组成, 这里 f_1, \dots, f_k 表示张成 $I(V)$ 的多项式.

证明. 在 M_1 的任一点附近, 我们可以选取 Φ^m 的一个 (实或复) 解析局部坐标系 u_1, \dots, u_m , 使得 M_1 对应于轨迹 $u_1 = \dots = u_\rho = 0$. 于是 $u_{\rho+1}, \dots, u_m$ 可以作为 M_1 上的局部坐标. 注意, 在 M_1 上的点处, $\partial f_i / \partial u_j$ 对 $j \geq \rho + 1$ 为零 (因为 f_i 在 M_1 上恒为零). 由于矩阵 $(\partial f_i / \partial u_j)$ 与矩阵 $(\partial f_i / \partial x_\ell)$ 列等价, 因而秩为 ρ , 可知 $(\partial f_i / \partial u_j)$ 的前 ρ 列必线性无关.

现在, 扩充矩阵

$$\begin{bmatrix} \partial g / \partial u_1 & \dots & \partial g / \partial u_m \\ \partial f_1 / \partial u_1 & \dots & \partial f_1 / \partial u_m \\ \vdots & & \vdots \\ \partial f_k / \partial u_1 & \dots & \partial f_k / \partial u_m \end{bmatrix}$$

具有相同的秩 ρ 当且仅当

$$\partial g / \partial u_{\rho+1} = \cdots = \partial g / \partial u_m = 0;$$

换言之, 当且仅当给定点是 $g|_{M_1}$ 的临界点. 由于这个新矩阵与引理 2.7 中给出的矩阵列等价, 证毕. \square

推论 2.8. $M_1 = \mathbb{V} - \Sigma(\mathbb{V})$ 上的多项式函数 g 最多只有有限个临界值.

(临界值 $g(x) \in \Phi$ 是 g 在临界点的像.)

证明. $g|_{M_1}$ 的临界点集可以表示为代数集的差 $W - \Sigma(V)$, 因而可以表示为光滑流形的有限并,

$$W - \Sigma(V) = M'_1 \cup \cdots \cup M'_p,$$

其中每个 M'_i 都只有有限多个分支.

每一点 $x \in M'_i$ 都是光滑函数 $g|_{M_1}$ 的临界点, 因此它更是限制函数 $g|_{M'_i}$ 的临界点. 由于 M'_i 的所有点都是临界点, 可知 g 在 M'_i 的每个分支上为常数. 因此像集 $g(M'_i)$ 是有限集. 但并集

$$g(M'_1) \cup \cdots \cup g(M'_p)$$

恰好就是 $g|_{M_1}$ 的所有临界值的集合. 证毕. \square

再设 V 为任意实代数集或复代数集. 设 x^0 或是 V 的简单点, 或是奇异集 $\Sigma(V)$ 的孤立点.

推论 2.9. 每个以 x^0 为中心的充分小的球面 S_ε 与 V 的交集都是光滑流形 (可能为空). *

证明. 在实数情形, 这可将 2.8 应用于多项式函数

$$r(x) = \|x - x^0\|^2$$

而得到. 若 ε^2 小于 $r|(V - \Sigma(V))$ 的任一正临界值, 则 ε^2 为正则值, 因而其原像

$$r^{-1}(\varepsilon^2) \cap (V - \Sigma(V)) = S_\varepsilon \cap (V - \Sigma(V))$$

是光滑流形 K . 但若 ε 足够小, 则 S_ε 不会与 $\Sigma(V)$ 相交, 因此 K 等于 $S_\varepsilon \cap V$.

复数情形的相应结论可立即得出, 因为 \mathbb{C}^m 中的每个复簇都可以视为 \mathbb{R}^{2m} 中的实簇. \square

用 D_ε 表示闭圆盘, 由所有满足 $\|x - x^0\| \leq \varepsilon$ 的 x 组成. 再次设 x^0 是 V 的一个简单点或孤立奇点.

定理 2.10. 对于充分小的 ε , V 与 D_ε 的交同胚于 $K = V \cap D_\varepsilon$ 上的锥. 事实上, $(D_\varepsilon, V \cap D_\varepsilon)$ 这对空间同胚于 $(\text{Cone}(S_\varepsilon), \text{Cone}(K))$ 这对空间.

这里, K 上的锥, 记为 $\text{Cone}(K)$, 指的是所有线段

$$tk + (1 - t)x^0, \quad 0 \leq t \leq 1$$

的并集, 其中 $k \in K$, 这些线段将 K 中的点连接到基点 x^0 . 类似定义的 $\text{Cone}(S_\varepsilon)$ 当然精确等于 D_ε .

因此, 如果我们能确定流形 K 以及 K 在 S_ε 中嵌入的方式, 那么我们就能完全确定 V 在 x^0 附近整个邻域内的拓扑结构以及 V 在其坐标空间中的嵌入方式. 例如, 如果 K 是一个拓扑球面, 那么 V 在 x^0 附近必须是拓扑流形.

我们将详细给出证明, 因为类似的方法在后面第 4、5 和 11 节中将是重要的.

证明. 再次只需考虑实情形. 再次取 ε 足够小, 使得圆盘 D_ε 除了 x^0 本身外不包含 V 的任何奇点, 也不包含 $r|_{(V - \Sigma(V))}$ 的任何临界点.

我们将在穿孔圆盘 $D_\varepsilon - x^0$ 上构造一个光滑向量场 $v(x)$, 具有如下两个性质: 向量 $v(x)$ 对所有 x 都指向“远离” x^0 的方向; 即欧氏内积

$$\langle v(x), x - x^0 \rangle$$

严格为正. 并且当 x 属于 $M_1 = V - \Sigma(V)$ 时, 向量 $v(x)$ 与流形 $M_1 = V - \Sigma(V)$ 相切.

首先让我们在局部构造这样的向量场. 给定 $D_\varepsilon - x^0$ 中任意一点 x^α , 我们将在 x^α 的某个邻域 U^α 内构造向量场 $v^\alpha(x)$, 使得上述两个性质得到满足.

如果 x^α 不属于 V , 那么我们可以简单地对所有 $x \in U^\alpha \subset \mathbb{R}^m - V$ 令

$$v^\alpha(x) = x - x^0$$

如果 x^α 属于 V , 因而也属于 M_1 , 则在 x^α 附近选取局部坐标系 u_1, \dots, u_m , 使得 M_1 对应于轨迹 $u_1 = \dots = u_\rho = 0$. 由于 x^α 不是函数 $r|_{M_1}$ 的临界点, 其中 $r(x) = \|x - x^0\|^2$, 所以至少有一个偏导数

$$\partial r / \partial u_{\rho+1}, \dots, \partial r / \partial u_m$$

在 x^α 处非零. (与定理 2.7 的证明比较.) 例如, 如果 $\frac{\partial r}{\partial u_h}$ 在 x^α 处非零, 则设 U^α 为 $\frac{\partial r}{\partial u_h} \neq 0$ 的一个小连通邻域, 并令 $v^\alpha(x)$ 为向量

$$\pm (\partial x_1 / \partial u_h, \dots, \partial x_m / \partial u_h)$$

该向量与过 x 的 u_h 坐标曲线相切; 根据 $\partial r / \partial u_h$ 为正或负来选择正号或负号. 这个向量 $v^\alpha(x)$ 当然

与 M_1 相切, 只要 $x \in M_1$, 因为整条 u_h 坐标曲线都包含在 M_1 中. 进一步地

$$\begin{aligned} 2\langle v^a(x), x - x^0 \rangle &= \sum 2(x_i - x_i^0) v_i^a \\ &= \sum (\partial r / \partial x_i)(\pm \partial x_i / \partial u_h) \end{aligned}$$

对所有 $x \in U^a$ 都等于 $\pm \partial r / \partial u_h > 0$.

现在选取 $D_\varepsilon - x^0$ 上的光滑单位分解 $\{\lambda^a\}$, 使得 $\text{Support}(\lambda^a) \subset U^a$. 那么 $D_\varepsilon - x^0$ 上的向量场

$$v(x) = \sum \lambda^a(x) v^a(x)$$

显然具有所需的性质.

通过令

$$w(x) = v(x) / \langle 2(x - x^0), v(x) \rangle$$

进行归一化, 并考虑微分方程

$$dx/dt = w(x).$$

即, 寻找光滑曲线 $x = p(t)$, 定义在区间 $\alpha < t < \beta$ 上, 满足

$$dp(t)/dt = w(p(t)).$$

给定任意解 $p(t)$, 注意复合函数 $r(p(t))$ 的导数由下式给出

$$\begin{aligned} dr/dt &= \sum (\partial r / \partial x_i) w_i(x) \\ &= \langle 2(x - x^0), w(x) \rangle = 1 \end{aligned}$$

其中 $x = p(t)$. 所以函数 $r(p(t))$ 必须等于 $t + \text{constant}$. 因此, 如有必要, 从参数 t 减去一个常数, 我们可以假设

$$r(p(t)) = \|p(t) - x^0\|^2 = t.$$

这个解 $p(t)$ 当然可以延拓到整个区间 $0 < t \leq \varepsilon^2$ 上.

[证明: 我们可以假设向量场 $w(x)$ 已经在比 $D_\varepsilon - x^0$ 稍大的开集上构造好了, 这样 D_ε 的边界点就不会引起任何麻烦. 根据 Zorn 引理, 给定的解 $p(t)$ 可以延拓到某个最大开区间 $\alpha' < t < \beta'$ 上. 假设例如 $\beta' \leq \varepsilon^2$. 那么我们将把解 $p(t)$ 延拓到一个稍大的区间上, 从而与 β' 的定义矛盾. 由于点 $p(t)$ ($\alpha' < t < \beta'$) 都属于紧集 D_ε , 所以至少存在一个极限点 x' 使得 $\{p(t)\}$ 当 $t \rightarrow \beta'$ 时收敛; 并且显然 $r(x') = \beta' \neq 0$, 因此 $x' \in D_\varepsilon - x^0$. 我们将在 x' 附近使用微分方程 $\frac{dx}{dt} = w(x)$ 的局部存在、唯一性和光滑性定理. 该定理断言, 对于 x' 的某个邻域 U 中的每个 x'' 和包含 β' 的某个任意小的

开区间 I 中的每个 t'' , 存在唯一的解

$$x = q(t), \quad t \in I,$$

满足初始条件 $q(t'') = x''$; 并且 $q(t)$ 是 x'', t'' 和 t 的光滑函数. 为了应用这个定理, 选取 $t'' \in (\alpha', \beta') \cap I$ 并令 x'' 等于 $p(t'')$. 利用局部唯一性定理, 我们可以验证 $p(t) = q(t)$ 对所有定义域公共部分 $(\alpha', \beta') \cap I$ 中的 t 成立. 所以解 p 和 q 可以拼接起来, 得到一个定义在更大区间 $(\alpha', \beta') \cup I$ 上的解. 这个矛盾证明了 $\beta' > \varepsilon^2$; 类似的论证表明 $\alpha' = 0$.]

还要注意, 解 $p(t)$ ($0 < t \leq \varepsilon^2$) 由初始值

$$p(\varepsilon^2) \in S_\varepsilon$$

唯一确定.

对每个 $\alpha \in S_\varepsilon$, 令

$$p(t) = P(\alpha, t), \quad 0 < t \leq \varepsilon^2,$$

为满足初始条件

$$p(\varepsilon^2) = P(\alpha, \varepsilon^2) = \alpha$$

的唯一解.

显然, 这个函数 P 将乘积 $S_\varepsilon \times (0, \varepsilon^2]$ 微分同胚地映到穿孔圆盘 $D_\varepsilon - x^0$ 上. 进一步地, 由于对所有 $x \in M_1$, 向量场 $w(x)$ 都与 M_1 相切, 所以任何接触 M_1 的解曲线都必须包含在 M_1 中. 因此 P 将乘积 $K \times (0, \varepsilon^2]$ 微分同胚地映到 $V \cap (D_\varepsilon - x^0)$ 上.

最后注意, 当 $t \rightarrow 0$ 时, $P(\alpha, t)$ 一致趋于 x^0 . 因此对应关系

$$t\alpha + (1-t)x^0 \mapsto P(\alpha, t\varepsilon^2),$$

对 $0 < t \leq 1$ 定义, 唯一地延拓为从 $\text{Cone}(S_\varepsilon)$ 到 D_ε 的同胚. 进一步地, 这个同胚将 $\text{Cone}(K)$ 映到 $V \cap D_\varepsilon$ 上. 这就完成了定理 2.10 的证明. \square

注记 2.11. 看起来定理 2.10 即使在 x^0 不是 V 的孤立奇异点时也仍然成立. 已知每个代数集都可以被三角剖分, 因此适当选取的任意点的某个邻域同胚于某个空间上的锥, 这一点是肯定的. 例如见 *LOJASIEWICZ, Triangulation of Semi-analytic Sets*.

本节其余部分将研究 V 的非奇异点这一相当平凡的情形, 只是为了确保不会出现任何意外.

引理 2.12. 若 x^0 是 V 的简单点, 则交集 $K = V \cap S_\varepsilon$ 是 S_ε 中不打结的球面, 对所有充分小的 ε 成立.

证明. 显然, 光滑函数 $r(x) = \|x - x^0\|^2$ 限制在 $M_1 = V - \Sigma(V)$ 上在 x^0 处有一个非退化临界点. 因此, 由 MARSTON MORSE 的一个引理, 存在 x^0 附近 M_1 的局部坐标系 u_1, \dots, u_k 使得

$$r(x) = u_1^2 + \dots + u_k^2.$$

(例如见 MILNOR, Morse Theory, §2.2.) 由此立即可知 $K = V \cap S_\varepsilon$ 微分同胚于由所有满足 $u_1^2 + \dots + u_k^2 = \varepsilon^2$ 的 (u_1, \dots, u_k) 构成的球面.

但 Morse 的论证也可以应用于流形对 $M_1 \subset \mathbb{R}^m$. 也就是说: 存在 x^0 附近 \mathbb{R}^m 的局部坐标 u_1, \dots, u_m 使得

$$r(x) = u_1^2 + \dots + u_m^2,$$

且 V 对应于轨迹 $u_{k+1} = \dots = u_m = 0$. 这一加强形式的 Morse 引理的证明是直接的推广, 留给读者.

因此流形对 (S_ε, K) 微分同胚于 u 坐标空间中由一个球面和一个极大子球面构成的对. 这就证明了 2.12. □

现在考虑复超曲面

$$V = f^{-1}(0) \subset \mathbb{C}^{n+1}$$

的一个简单点 z^0 的特殊情形. (与 §1 比较.) 我们想研究集合

$$F_0 = \phi^{-1}(1) = f^{-1}(R_+) \cap S_\varepsilon,$$

其中 $\phi: S_\varepsilon - K \rightarrow S^1$ 由 $\phi(z) = \frac{f(z)}{|f(z)|}$ 定义.

引理 2.13. 若 S_ε 的中心 z^0 是 f 的正则点, 则此“纤维” F_0 微分同胚于 \mathbb{R}^{2n} .

证明. 将 Morse 的论证应用于 z^0 附近 $V \subset f^{-1}(R)$ 的流形对, 我们得到 $f^{-1}(R)$ 的局部坐标 u_1, \dots, u_{2n+1} 使得

$$\|z - z^0\|^2 = u_1^2 + \dots + u_{2n+1}^2;$$

且 V 对应于轨迹 $u_1 = 0$. 那么

$$\phi^{-1}(1) = f^{-1}(R_+) \cap S_\varepsilon$$

将对应于开半球面

$$\pm u_1 > 0, \quad u_1^2 + u_2^2 + \dots + u_{2n+1}^2 = \varepsilon^2;$$

它显然微分同胚于 \mathbb{R}^{2n} . 证毕. □

一旦我们在 §4 证明了纤维化定理, 便可推出映射

$$\phi : S_\varepsilon - K \rightarrow S^1$$

是一个平凡纤维丛的投影映射. 事实上, T. E. Stewart 的一个定理蕴涵, 每个以欧氏空间为纤维、底空间为 S^1 的光滑可定向丛都是平凡的. 见 STEWART, Corollary 1; 或注意任何底空间为 S^1 的光滑丛都由纤维的某个微分同胚所刻画 (§8.4), 且注意欧氏空间的每个微分同胚要么光滑同痕于恒同映射, 要么光滑同痕于一个反射 (STEWART, Theorem 1, 或 MILNOR, *Topology from the Differentiable Viewpoint*, p. 34.)

这就完成了正则点情形的讨论.

第三章

曲线选择引理

本章的目的是证明下述结果.

设 $V \subset \mathbb{R}^m$ 为实代数集, $U \subset \mathbb{R}^m$ 为由有限个多项式不等式定义的开集:

$$U = \{x \in \mathbb{R}^m \mid g_1(x) > 0, \dots, g_\ell(x) > 0\}.$$

引理 3.1 (曲线选择引理). 若 $U \cap V$ 包含任意接近原点的点 (即若 $0 \in \text{Closure}(U \cap V)$), 则存在一条实解析曲线

$$p: [0, \varepsilon) \rightarrow \mathbb{R}^m$$

满足 $p(0) = 0$ 且对 $t > 0$ 有 $p(t) \in U \cap V$.

(参见 BRUHAT 和 CARTAN 以及 WALLACE, Algebraic Approximation, §18.3.)

证明. 首先假设 V 的维数 ≥ 2 . 下面将构造一个真代数子集 $V_1 \subset V$ 使得 $0 \in \text{Closure}(U \cap V_1)$. 这个过程可以归纳地进行, 直到找到维数 ≤ 1 的代数子集 V_q 满足 $0 \in \text{Closure}(U \cap V_q)$.

不妨设 V 是不可约的. 若 V 是两个真代数子集的并, 则这两个子集之一可作为 V_1 .

还可以假设开集 U 在 0 的某个邻域 D_η 内不包含奇异集 $\Sigma(V)$ 的任何点. 否则可取 V_1 为 $\Sigma(V)$.

使用微分的语言将是方便的. 根据定义, 多项式 f 在 x 处的微分 $df(x)$ 是对偶向量空间

$$\text{Hom}_{\mathbb{R}}(\mathbb{R}^m, \mathbb{R})$$

中对应于行向量

$$(\partial f / \partial x_1, \dots, \partial f / \partial x_m)$$

在 x 处取值的元素.



设 f_1, \dots, f_k 张成理想 $I(V)$. 回忆奇异集 $\Sigma(V)$ 是所有满足

$$\text{rank} \{df_1(x), \dots, df_k(x)\} < \rho;$$

的 $x \in V$ 组成的集合, 其中簇 V 的维数为 $m - \rho$.

下面使用两个辅助函数:

$$r(x) = \|x\|^2, \quad g(x) = g_1(x)g_2(x) \dots g_\ell(x).$$

记 V' 为 V 中所有满足

$$\text{rank} \{df_1(x), \dots, df_k(x), dr(x), dg(x)\} \leq \rho + 1$$

的 x 组成的集合.

下面证明:

引理 3.2. 交集 $U \cap V'$ 也包含任意接近 0 的点.

证明. 根据假设, 存在以 0 为中心的任意小的球面 S_ε 包含 $U \cap V$ 的点. 任取这样一个球面 S_ε , 并考虑由所有满足

$$g_1(x) \geq 0, \dots, g_\ell(x) \geq 0$$

的 $x \in V \cap S_\varepsilon$ 组成的紧集. 连续函数 g 必在这个紧集的某点 x' 处达到最大值; 显然 $x' \in U$.

下面证明 $x' \in V'$.

首先注意, S_ε 与 $U \cap V$ 的交是一个维数为 $m - \rho - 1$ 的光滑流形; 且

$$\text{rank} \{df_1(x), \dots, df_k(x), dr(x)\} = \rho + 1$$

在 $U \cap V \cap S_\varepsilon$ 的每一点 x 处成立. 只要 ε 足够小, 这由 2.9 和 2.7 的证明以及 $U \cap S_\varepsilon$ 不包含 V 的奇异点这一事实直接得到.

现在, 如 §2.7 中那样进行, 可以看到 $g|_{U \cap V \cap S_\varepsilon}$ 的临界点恰是 $U \cap V \cap S_\varepsilon$ 中位于 V' 中的那些点. 但 $g|_{U \cap V \cap S_\varepsilon}$ 在 x' 处达到最大值. 所以 x' 当然是一个临界点; 因此属于 V' .

这就完成了 3.2 的证明. □

于是, 若 V' 是 V 的真子集, 则它满足要求. 还剩下 $V = V'$ 的情况如何处理的问题.

还可以用函数

$$(x_1, \dots, x_m) \mapsto x_i g(x_1, \dots, x_m)$$

代替 g 来进行上述构造. 记 V'_i 为 V 中所有满足

$$\text{rank} \{df_1(x), \dots, df_k(x), dr(x), d(x_i g)(x)\} \leq \rho + 1$$

的 x 组成的集合.

那么类似的论证表明 $0 \in \text{Closure}(U \cap V'_i)$.

因此, 除了

$$V = V' = V'_1 = \dots = V'_m$$

的情形外, 都找到了合适的代数子集 $V_1 \subset V$.

断言. 这种情形只可能在 V 的维数 $m - \rho$ 等于 1 时发生.

证明. 当然可以选取一点 $x' \in U \cap V$ 使得

$$\text{rank} \{df_1(x'), \dots, df_k(x'), dr(x')\} = \rho + 1.$$

(与 3.2 的证明比较.) 若 $V = V'$, 则 $x' \in V'$, 因此微分 $dg(x')$ 必属于由

$$\{df_1(x'), \dots, df_k(x'), dr(x')\}$$

张成的 $\rho + 1$ 维向量空间.

类似地, 若 $V = V'_i$, 则 $d(x_i g)(x')$ 必属于这个向量空间. 利用恒等式

$$d(x_i g) = (dx_i)g + x_i(dg)$$

以及 $g(x') \neq 0$ (因为 $x' \in U$) 的事实, 可知 $dx_i(x')$ 也属于这个 $\rho + 1$ 维向量空间. 但微分 dx_1, \dots, dx_m 构成 x' 处整个 m 维微分向量空间的一个基. 所以由 $df_1(x'), \dots, df_k(x')$ 和 $dr(x')$ 张成的子空间必是整个空间; 且其维数 $\rho + 1$ 必等于 m . 这就证明了 V 的维数 $m - \rho$ 等于 1. \square

现在可以利用 1 维簇的经典局部描述:

引理 3.3. 设 x^0 是实 (或复) I 维簇 V 的非孤立点. 则 x^0 在 V 中的某个适当选取的邻域是有限多条“分支”的并, 这些分支只在 x^0 处相交. 每条分支在实数情形同胚于实数的开区间 (或在复数情形同胚于复数的开圆盘), 通过一个由幂级数

$$p(t) = x^0 + a_1 t + a_2 t^2 + a_3 t^3 + \dots,$$

给出的同胚 $x = p(t)$, 该级数在 $|t| < \varepsilon$ 时收敛.

注. 设 k 是最小的下标使得 V 不包含在坐标超平面 $x_k = \text{constant}$ 中. 则**参数化** p 总可以选取使得 $x_k = p_k(t)$ 是如下形式的多项式函数,

$$p_k(t) = \text{constant} \pm t^\mu,$$

其中 $\mu \geq 1$. 进一步, p 总可以选取使得**指数集合** $\{i \mid a_i \neq 0\}$ 的**最大公约数**等于 1. 此时幂级数 p 在参数 t 的符号意义下 (或在复数情形在 t 乘以**单位根**的意义下) 唯一确定.

证明. 对 \mathbb{C}^2 中的复曲线, 这可在例如 VAN DER WAERDEN, Algebraische Geometrie, §14 中找到证明. $m > 2$ 时 \mathbb{C}^m 中复曲线的情形可以完全一样地处理.

实 1 维簇 $V \subset \mathbb{R}^m$ 的情形可如下处理. 设 $V_{\mathbb{C}}$ 是 \mathbb{C}^m 中包含 V 的最小复代数集. 容易验证 $V_{\mathbb{C}}$ 是不可约的, 复维数为 1, 且 $V_{\mathbb{C}}$ 的实点集 $\mathbb{R}^m \cap V_{\mathbb{C}}$ 等于 V . 现在对 $V_{\mathbb{C}}$ 的每条分支, 可以形成复**参数化**

$$x = p(t) = x^0 + \left(0, \dots, 0, t^\mu, \sum_i a_{k+1,i} t^i, \dots, \sum_i a_{mi} t^i \right).$$

然后必须问: 对于哪些复参数 t 的值, 向量 $p(t)$ 是实的? 显然第 k 个分量 t^μ 是实的当且仅当 t 可表示为 2μ 次**单位根** ξ 与实数 s 的乘积. 但对每个 ξ 的选择, 在幂级数 p 中代入 $t = \xi s$, 得到实变量 s 的一个新的复幂级数 $x^0 + \sum (a_i \xi^i) s^i$. 若系数 $a_i \xi^i$ 都是实的, 则显然 $p(\xi s) \in \mathbb{R}^m$. 但若某个系数向量 $a_i \xi^i$ 不是实的, 则对所有小的非零值 s 有 $p(\xi s) \notin \mathbb{R}^m$. 因此 $V_{\mathbb{C}}$ 的每条分支与 \mathbb{R}^m 的交至多是实簇 V 的有限多条分支 (实际上至多一条分支). 这就证明了引理 3.3. □

[注. 推测 3.3 对任何局部紧域也成立; 虽然现在的证明不适用.]

现在准备完成曲线选择引理 3.1 的证明. 假设 V 包含任意接近 0 的点 x 满足 $x \in U$, 即满足

$$g_1(x) > 0, \dots, g_\ell(x) > 0;$$

且假设 V 的维数为 1. 则通过 0 的 V 的有限多条分支之一必包含任意接近 0 的 U 中的点. 设

$$x = p(t), \quad |t| < \varepsilon$$

是该分支的实解析**参数化**. 对每个 g_i , 注意实解析函数 $g_i(p(t))$ 必在区间 $0 < t < \varepsilon'$ 中对所有 t 要么 > 0 , 要么 ≤ 0 . 所以对充分小的 ε' , **半分支** $p(0, \varepsilon')$ 要么包含于 U 中, 要么与 U 不交. 类似地, 半分支 $p(-\varepsilon', 0)$ 包含于 U 或与 U 不交.

但已假设 $p(-\varepsilon, \varepsilon)$ 包含任意接近 0 的 U 中的点, 所以这两条**半分支**中至少有一条必包含于 U 中. 这就完成了 3.1 的证明. □

作为 §3 的结束, 下面给出引理 3.1 的一个典型应用, 它在 §11 中将是有益的.

推论 3.4. 若 $f \geq 0$ 和 $g \geq 0$ 是 \mathbb{R}^m 上的非负多项式函数, 在 x^0 处为零, 则对属于 x^0 的某个邻域 D_ε 的 x , 两个微分 $df(x)$ 和 $dg(x)$ 不可能指向恰好相反的方向, 除非至少其中之一为零.

证明. 记 U 为所有满足内积

$$\sum_i (\partial f(x)/\partial x_i) (\partial g(x)/\partial x_i)$$

为负的 x 组成的开集, V 为所有满足

$$\text{rank} \{df(x), dg(x)\} \leq 1$$

的 x 组成的代数集.

于是 $U \cap V$ 是所有满足 $df(x)$ 和 $dg(x)$ 指向恰好相反方向的 x 组成的集合.

若 $U \cap V$ 包含任意接近 x^0 的点, 则存在整条实解析曲线

$$x = p(t), \quad 0 \leq t < \varepsilon,$$

完全由这样的点组成, 除了 $x^0 = p(0)$.

对每个 $x \in U$, 注意 $f(x) > 0$ 且 $g(x) > 0$. 因为若非负函数 f 在 x 处为零, 则微分 $df(x)$ 必也为零, 因此 x 不可能属于 U . 所以

$$f(p(t)) > 0 \text{ 对 } t > 0;$$

且由于 $f \circ p$ 是实解析的, 这意味着对小的正数值 t 也有 $\frac{df(p(t))}{dt} > 0$. 类似地, 对小的正 t , $\frac{dg(p(t))}{dt}$ 为正. 但

$$df/dt = \sum (\partial f/\partial x_i) dp_i/dt, \quad dg/dt = \sum (\partial g/\partial x_i) dp_i/dt,$$

其中行向量 $(\partial f/\partial x_1, \dots, \partial f/\partial x_m)$ 对所有 $t > 0$ 是 $(\partial g/\partial x_1, \dots, \partial g/\partial x_m)$ 的负倍数. 因此 df/dt 和 dg/dt 必有相反的符号.

这个矛盾表明原假设必不成立: x^0 不可能是 $U \cap V$ 的极限点. □

第四章 纤维化定理

定义 m 个复变量的解析函数 $f(z_1, \dots, z_m)$ 的梯度为 m -元组

$$\text{grad } f = \left(\overline{\partial f / \partial z_1}, \dots, \overline{\partial f / \partial z_m} \right)$$

其第 j 个分量是 $\partial f / \partial z_j$ 的复共轭. 选择这一定义, 使得 f 沿路径 $z = p(t)$ 的导数满足如下链式法则

$$df(p(t))/dt = \langle dp/dt, \text{grad } f \rangle,$$

其中使用 Hermite 内积

$$\langle a, b \rangle = \sum a_j \bar{b}_j.$$

换言之, f 在点 z 沿向量 v 的方向导数等于内积 $\langle v, \text{grad } f(z) \rangle$.

记 K 为 f 的零点集与球面 S_ε 的交, 即 \mathbb{C}^m 中满足 $\|z\| = \varepsilon$ 的所有 z . 通过对应关系

$$\phi(z) = f(z)/|f(z)|$$

将补集 $S_\varepsilon - K$ 映射到单位圆 S^1 .

引理 4.1. 映射 $\phi: S_\varepsilon - K \rightarrow S^1$ 的临界点恰为那些点 $z \in S_\varepsilon - K$, 使得向量 $i \text{grad } \log f(z)$ 是向量 z 的实数倍.

(f 的对数当然是多值函数, 但在局部对数可定义为单值函数. 其梯度

$$\text{grad } \log f(z) = (\text{grad } f(z))/\bar{f}(z),$$

处处良定义. 类似评注适用于下面考虑的函数 $\theta(z)$.)

证明. 设 $f(z)/|f(z)| = e^{i\theta(z)}$, 注意角度 $\theta(z)$ 可描述为 $-i \log f(z)$ 的实部. (为看出这一点, 将方程

$$i\theta = \log(f/|f|) = \log f - \log |f|$$

乘以 $-i$ 并取两边的实部.) 对方程

$$\theta = \mathcal{R}(-i \log f)$$

沿曲线 $z = p(t)$ 求导, 可得

$$\begin{aligned} d\theta(p(t))/dt &= \mathcal{R}(d(-i \log f)/dt) \\ &= \mathcal{R}\langle dp/dt, \text{grad}(-i \log f) \rangle \\ &= \mathcal{R}\langle dp/dt, i \text{grad} \log f \rangle. \end{aligned}$$

换言之, 函数 $\theta(z)$ 在方向 $v = dp/dt$ 的方向导数等于

$$\mathcal{R}\langle v, i \text{grad} \log f(z) \rangle.$$

注意, Hermite 向量空间 \mathbb{C}^m 也可视为 Euclid 向量空间 (实维数为 $2m$), 两个向量 a 和 b 的 Euclid 内积定义为实部

$$\mathcal{R}\langle a, b \rangle = \mathcal{R}\langle b, a \rangle.$$

例如, 向量 v 在 z 处切于球面 S_ε 当且仅当实内积 $\mathcal{R}\langle v, z \rangle$ 为零.

若向量 $i \text{grad} \log f(z)$ 恰为 z 的实数倍 (换言之, 若该向量垂直于 S_ε), 则对每个在 z 处切于 S_ε 的向量 v , 方向导数

$$\mathcal{R}\langle v, i \text{grad} \log f(z) \rangle$$

沿方向 v 为零. 因此 z 是映射 ϕ 的临界点.

反之, 若向量 $i \text{grad} \log f(z)$ 和 z 在实数域上线性无关, 则存在 Euclid 向量空间中一个向量 v 使得

$$\mathcal{R}\langle v, z \rangle = 0,$$

$$\mathcal{R}\langle v, i \text{grad} \log f(z) \rangle = 1.$$

因此 v 切于 S_ε 且 θ 沿 v 的方向导数为 $+1 \neq 0$. 故 z 不是 ϕ 的临界点. 引理 4.1 得证. □

设 f 为在零点处为零的多项式.

下面证明, 对充分小的 ε , 相应映射

$$\phi : S_\varepsilon - K \rightarrow S^1$$

没有临界点. 由引理 4.1, 需证如下结论. 记 V 为超曲面 $f^{-1}(0) \subset \mathbb{C}^m$.

引理 4.2. 对每个充分靠近原点的 $z \in \mathbb{C}^m - V$, 两个向量 z 和 $i \operatorname{grad} \log f(z)$ 在 \mathbb{R} 上线性无关.

事实上, 下面证明一个稍强的结论:

引理 4.3. 给定任意在原点处为零的多项式 f , 存在数 $\varepsilon_0 > 0$, 使得对所有满足 $\|z\| \leq \varepsilon_0$ 的 $z \in \mathbb{C}^m - V$, 两个向量 z 和 $\operatorname{grad} \log f(z)$ 要么在复数域上线性无关, 要么

$$\operatorname{grad} \log f(z) = \lambda z$$

其中 λ 为非零复数, 其辐角的绝对值小于 $\pi/4$.

换言之, λ 位于复平面的开象限中, 该象限以正实轴为中心. 由此可得

$$\mathcal{R}(\lambda) > 0;$$

故 λ 不能是纯虚数. 于是引理 4.2 从引理 4.3 推出.

引理 4.3 的证明依赖于第 3 节的曲线选择引理以及如下结论.

引理 4.4. 设 $p: [0, \varepsilon) \rightarrow \mathbb{C}^m$ 为实解析路径, 满足 $p(0) = 0$, 使得对每个 $t > 0$, 数 $f(p(t))$ 非零且向量 $\operatorname{grad} \log f(p(t))$ 为复数倍 $\lambda(t)p(t)$. 则复数 $\lambda(t)$ 的辐角当 $t \rightarrow 0$ 时趋于零.

换言之, $\lambda(t)$ 对小的正 t 值非零且 $\lim_{t \rightarrow 0} \lambda(t)/|\lambda(t)| = 1$.

证明. 考虑 Taylor 展开

$$\begin{aligned} p(t) &= at^\alpha + a_1t^{\alpha+1} + a_2t^{\alpha+2} + \dots, \\ f(p(t)) &= bt^\beta + b_1t^{\beta+1} + b_2t^{\beta+2} + \dots, \\ \operatorname{grad} f(p(t)) &= ct^\gamma + c_1t^{\gamma+1} + c_2t^{\gamma+2} + \dots, \end{aligned}$$

其中首项系数 a, b, c 非零. (恒等式 $df/dt = \langle dp/dt, \operatorname{grad} f \rangle$ 表明 $\operatorname{grad} f(p(t))$ 不能恒等于零.) 首项指数 α, β, γ 为整数, 满足 $\alpha \geq 1, \beta \geq 1, \gamma \geq 0$. 这些级数在 $|t| < \varepsilon'$ 时收敛.

对每个 $t > 0$ 有

$$\operatorname{grad} \log f(p(t)) = \lambda(t)p(t),$$

因此

$$\operatorname{grad} f(p(t)) = \lambda(t)p(t)\overline{f(p(t))},$$

或等价地

$$(ct^\gamma + \dots) = \lambda(t)(a\bar{b}t^{\alpha+\beta} + \dots).$$

比较这两个向量值函数的相应分量, 可知 $\lambda(t)$ 为实解析函数的商, 因此具有如下形式的 Laurent 展开

$$\lambda(t) = \lambda_0 t^{\gamma-\alpha-\beta} (1 + k_1 t + k_2 t^2 + \dots).$$

此外, 首项系数必须满足方程

$$c = \lambda_0 a \bar{b}.$$

将此方程代入恒等式

$$df/dt = \langle dp/dt, \text{grad } f \rangle$$

的幂级数展开中, 可得

$$\begin{aligned} (\beta b t^{\beta-1} + \dots) &= \langle \alpha a t^{\alpha-1} + \dots, \lambda_0 a \bar{b} t^\gamma + \dots \rangle \\ &= \alpha \|a\|^2 \bar{\lambda}_0 b t^{\alpha-1+\gamma} + \dots \end{aligned}$$

比较首项系数得

$$\beta = \alpha \|a\|^2 \bar{\lambda}_0$$

这证明了 λ_0 为正实数. 因此

$$\lim_{t \rightarrow 0} \arg \lambda(t) = 0,$$

引理 4.4 得证. □

引理 4.3 的证明. 首先假设存在任意靠近原点的点 $z \in \mathbb{C}^m - V$ 满足

$$\text{grad } \log f(z) = \lambda z \neq 0,$$

且 $|\arg \lambda|$ 严格大于 $\pi/4$. 换言之, 假设 λ 位于开半平面

$$\mathcal{R}((1+i)\lambda) < 0$$

或开半平面

$$\mathcal{R}((1-i)\lambda) < 0.$$

下面将用多项式等式和不等式来表达这些条件, 以便应用第 3 节的曲线选择引理.

记 W 为 \mathbb{C}^m 中所有使得向量 $\text{grad } f(z)$ 和 z 线性相关的 z 的集合. 因此 $z \in W$ 当且仅当方程

$$z_j \left(\overline{\partial f / \partial z_k} \right) = z_k \left(\overline{\partial f / \partial z_j} \right)$$

成立. 设 $z_j = x_j + iy_j$, 并取实部和虚部, 可得关于实变量 x_j 和 y_j 的一组实多项式方程. 这证明了

$W \subset \mathbb{C}^m$ 为实代数集.

注意, 点 $z \in \mathbb{C}^m - V$ 属于 W 当且仅当

$$(\text{grad } f(z))/\bar{f}(z) = \lambda z$$

对某个复数 λ 成立. 乘以 $\bar{f}(z)$ 并取与 $\bar{f}(z)z$ 的内积, 得

$$\langle \text{grad } f(z), \bar{f}(z)z \rangle = \lambda \|\bar{f}(z)z\|^2.$$

换言之, 数 λ 乘以一个正实数等于

$$\lambda'(z) = \langle \text{grad } f(z), \bar{f}(z)z \rangle.$$

因此

$$\arg \lambda = \arg \lambda'.$$

显然 λ' 为实变量 x_j 和 y_j 的 (复值) 多项式函数.

记 U_+ (分别 U_-) 为由满足实多项式不等式

$$(*) \quad \mathcal{R}((1+i)\lambda'(z)) < 0$$

(分别

$$\mathcal{R}((1-i)\lambda'(z)) < 0)$$

的所有 z 组成的开集.

已假设存在任意靠近原点的点 z 满足 $z \in W \cap (U_+ \cup U_-)$. 因此, 由曲线选择引理 3.1, 必存在实解析路径

$$p: [0, \varepsilon) \rightarrow \mathbb{C}^m$$

满足 $p(0) = 0$ 且要么

$$p(t) \in W \cap U_+$$

对所有 $t > 0$ 成立, 要么

$$p(t) \in W \cap U_-$$

对所有 $t > 0$ 成立. 在任一情形下, 对每个 $t > 0$ 有

$$\text{grad } \log f(p(t)) = \lambda(t)p(t)$$

满足

$$|\arg \lambda(t)| > \pi/4;$$

这与引理 4.4 矛盾.

这一矛盾尚未完成引理 4.3 的证明. 还存在 $W - (V \cap W)$ 包含任意靠近原点的点 z 满足 $\lambda'(z) = 0$ 或

$$|\arg \lambda'(z)| = \pi/4$$

的可能. 但在这种情形下, 可用基本上相同的论证, 将多项式等式

$$\mathcal{R}((1+i)\lambda'(z))\mathcal{R}((1-i)\lambda'(z)) = 0,$$

连同多项式不等式

$$\|f(z)\|^2 > 0,$$

代替不等式 (*). 仍将得到一条路径 $p(t)$ 与引理 4.4 矛盾. 这一矛盾完成了引理 4.3 和引理 4.2 的证明. □

结合引理 4.1 和引理 4.2, 得:

推论 4.5. 若 $\varepsilon \leq \varepsilon_0$, 则映射

$$\phi : S_\varepsilon - K \rightarrow S^1$$

没有临界点.

由此, 对每个 $e^{i\theta} \in S^1$, 原像

$$F_\theta = \phi^{-1}(e^{i\theta}) \subset S_\varepsilon - K$$

为光滑 $(2m-2)$ 维流形.

为证明 ϕ 实为局部平凡纤维化的投影映射, 需进一步利用引理 4.3, 以仔细控制当 z 趋于 ϕ 未定义的点集 K 时 $\phi(z)$ 的行为.

引理 4.6. 若 $\varepsilon \leq \varepsilon_0$, 则在 $S_\varepsilon - K$ 上存在光滑切向量场 $v(z)$, 使得对每个 $z \in S_\varepsilon - K$, 复内积

$$\langle v(z), i \operatorname{grad} \log f(z) \rangle$$

非零, 且其辐角的绝对值小于 $\pi/4$.

证明. 与引理 2.10 的证明类似, 只需在某给定点 z^a 的邻域内局部构造这样的向量场.

情形 1. 若向量 z^a 和 $\text{grad log } f(z^a)$ 在 \mathbb{C} 上线性无关, 则线性方程组

$$\begin{aligned}\langle v, z^a \rangle &= 0, \\ \langle v, i \text{grad log } f(z^a) \rangle &= 1\end{aligned}$$

有联立解 v . 第一个方程保证 $\mathcal{R}\langle v, z^a \rangle = 0$, 因此 v 在 z^a 处切于 S_ε .

情形 2. 若 $\text{grad log } f(z^a)$ 等于某个倍 λz^a , 则设 $v = iz^a$. 显然

$$\mathcal{R}\langle iz^a, z^a \rangle = 0;$$

且由引理 4.3, 数

$$\langle iz^a, i \text{grad log } f(z^a) \rangle = \bar{\lambda} \|z^a\|^2$$

的辐角的绝对值小于 $\pi/4$.

在任一情形下, 可选取一个局部切向量场 $v^a(z)$, 它在 z^a 处取构造的值 v . 则条件

$$|\arg\langle v^a(z), i \text{grad log } f(z) \rangle| < \pi/4$$

必在 z^a 的整个邻域内成立. 使用单位分解, 得到一个具有相同性质的整体向量场 $v(z)$. 引理 4.6 得证. \square

接下来通过设

$$w(z) = v(z) / \mathcal{R}\langle v(z), i \text{grad log } f(z) \rangle$$

进行归一化.

由此得到 $S_\varepsilon - K$ 上的一个光滑切向量场 w , 满足两个条件: 内积

$$\langle w(z), i \text{grad log } f(z) \rangle$$

的实部恒等于 1; 且相应的虚部满足

$$|\mathcal{R}\langle w(z), \text{grad log } f(z) \rangle| < 1.$$

考虑微分方程 $dz/dt = w(z)$ 的轨迹.

引理 4.7. 给定任意 $z^0 \in S_\varepsilon - K$, 存在唯一的光滑路径

$$p: \mathbb{R} \rightarrow S_\varepsilon - K$$

满足微分方程

$$dp/dt = w(p(t))$$

且初值条件 $p(0) = z^0$.

证明. 这样的解 $z = p(t)$ 当然局部存在, 且可延拓到某个极大开实数区间. 由于 $S_\varepsilon - K$ 非紧, 唯一需确保的是当 t 趋于某个有限极限 t_0 时 $p(t)$ 不能趋于 K . (与引理 2.10 的证明比较.) 即必须保证 $f(p(t))$ 不能趋于零, 或

$$\mathcal{R} \log f(p(t)) \rightarrow -\infty,$$

当 $t \rightarrow t_0$ 时. 但导数

$$\begin{aligned} d\mathcal{R} \log f/dt &= \mathcal{R}\langle dp/dt, \text{grad} \log f \rangle \\ &= \mathcal{R}\langle w(p(t)), \text{grad} \log f \rangle \end{aligned}$$

的绝对值小于 1. 因此当 t 趋于任何有限极限时 $|f(p(t))|$ 远离零有界. 引理 4.7 得证. \square

设 $\phi(z) = e^{i\theta(z)}$, 与引理 4.1 的证明中相同, 注意

$$d\theta(p(t))/dt = \mathcal{R}\langle dp/dt, i \text{grad} \log f \rangle$$

恒等于 1. 因此

$$\theta(p(t)) = t + \text{常数}.$$

换言之, 路径 $p(t)$ 在 ϕ 下的投影是一条以单位速度沿正方向环绕单位圆的路径.

显然点 $p(t)$ 既是 t 的光滑函数, 也是初值

$$z^0 = p(0)$$

的光滑函数.

通过设

$$p(t) = h_t(z^0)$$

来表达这种依赖关系.

于是每个 h_t 是一个微分同胚, 将 $S_\varepsilon - K$ 映到自身, 并将每个纤维 $F_\theta = \phi^{-1}(e^{i\theta})$ 映到纤维 $F_{\theta+t}$. 下面可以毫无困难地证明纤维化定理:

定理 4.8(纤维化定理). 对 $\varepsilon \leq \varepsilon_0$, 空间 $S_\varepsilon - K$ 为 S^1 上的光滑纤维丛, 投影映射为 $\phi(z) = f(z)/|f(z)|$.

证明. 给定 $e^{i\theta} \in S^1$, 设 U 为 $e^{i\theta}$ 的一个小邻域. 则对应关系

$$(e^{i(t+\theta)}, z) \mapsto h_t(z),$$

对 $|t| < \text{常数}$, 且 $z \in F_\theta$, 将乘积 $U \times F_\theta$ 微分同胚地映到 $\phi^{-1}(U)$. 定理 4.8 得证.

□

第五章

纤维与 K 的拓扑

我们继续研究局部平凡纤维化

$$\phi : S_\varepsilon - K \rightarrow S^1$$

它关联于一个在原点处取零值的多项式 $f(z_1, \dots, z_m)$. 置 $m = n + 1 \geq 1$, 由 §4 可知每根纤维

$$F_\theta = \phi^{-1}(e^{i\theta})$$

都是一个 (实) $2n$ 维的光滑流形. 本节将应用 Morse 理论研究 F_θ 与 K 的拓扑. 两个主要结果如下:

定理 5.1. 每根纤维 F_θ 都是可平行化的, 并且具有有限 CW-复形的同伦型, 其维数为 n .

定理 5.2. 空间 $K = V \cap S_\varepsilon$ 是 $(n - 2)$ -连通的.

于是当 $n \geq 2$ 时空间 K 是连通的, 当 $n \geq 3$ 时它是单连通的. (当 $n = 1$ 时, 类似的论证只能证明 K 非空.)

本节最后给出纤维的另一种描述: 每根 F_θ 都微分同胚于某个非奇异复超曲面的开子集, 该开子集由所有满足 $\|z\| < \varepsilon$ 且 $f(z) = \text{常数}$ 的 z 组成.

定理 5.1 的证明依赖于对与光滑实值函数 $|f|$ 在 F_θ 上的 Morse 理论的研究. 定理 5.2 的证明则依赖于对全空间 $S_\varepsilon - K$ 上的光滑函数 $|f|$ 的平行研究. 在每种情形下, 都要证明 $|f|$ 在任意临界点处的 Morse 指标都 $\geq n$.

作为第一步, 必须确定临界点的位置. 为方便起见, 改用如下光滑函数 $a_\theta : F_\theta \rightarrow \mathbb{R}$ 和 $a : S_\varepsilon - K \rightarrow \mathbb{R}$:

$$a_\theta(z) = a(z) = \log |f(z)|.$$

显然 a 的临界点与 $|f|$ 在 $S_\varepsilon - K$ 上的临界点相同, 同样 a_θ 的临界点与 $|f|$ 限制在 F_θ 上的临界点相同.

引理 5.3. 光滑实值函数 $a_\theta(z) = \log |f(z)|$ 在 F_θ 上的临界点, 恰是满足向量 $\text{grad} \log f(z)$ 为 z 的复数倍的那些点 $z \in F_\theta$.

证明. 仿照定理 4.1 的证明, 注意函数

$$\log |f(z)| = \mathcal{R} \log f(z)$$

沿任意方向 v 的方向导数等于实内积

$$\mathcal{R}\langle v, \text{grad} \log f(z) \rangle.$$

于是 z 是该函数限制在 F_θ 上的临界点当且仅当向量 $\text{grad} \log f(z)$ 在 z 处与 F_θ 法向. (这里的“法向”指“与所有切向量正交”, 使用实内积.)

但对照定理 4.1 的证明可见, 子流形 $F_\theta \subset \mathbb{C}^m$ (实余维数为 2) 的法向空间由两个独立向量 z 和 $i \text{grad} \log f(z)$ 张成. 因此 z 是 a_θ 的临界点当且仅当向量 $\text{grad} \log f(z)$ 、 z 和 $i \text{grad} \log f(z)$ 之间存在实线性关系. 这便证明了引理 5.3. \square

注记 5.4. 注意 F_θ 在临界点 z 处的切空间实际上是一个复向量空间, 由所有满足 $\langle v, z \rangle = 0$ 的 v 组成. 这是因为若 $i \text{grad} \log f(z)$ 是 z 的复数倍, 则向量 v 与 z 和 $i \text{grad} \log f(z)$ 都实正交当且仅当它与 z 复正交.

接下来必须研究光滑函数 a_θ 在临界点处的 Hessian 阵以计算 Morse 指标. 我们将采用如下 Hessian 阵的解释. 给定临界点 z 处的切向量 v , 选取光滑路径

$$p: \mathbb{R} \rightarrow F_\theta$$

使得速度向量 $dp/dt = v$ 在 $p(0) = z$ 处. 则二阶导数

$$\ddot{a}_\theta = d^2 a_\theta(p(t))/dt^2$$

在 $t = 0$ 处可表示为 v 的二次函数, 该二次函数即为 Hessian 阵.

引理 5.5. $a_\theta(p(t))$ 在 $t = 0$ 处的二阶导数由形如

$$\ddot{a}_\theta = \sum \mathcal{R}(b_{jk} v_j v_k) - c \|v\|^2$$

的表达式给出, 其中 (b_{jk}) 是复数矩阵而 c 是正实数.

证明. 首先注意路径 $p(t)$ 位于流形 F_θ 上, 而 $f/|f| = e^{i\theta}$ 在其上为常数. 将恒等式

$$a_\theta(p(t)) = \log |f(p(t))| = \log f(p(t)) - i\theta$$

求导得

$$\dot{a}_\theta = d \log f / dt = \sum (\partial \log f / \partial z_j) (dp_j / dt).$$

再次求导:

$$\begin{aligned} \ddot{a}_\theta &= \sum (\partial \log f / \partial z_j) (d^2 p_j / dt^2) \\ &+ \sum (\partial^2 \log f / \partial z_j \partial z_k) (dp_j / dt) (dp_k / dt). \end{aligned}$$

置 $t = 0$, 并令

$$\text{grad } \log f(z) = \lambda z$$

(由引理 5.3), 再引入简记

$$D_{jk} = \partial^2 \log f / \partial z_j \partial z_k,$$

上式可写成

$$\ddot{a}_\theta = \langle \ddot{p}, \lambda z \rangle + \sum D_{jk} v_j v_k,$$

其中左端 \ddot{a}_θ 显然是实的. 现将两边乘以 λ 并取实部:

$$\ddot{a}_\theta \mathcal{R}(\lambda) = |\lambda|^2 \mathcal{R} \langle \ddot{p}, z \rangle + \sum \mathcal{R}(\lambda D_{jk} v_j v_k).$$

代入恒等式

$$\mathcal{R} \langle \ddot{p}, z \rangle = -\|v\|^2,$$

该恒等式由方程 $\langle p(t), p(t) \rangle = \text{常数}$ 两次求导得到, 可得

$$\ddot{a}_\theta \mathcal{R}(\lambda) = \sum \mathcal{R}(\lambda D_{jk} v_j v_k) - \|\lambda v\|^2.$$

两边除以 $\mathcal{R}(\lambda)$ (由 §4.3 知其为止), 这便完成了引理 5.5 的证明. □

现在可以容易地估计指标了.

引理 5.6. $a_\theta : F_\theta \rightarrow \mathbb{R}$ 在临界点处的 Morse 指标 $\geq n$. 因此 $a : S_\varepsilon - K \rightarrow \mathbb{R}$ 在任意临界点处的 Morse 指标也 $\geq n$.

证明. 二次函数

$$H(v) = \mathcal{R} \left(\sum b_{jk} v_j v_k \right) - c \|v\|^2$$

的 Morse 指标 I (其中 v 取遍 F_θ 在 z 处的切空间) 定义为 H 在其上负定的线性子空间的最大维数.

若对任意非零向量 v 都有 $H(v) \geq 0$, 注意 $H(iv) < 0$; 这是因为在 $H(v)$ 的表达式中第一项变号而第二项保持负值. 注意由注记 5.4 知 iv 也是 F_θ 的切向量.

现将 z 处的切空间作实直和分解 $T_0 \oplus T_1$, 其中 Hessian 阵 H 在 T_0 上负定而在 T_1 上半正定. 显然 T_0 的维数等于 Morse 指标 I .

但 H 在 iT_1 上也是负定的. 因此

$$I \geq \dim(iT_1) = \dim T_1 = 2n - I.$$

换言之 $I \geq n$, 这证明了引理 5.6 的第一部分.

关于 $a : S_\varepsilon - K \rightarrow \mathbb{R}$ 的相应陈述立即得到. a 的每个临界点也是相应的 a_θ 的临界点, 而 a 在 z 处的指标显然大于或等于 a_θ 在 z 处的指标. 这便证明了引理 5.6. \square

接下来必须验证所有临界点都位于 F_θ (或 $S_\varepsilon - K$) 的某个紧子集之内.

引理 5.7. 存在常数 $\eta_\theta > 0$ 使得 a_θ 的所有临界点都位于 F_θ 的紧子集 $|f(z)| \geq \eta_\theta$ 中. 类似地, 存在 $\eta > 0$ 使得 a 的所有临界点 z 都满足 $|f(z)| \geq \eta$.

这是利用定理 2.8 或定理 3.1 证明的. 例如, 若在 F_θ 上存在临界点 z 使得 $|f(z)|$ 任意接近于零, 则这些临界点将在紧集 S_ε 上有极限点 z^0 . 利用曲线选择引理, 存在光滑路径

$$p : (0, \varepsilon') \rightarrow F_\theta$$

完全由临界点组成, 且满足

$$p(t) \rightarrow z^0 \quad \text{当 } t \rightarrow 0.$$

显然函数 a_θ 沿此路径为常数, 故 $|f|$ 为常数, 不可能趋于 $|f(z^0)| = 0$. 这一矛盾证明了引理 5.7.

引理 5.8. 存在光滑映射

$$s_\theta : F_\theta \rightarrow \mathbb{R}_+$$

使得 s_θ 的所有临界点都是非退化的, 其 Morse 指标 $\geq n$, 且

$$s_\theta(z) = |f(z)|$$

当 $|f(z)|$ 充分接近于零时成立. 类似地, 存在从 $S_\varepsilon - K$ 到正实数的光滑映射 s , 其所有临界点都是非退化的, 指标 $\geq n$, 且

$$s(z) = |f(z)|$$

当 $|f(z)|$ 充分接近于零时成立.

证明. 根据 Morse 的定理 8.7 (第 178 页), 可以选取 s_θ (或 s) 使得它在临界集的某个紧邻域之外与 $|f|$ 重合, 使得它只有非退化临界点, 并且使得 s_θ 在任意紧坐标卡上的第一、二阶导数一致逼近 $|f|$ 的相应导数. 由于 $|f|$ 的临界点都有指标 $\geq n$, 于是若逼近足够接近, 则 s_θ 的临界点也有指标 $\geq n$. (参见例如 Milnor 的《Morse 理论》§22.4.) 这便完成了引理 5.8 的证明. \square

注意 s_θ 的临界点是孤立的, 且都位于某个紧集之内. 因此只有有限多个临界点. 现在准备证明定理 5.1 和 5.2.

定理 5.1 的证明. 为了应用通常形式的 Morse 理论, 需要一个非退化映射 $g: F_\theta \rightarrow \mathbb{R}$, 使得对每个常数 c , 满足 $g(z) \leq c$ 的 z 的集合都是紧的. (换言之 g 应是逆紧的且有下界.) 显然函数

$$g(z) = -\log s_\theta(z)$$

满足这些条件.

s_θ 或 $\log s_\theta$ 在临界点处的指标 I 是 $\geq n$ 的. 因此 $-\log s_\theta$ 的指标是 $2n - I \leq n$. 于是根据 Morse 理论的主定理 (见 Milnor 《Morse 理论》 §3.5), 流形 F_θ 具有维数 $\leq n$ 的 CW-复形的同伦型, 该复形由 g 的每个临界点对应一个胞腔构成. 这便证明了定理 5.1 的一半.

特别地, 当 $n \geq 1$ 时, 同调群 $H_{2n}(F_\theta; \mathbb{Z}_2)$ 为零. 因此 $2n$ 维流形 F_θ 不可能有紧分支.

为完成定理 5.1 的证明, 只需验证 F_θ 是可平行化的. 但 F_θ 嵌入在球面 S_ε 中, 从而嵌入在坐标空间 \mathbb{C}^{n+1} 中, 且具有平凡法丛. 由于 F_θ 没有紧分支, 由此可知 F_θ 是可平行化的. (参见 Kervaire 与 Milnor 的 §3.4.) 证毕. \square

注记. 类似的论证表明全空间 $S_\varepsilon - K$ 具有有限复形的同伦型, 其维数为 $n + 1$.

定理 5.2 的证明. 以 $N_\eta(K)$ 记 K 的邻域, 由所有满足 $|f(z)| \leq \eta$ 的 $z \in S_\varepsilon$ 组成. 由引理 5.7 知, 当 η 充分小时, $N_\eta(K)$ 是一个带边光滑流形. 利用 $S_\varepsilon - \text{Interior } N_\eta(K)$ 上的光滑非退化实值函数 s , 可见整个球面 S_ε 具有从 $N_\eta(K)$ 出发通过粘合有限多个维数 $\geq n$ 的胞腔所构成的复形的同伦型, s 的每个 I 指标临界点对应一个 I 维胞腔. (对照 《Morse 理论》 §3. 事实上, 根据 Smale 的更精确描述, 光滑流形 S_ε 可以通过向 $N_\eta(K)$ 粘合有限多个”手柄”来构造, 每个手柄的指标都 $\geq n$.)

显然, 粘合一个维数 $\geq n$ 的胞腔不会改变维数 $\leq n - 2$ 的同伦群. 因此

$$\pi_i(N_\eta(K)) \cong \pi_i(S_\varepsilon) = 0$$

对 $i \leq n - 2$ 成立.

为完成证明, 必须利用 K 是绝对邻域收缩核这一事实. 事实上 K 是实代数集, 因此根据 Lojasiewicz 的结果, 它实际上可以被三角剖分.

因此当 η 充分小时, K 是邻域 $N_\eta(K)$ 的收缩核. 于是 $\pi_i(K)$ 对 $i \leq n - 2$ 也是平凡的, 这便完成了定理 5.2 的证明. \square

为结束 §5, 给出纤维的另一种描述. 先给出两个引理. 以 D_ε 记 S_ε 所围成的闭圆盘.

引理 5.9. 存在 $D_\varepsilon - V$ 上的光滑向量场 v , 使得内积

$$\langle v(z), \text{grad } \log f(z) \rangle$$

对所有 $z \in D_\varepsilon - V$ 都是实的且为正, 并且内积 $\langle v(z), z \rangle$ 具有正实部.

证明类似于定理 4.6 的证明, 留给读者.

现在考虑 $D_\varepsilon - V$ 上的微分方程

$$dp/dt = v(p(t))$$

的解. 条件

$$\langle dp/dt, \text{grad} \log f(p(t)) \rangle$$

为实且为正告诉我们 $f(p(t))$ 的辐角为常数, 且 $|f(p(t))|$ 作为 t 的函数是严格单调的. 条件

$$2\mathcal{R}\langle dp/dt, p(t) \rangle = d\|p(t)\|^2/dt > 0$$

保证 $\|p(t)\|$ 是 t 的严格单调函数.

于是从 $D_\varepsilon - V$ 的任意内点 z 出发, 沿过 z 的轨迹前进, ”远离” 原点, 沿 $|f|$ 增大的方向, 直到抵达 $S_\varepsilon - K$ 上的某点 z' , 该点必满足

$$f(z')/|f(z')| = f(z)/|f(z)|.$$

利用对应 $z \mapsto z'$, 显然可以证明如下结论. 设 c 是一个小的复常数, 且 $c/|c| = e^{i\theta}$. (对照图 4.)

引理 5.10. 超平面 $f^{-1}(c)$ 与开 ε -圆盘的交微分同胚于纤维 F_θ 的由不等式 $|f(z)| > |c|$ 所定义的部分.

但若 $|c|$ 充分小, 则由引理 5.7 可知 F_θ 的这一部分微分同胚于整个 F_θ . (对照 《Morse 理论》§3.1.) 于是证明了:

定理 5.11. 若复数 $c \neq 0$ 充分接近于零, 则复超曲面 $f^{-1}(c)$ 与开 ε -圆盘的交是一个光滑流形, 它微分同胚于纤维 F_θ .

注记. 若将定理 5.11 与 Andreotti 和 Frankel 对光滑实值函数 $\|z\|^2$ 在 $f^{-1}(c)$ 上的 Morse 理论分析相结合, 则可以得到定理 5.1 的另一证明.

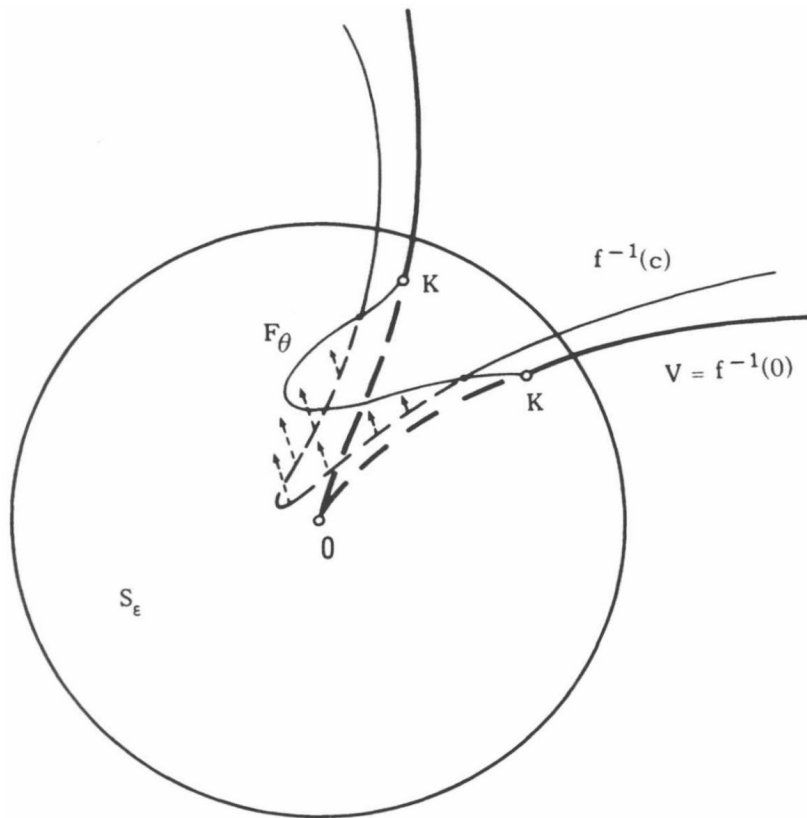


图 5.1

第六章

孤立临界点的情形

现在增加如下假设：多项式 $f(z_1, \dots, z_{n+1})$ 在原点的某个邻域内除原点本身外没有临界点. 于是原点是超曲面 $V = f^{-1}(0)$ 的孤立奇点或非奇点. (对照 §2.5.) 并假设 $n \geq 1$.

根据 §2.9, 交 $K = V \cap S_\varepsilon$ 是一个光滑的 $(2n - 1)$ 维流形, 只要 ε 充分小. 这一陈述可以强化如下.

引理 6.1. 当 ε 充分小时, 每根纤维 F_θ 在 S_ε 中的闭包是一个带边光滑 $2n$ 维流形, 该流形的内部为 F_θ 而边界恰为 K .

证明. 首先注意, 当 ε 充分小时, 映射 $f|_{S_\varepsilon}$ 到 \mathbb{C} 在 K 上没有临界点. (换言之, 数零是 $f|_{S_\varepsilon}$ 的正则值.) 这可以从定理 2.9 的证明推出, 也可以如下利用曲线选择引理证明. $f|_{S_\varepsilon}$ 的临界点显然是 S_ε 中满足 (非零) 向量 $\text{grad } f(z)$ 为 z 的复数倍的那种点 z . 给定一条完全由这种点组成的非光滑路径

$$p : [0, \varepsilon'] \rightarrow \mathbb{C}^{n+1}$$

满足

$$p(0) = 0 \quad \text{且} \quad f(p(t)) \equiv 0,$$

将有

$$\langle dp/dt, \text{grad } f \rangle = df(p(t))/dt \equiv 0$$

因此

$$2\mathcal{R}\langle dp/dt, p(t) \rangle = d\|p(t)\|^2/dt \equiv 0$$

从而 $p(t) \equiv 0$, 这与假设矛盾.

现在设 z^0 是 K 的任一点. 选取 (实) 局部坐标 u_1, \dots, u_{2n+1} 用于 S_ε 在 z^0 的某邻域 U 中, 使

得

$$f(z) = u_1(z) + iu_2(z)$$

对所有 $z \in U$ 成立. 注意 U 中的点属于纤维 $F_0 = \phi^{-1}(1)$ 当且仅当

$$u_1 > 0, \quad u_2 = 0.$$

因此闭包 \bar{F}_0 与 U 的交为集合

$$u_1 \geq 0, \quad u_2 = 0.$$

显然这是一个光滑 $2n$ 维流形, 以 $F_0 \cap U$ 为内部而以 $K \cap U$ 为边界.

对其他纤维 F_θ 的讨论类似. 证毕. □

推论 6.2. 带边紧流形 \bar{F}_θ 以这样的方式嵌入 S_ϵ 中, 使得它具有与其补集 $S_\epsilon - \bar{F}_\theta$ 相同的同伦型.

这是因为补集是缩流形 $S^1 - (e^{i\theta})$ 上的局部平凡纤维空间. 因此 $S_\epsilon - \bar{F}_\theta$ 以任何其他纤维 $F_{\theta'}$ 为形变收缩核. 但 $F_{\theta'}$ 微分同胚于 F_θ , 于是具有与 \bar{F}_θ 相同的同伦型.

推论 6.3. 纤维 F_θ 在小于 n 的维数上具有点的同调.

(对照 Fary, 第 31 页.)

这由 Alexander 对偶定理推出, 该定理说约化同调群 $\tilde{H}_i(S_\epsilon - \bar{F}_\theta)$ 同构于约化上同调群 $\tilde{H}^{2n-i}(\bar{F}_\theta)$, 后者当 $2n - i > n$ 时由定理 5.1 知为零.

这一陈述可以强化如下:

引理 6.4. 纤维 F_θ 实际上是 $(n - 1)$ -连通的.

证明. 鉴于推论 6.3, 只需验证当 $n \geq 2$ 时 F_θ 是单连通的.

当 $n \geq 3$ 时, 这可以利用引理 5.8 证明. 利用 \bar{F}_θ 上的光滑函数 s_θ , 注意 \bar{F}_θ 可以通过从其边界的邻域 $K \times [0, \eta]$ 出发粘合指标 $\geq n$ 的手柄来构造, s_θ 的每个临界点对应一个手柄. (对照定理 5.2 的证明.) 由于粘合这样的手柄不会改变维数 $\leq n - 2$ 的同伦群, 由此可知

$$\pi_i(\bar{F}_\theta) \cong \pi_i(K \times [0, \eta]) = 0$$

对 $i \leq n - 2$ 成立, 这里用到了定理 5.2.

下面是一个更好的论证, 它对 $n = 2$ 的情形也有效. 利用 \bar{F}_θ 上的 Morse 函数 $-s_\theta$, 注意 \bar{F}_θ 可以通过从圆盘 D_0^{2n} 出发相继粘合指标 $\leq n$ 的手柄来构造. 所有这些手柄都可以在包含空间 S_ϵ 内粘合. 但补集 $S_\epsilon - D_0^{2n}$ 当然是单连通的, 而粘合指标 $\leq \dim(S_\epsilon) - 3 = 2n - 2$ 的手柄不会改变补集的基本群. 于是归纳地可知补集 $S_\epsilon - \bar{F}_\theta$ 也是单连通的, 只要 $n \leq 2n - 2$. 结合推论 6.2, 这便完成了证明. □

定理 6.5. 每根纤维都具有球束 $S^n \vee S^n \vee \cdots \vee S^n$ 的同伦型.

证明. 同调群 $H_n(F_\theta)$ 必须是自由 Abel 的, 因为任何挠元都会产生维数 $n+1$ 的上同调类, 与定理 5.1 矛盾. 因此 $\pi_n(F_\theta) \cong H_n(F_\theta)$ 是自由 Abel 的, 这里使用了 Hurewicz 定理并假设 $n \geq 2$; 于是可以选取有限多个映射

$$(S^n, \text{基点}) \longrightarrow (F_\theta, \text{基点})$$

代表一组基. 这些映射合起来给出一个映射

$$S^n \vee \cdots \vee S^n \rightarrow F_\theta$$

它诱导同调群的同构, 从而由 Whitehead 定理知是一个同伦等价. 这就完成了 $n \geq 2$ 情形的证明. $n = 1$ 情形的证明留给读者. \square

将在 §7 中看到, 除非原点是 f 的正则点, 否则这个球束中球的个数永不为零.

当 $n \neq 2$ 时, 还可以得到一个更精细的陈述:

定理 6.6. 当 $n \neq 2$ 时, 带边流形 \overline{F}_θ 微分同胚于一个手柄体, 该手柄体从圆盘 D^{2n} 出发通过同时粘合若干个指标恰等于 n 的手柄得到.

证明. 这由 Smale 的“论 5-流形的结构”§1.2, 连同我们的定理 5.2 和 6.4 推出. \square

关于这种手柄体的详尽讨论, 读者可参阅 Wall.

可以猜想当 $n = 2$ 时定理 6.6 仍然成立.

第七章

纤维的中间 Betti 数

复多项式 $f(z_1, \dots, z_m)$ 的孤立临界点 z^0 称为非退化的, 如果 Hessian 矩阵 $(\partial^2 f / \partial z_j \partial z_k)$ 在 z^0 处非奇异. 否则 z^0 是退化临界点.

引入一个正整数 μ 来度量临界点 z^0 处的退化程度. 这个整数 μ 被描述为 z^0 作为多项式方程组

$$\partial f / \partial z_1 = \dots = \partial f / \partial z_m = 0$$

的解的重数.

先考虑一个稍更一般的情形. 设

$$g_1(z), \dots, g_m(z)$$

是 m 个复变量的任意解析函数, 设 z^0 是方程组

$$g_1(z) = \dots = g_m(z) = 0$$

的孤立解. 为简洁起见, 说 z^0 是映射 $g: \mathbb{C}^m \rightarrow \mathbb{C}^m$ 的孤立“零点”.

定义. 孤立零点 z^0 的**重数** μ 是指映射

$$z \mapsto g(z) / \|g(z)\|$$

从以 z^0 为中心的小球面 S_ε 到 \mathbb{C}^m 的单位球面的映射度.

据推测, 此定义与代数几何学家使用的各种定义一致. (例如参见 van der Waerden 《代数几何》§38, 或 Hodge 与 Pedoe, 第 120–129 页.) 但这个拓扑定义对我们的目的更为方便.

如下结果有助于说明这一定义的合理性.



定理 7.1 (Lefschetz). 重数 μ 总是一个正整数.

定理 7.1 的证明以及对 μ 的进一步讨论将在附录 B 中给出. (另见 Lefschetz 《拓扑学》, 第 382 页.)

现在回到 §6 的情形. 设原点是多项式 $f(z_1, \dots, z_{n+1})$ 的孤立临界点, 且为零点. 于是方程组

$$\partial f / \partial z_1 = \dots = \partial f / \partial z_{n+1} = 0$$

有孤立解 $z = 0$. 设 μ 是此解的重数. 如前几节一样, 考虑以 $2n$ 维流形

$$F_0 = \{z \in S_\varepsilon \mid f(z) > 0\}$$

为典型纤维的相伴纤维化. 本节的主要结果是:

定理 7.2. 纤维 F_0 的中间 Betti 数等于重数 μ . 因此中间同调群 $H_n(F_0)$ 是秩为 μ 的自由 Abel 群.

(注记: Brieskorn 最近给出了定理 7.2 的一个简单证明, 与这里给出的证明相当不同.)

由定理 7.1 知 $\mu > 0$, 这蕴含:

推论 7.3. 若原点是 f 的孤立临界点, 则纤维 F_θ 不是可缩的, 且流形 $K = V \cap S_\varepsilon$ 在 S_ε 中不是不打结的球面.

(这与 §2.13 和 §2.12 形成对照, 后两节表明当原点是 f 的正则点时 F_θ 是可缩的且 $K \subset S_\varepsilon$ 是不打结的球面.)

这是因为若 K 是 S_ε 中拓扑上不打结的球面, 则 $S_\varepsilon - K$ 将具有圆周的同伦型. 纤维化的同伦正合序列

$$\dots \rightarrow \pi_{n+1}(S^1) \rightarrow \pi_n(F_0) \rightarrow \pi_n(S_\varepsilon - K) \rightarrow \dots$$

然后将导致矛盾 (即使当 $n = 1$ 时).

为证明定理 7.2, 需要一个用映射 $v: S^k \rightarrow S^k$ 的不动点来计算该光滑映射的度的工具. 设 M 是球面 $S^k \subset \mathbb{R}^{k+1}$ 上一个具有光滑边界的紧区域, 对每个边界点 $x \in M$, 以 $n(x)$ 记内法向量, 即 S^k 的切向量中在 x 处与 ∂M 正交且指向 M 内部的唯一单位向量.

引理 7.4. 若 (1) 映射 $v: S^k \rightarrow S^k$ 的每个不动点都位于 M 的内部, (2) M 中没有任何点 x 被 v 映到其对径点 $-x$, 且 (3) 对每个 $x \in \partial M$ 欧氏内积 $\langle v(x), n(x) \rangle$ 为正, 则 Euler 数 $\chi(M)$ 与 v 的度 d 有如下关系:

$$\chi(M) = 1 + (-1)^k d.$$

证明. 将 v 稍作扰动后可假设 v 的不动点都是孤立的. 根据 Lefschetz 不动点定理, 可以对每个不动点指定一个指标 $\iota(x)$ 使得指标之和等于 Lefschetz 数

$$\sum (-1)^j \text{Trace} (v_* : H_j(S^k) \rightarrow H_j(S^k)) = 1 + (-1)^k d.$$

(对照 Alexandroff 与 Hopf.)

考虑单参数映射族

$$v_t : M \rightarrow S^k$$

定义为

$$v_t(x) = ((1-t)x + tv(x)) / \|(1-t)x + tv(x)\|.$$

由于 $v(x) \neq -x$ 对 $x \in M$ 成立, 故此公式有意义. 显然 v_0 是恒同映射, 而 v_t 对小的 t 值把 M 映入自身, 所成映射同伦于恒同映射. 于是

$$v_t : M \rightarrow M$$

的 Lefschetz 数必须等于 Euler 数 $\chi(M)$, 例如对 $0 < t \leq \varepsilon$ 成立.

但 v_t 的不动点与 $v : S^k \rightarrow S^k$ 的不动点完全相同, 对 $t > 0$ 成立. 由于不动点 x 关于 v_t 的 Lefschetz 指标是随 t 连续变化的整数, 由此可知 v_ε 的 Lefschetz 数 $\chi(M)$ 必须等于 v 的 Lefschetz 数 $1 + (-1)^k d$. 这便证明了引理 7.4. \square

定理 7.2 的证明. 设 M 是 S_ε 中满足不等式

$$\mathcal{R}f(z) \geq 0$$

的所有点 z 所构成的区域. 换言之, M 是纤维 F_θ 当 θ 在区间 $[-\pi/2, \pi/2]$ 上变化时的并集, 再加上公共边界 K . 显然

$$\partial M = F_{-\pi/2} \cup K \cup F_{\pi/2}$$

是一个光滑流形. (对照定理 6.1 的证明.)

注意 M 具有 F_θ 的同伦型. 事实上 M 的内部是以 F_θ 为纤维、底空间为开半圆周的纤维化.

考虑光滑函数

$$v(z) = \varepsilon \operatorname{grad} f(z) / \|\operatorname{grad} f(z)\|$$

从球面 S_ε 到自身的映射. 下面证明 v 满足引理 7.4 的三个假设.

假设 (1). 显然 z 是 $v = \varepsilon \operatorname{grad} f / \|\operatorname{grad} f\|$ 的不动点当且仅当 $\operatorname{grad} f(z)$ 是 z 的正实数倍. 但若

$$\operatorname{grad} f(z) = cz, \quad c > 0,$$

则 $f(z) \neq 0$ (对照定理 6.1 的证明), 且

$$\operatorname{grad} \log f(z) = cz / \bar{f}(z)$$

其中系数 $c/\bar{f}(z)$ 由 §4.3 必具有正实部. 故 $\mathcal{R}f(z) > 0$, 从而 z 是 M 的内点.

假设 (2) 由类似的论证验证.

假设 (3). 给定 M 的任一边界点 z , 可以选取一条光滑路径 $p(t)$ 穿越进入 M , 其在 $p(0) = z$ 处的速度向量为 $dp/dt = n(z)$. 显然由 M 的定义知 $\mathcal{R}f(p(t))$ 在 $t = 0$ 处的导数为正. 于是恒等式

$$d\mathcal{R}f/dt = \mathcal{R}\langle dp/dt, \text{grad } f \rangle$$

表明欧氏内积 $\mathcal{R}\langle n(z), v(z) \rangle$ 为正.

于是可以应用引理 7.4, 得到公式

$$\chi(F_\theta) = \chi(M) = 1 - \text{degree}(v), \quad (1)$$

这是因为球面 S_ϵ 的维数 $2n + 1$ 是奇数.

但映射 v 的度等于 $(-1)^{n+1}$ 乘以原点作为多项式方程组

$$\partial f/\partial z_1 = \cdots = \partial f/\partial z_{n+1} = 0$$

的解的重数 μ .

这是因为 μ 被定义为映射

$$z \mapsto g(z)/\|g(z)\|$$

在 S_ϵ 上的度, 其中 $g(z)$ 是 $\text{grad } f(z)$ 的复共轭. 而共轭映射

$$(g_1, \dots, g_{n+1}) \mapsto (\bar{g}_1, \dots, \bar{g}_{n+1})$$

显然把 S_ϵ 映入自身, 其度为 $(-1)^{n+1}$.

将此事实代入公式 (1) 得到

$$\chi(F_\theta) = 1 + (-1)^n \mu.$$

但由定义知 Euler 数 $\chi(F_\theta)$ 等于

$$\sum (-1)^j \text{rank } H_j(F_\theta) = 1 + (-1)^n \text{rank } H_n(F_\theta).$$

因此

$$\mu = \text{rank } H_n(F_\theta)$$

这便完成了证明. □

第八章

K 是拓扑球面吗？

再次假设原点是多项式 $f(z_1, \dots, z_{n+1})$ 的孤立临界点，其中 $n \geq 1$ 。如何判断紧 $(2n - 1)$ 维流形 $K = f^{-1}(0) \cap S_\epsilon$ 是否为拓扑球面？

引理 8.1. 若 $n \neq 2$ ，则 K 同胚于球面 S^{2n-1} 当且仅当 K 具有球面的同调。

因为若 $n \geq 3$ ，则由 §5.2 知 K 是单连通的，且维数 ≥ 5 ，故可应用 Smale 和 Stallings 验证的广义 Poincaré 猜想。该结论对 $n = 1$ 显然成立，证毕。

注记. 当 $n = 2$ 时，相应结论肯定不成立。事实上，Mumford 证明了此情形下基本群 $\pi_1(K)$ 永非平凡。（另见 Hirzebruch, *Normal Singularities* 的拓扑。）例如，考虑多项式

$$f(z_1, z_2, z_3) = z_1^2 + z_2^3 + z_3^5$$

这是 Brieskorn 研究过的类型。Hirzebruch 指出相应的 3 维流形 K 是一个同调球面；但 $\pi_1(K)$ 是具有 120 个元素的非平凡群，同构于 $SL(2, \mathbb{Z}_5)$ 。（对照 §9.8.）这个 Poincaré 流形 K 对纽结理论家是熟知的，它是 3 维球面沿 (q, r) 型环面纽结的 p -重分支覆叠，其中 p, q, r 是 2, 3, 5 的任意置换。

判据 8.1 可以加强如下。

引理 8.2. 当 $n \neq 2$ 时，流形 K 是拓扑球面当且仅当约化同调群 $\tilde{H}_{n-1}K$ 平凡。

若该群平凡，则利用 Poincaré 对偶以及 K 是 $(n - 2)$ -连通的这一事实，易验证 K 是一个同调球面。

现在选取 $2n$ 维可定向流形 \bar{F}_θ 的一个定向，注意 F_θ 的任意两个 n 维同调类 α, β 都有良定义的相交数 $s(\alpha, \beta)$ 。



引理 8.3. 流形 K 是同调球面当且仅当相交配对

$$s : H_n F_\theta \otimes H_n F_\theta \rightarrow \mathbb{Z}$$

的行列式为 ± 1 .

证明. 这由对 (\bar{F}_θ, K) 的同调正合序列

$$H_n \bar{F}_\theta \xrightarrow{j_*} H_n(\bar{F}_\theta, K) \xrightarrow{\partial} \tilde{H}_{n-1} K \longrightarrow 0$$

得出, 其中第一个群已知是秩为 μ 的自由 Abel 群. 由 Poincaré 对偶定理可知 $H_n(\bar{F}_\theta, K)$ 也是秩为 μ 的自由 Abel 群, 且相交配对

$$s' : H_n(\bar{F}_\theta, K) \otimes H_n \bar{F}_\theta \rightarrow \mathbb{Z}$$

的行列式为 ± 1 . 利用恒等式

$$s(\alpha, \beta) = s'(j_*\alpha, \beta)$$

可知 j_* 是同构当且仅当 s 的行列式为 ± 1 . 这就证明了 8.3. □

下面给出 $\tilde{H}_{n-1} K$ 的另一种方法. 给定任何圆周上的纤维丛

$$\phi : E \rightarrow S^1$$

$\pi_1(S^1)$ 的生成元在纤维同调上的自然作用由一个自同构

$$h_* : H_* F_0 \rightarrow H_* F_0$$

描述. 这里 h 表示纤维 $F_0 = \phi^{-1}(1)$ 的特征同胚, 通过选取一族连续的单参数同胚

$$h_t : F_0 \rightarrow F_t$$

(其中 $0 \leq t \leq 2\pi$) 并利用覆叠同伦定理得到, h_0 是恒同映射, $h = h_{2\pi}$ 即为所求的特征同胚.

引理 8.4 (Wang). 对任何这样的纤维化, 存在如下形式的正合序列:

$$\cdots \longrightarrow H_{j+1} E \longrightarrow H_j F_0 \xrightarrow{h_* - I_*} H_j F_0 \longrightarrow H_j E \longrightarrow \cdots,$$

其中 I 表示 F_0 的恒同映射, h 表示特征同胚.

[证明概述如下. 覆盖同伦 $\{h_t\}$ 诱导一个映射

$$F_0 \times [0, 2\pi] \rightarrow E$$

给出相对同调群的同构

$$H_j(F_0 \times [0, 2\pi], F_0 \times \{0\} \cup F_0 \times \{2\pi\}) \xrightarrow{\cong} H_j(E, F_0)$$

将左边的群与 $H_{j-1}F_0$ 等同, 并代入对 (E, F_0) 的正合序列, 即得所需的 Wang 序列.]

下面专门讨论 §6 中的纤维化 $\phi: S_\varepsilon - K \rightarrow S^1$. 记线性变换

$$h_*: H_n F_0 \rightarrow H_n F_0$$

的特征多项式为

$$\Delta(t) = \det(tI_* - h_*)$$

则 $\Delta(t)$ 是一个具有整数系数的多项式, 形如

$$t^\mu + a_1 t^{\mu-1} + \cdots + a_{\mu-1} t \pm 1.$$

定理 8.5. 当 $n \neq 2$ 时, 流形 K 是拓扑球面当且仅当整数

$$\Delta(1) = \det(I_* - h_*)$$

等于 ± 1 .

证明. 当 $n > 1$ 时, 这直接由 Wang 序列

$$H_n F_0 \xrightarrow{h_* - I_*} H_n F_0 \longrightarrow H_n(S_\varepsilon - K) \longrightarrow 0,$$

连同 Alexander 对偶同构

$$H_n(S_\varepsilon - K) \cong H^n K$$

以及 Poincaré 对偶同构

$$H^n K \cong H_{n-1} K$$

得出. (对照 8.2.) 当 $n = 1$ 时, 类似的论证也适用. □

注记 8.6. 多项式 $\Delta(t)$ 也可用另一种方式得到. 代替 F_0 的自同构 h , 可利用补空间 $E = S_\varepsilon - K$ 的无限循环覆盖空间 \tilde{E} 中的覆盖变换. (对照 Levine.) 易验证 \tilde{E} 同胚于 $F_0 \times \mathbb{R}$, 且覆盖变换群的某

个合适的生成元对应于 $F_0 \times \mathbb{R}$ 的同胚

$$(z, r) \mapsto (h(z), r - 2\pi).$$

这表明 $\Delta(t)$ 是 $S_\varepsilon - K$ 的拓扑不变量, 至少当 K 连通时如此. 该不变量是纽结的 *Alexander* 多项式的 n 维推广. (对照 §10.1.)

注记 8.7. 若 K 确实是拓扑球面, 那么一个有趣的问题是它带有怎样的微分结构. 由于 K 是 $(n-1)$ -连通可平行化流形 \bar{F}_0 的边界, 当 n 为偶数时, K 的微分同胚类完全由相交配对的符号差

$$H_n F_0 \otimes H_n F_0 \rightarrow \mathbb{Z}$$

决定; 当 n 为奇数时, 由 *Kervaire* 不变量

$$c(F_0) \in \mathbb{Z}_2$$

决定. (见 *Kervaire* 与 *Milnor*, §7.5 和 §8.5. 这里仍需排除 $n = 2$ 的情形.)

当 n 为奇数时, *Levine* 的一个非凡定理断言 *Kervaire* 不变量由下式给出:

$$\begin{aligned} c(F_0) &= 0 \text{ 若 } \Delta(-1) \equiv \pm 1 \pmod{8}, \\ c(F_0) &= 1 \text{ 若 } \Delta(-1) \equiv \pm 3 \pmod{8}. \end{aligned}$$

因此当 n 为奇数时, 特征多项式 $\Delta(t)$ 完全决定了 K 的微分结构, 至少当 K 是拓扑球面时如此.

第九章

Brieskorn 簇与加权齐次多项式

给定整数 $a_1, \dots, a_{n+1} \geq 2$, 考虑多项式

$$f(z_1, \dots, z_{n+1}) = (z_1)^{a_1} + (z_2)^{a_2} + \dots + (z_{n+1})^{a_{n+1}}.$$

显然原点是 f 的唯一的临界点. 因此 $V = f^{-1}(0)$ 与 S_ε 的交集是一个光滑流形 K , 其维数为 $2n - 1$. 考虑相应的纤维化 $\phi: S_\varepsilon - K \rightarrow S^1$, 其纤维 F_θ 的维数为 $2n$.

定理 9.1 (Brieskorn-Pham). 群 $H_n F_\theta$ 是自由 *Abel* 群, 秩为

$$\mu = (a_1 - 1)(a_2 - 1) \dots (a_{n+1} - 1).$$

线性变换

$$h_*: H_n(F_0; \mathbb{C}) \rightarrow H_n(F_0; \mathbb{C})$$

的特征根是形如 $\omega_1 \omega_2 \dots \omega_{n+1}$ 的乘积, 其中每个 ω_j 取遍所有 a_j 次单位根 (除了 1). 因此特征多项式为

$$\Delta(t) = \prod (t - \omega_1 \omega_2 \dots \omega_{n+1}).$$

关于 $\Delta(t)$ 的另一种表达式将在第 9.6 节中给出.

例如, 考虑广义三叶纽结 $K \subset S_\varepsilon$, 它对应于如下指数选择

$$a_1 = \dots = a_n = 2, \quad a_{n+1} = 3.$$

则

$$\omega_1 = \dots = \omega_n = -1, \quad \omega_{n+1} = (-1 \pm \sqrt{-3})/2,$$

因此

$$\begin{aligned} \Delta(t) &= t^2 - t + 1 \quad \text{当 } n \text{ 为奇数,} \\ \Delta(t) &= t^2 + t + 1 \quad \text{当 } n \text{ 为偶数.} \end{aligned}$$

于是当 n 为奇数时, $\Delta(1) = 1$, 故 K 是一个拓扑球面, 维数为 $2n - 1 = 1, 5, 9, 13, \dots$. 若 K 的维数是 1 或 5, 则 K 微分同胚于标准球面. 因为在这些维数中不存在怪球面. 但若 $2n - 1 = 9$, 则流形 K 微分同胚于 Kervaire 的怪 9-球面. (比较第 8.7 节.)

类似地, Hirzebruch 和 Brieskorn 给出了在其他维数 $7, 11, 15, \dots$ 中的怪和非怪球面的例子. 每个能在余维数 2 中嵌入的怪球面都可以用这种方式得到.

定理 9.1 提出了几个问题. 是否存在计算与任意孤立临界点相关联的特征多项式 $\Delta(t)$ 的算法? $\Delta(t)$ 是否总是分圆多项式的乘积? 纤维丛的结构群是否总能约化到一个有限群 (或者至少是一个紧群)?

(在经典情形 $n = 1$ 中, 当纽结 K 连通时, Zariski 计算了 Alexander 多项式. 当 K 至多有两个分支时, Burau 计算了该多项式. 在这些情形中, $\Delta(t)$ 总是分圆多项式的乘积.)

定理 9.1 的证明. 为方便起见, 设 $m = n + 1$.

首先 (利用多项式 f 的特殊形式), 纤维化 $\phi: S_\epsilon - K \rightarrow S^1$ 可扩张为局部平凡纤维化

$$\psi: \mathbb{C}^m - V \rightarrow S^1,$$

其中 ψ 与 ϕ 一样, 由如下公式定义

$$\psi(z) = f(z)/|f(z)|.$$

容易验证 ψ 是局部平凡的. 这利用了如下单参数群

$$h_t: \mathbb{C}^m - V \rightarrow \mathbb{C}^m - V$$

该群由

$$h_t(z_1, \dots, z_m) = (e^{it/a_1} z_1, \dots, e^{it/a_m} z_m)$$

定义. 注意 h_t 将每个纤维 $\psi^{-1}(y)$ 微分同胚地映到纤维 $\psi^{-1}(e^{it}y)$. 下面特别关注特征同胚 $h_{2\pi}$.

还应注意, 每个纤维 $\psi^{-1}(y)$ 通过如下对应与 $\phi^{-1}(y) \times \mathbb{R}$ 微分同胚

$$(z, \mathbf{r}) \mapsto (e^{r/a_1} z_1, \dots, e^{r/a_m} z_m),$$

其中 $z \in S_\epsilon - K$, $r \in \mathbb{R}$. 因此新的纤维化与旧的纤维化具有相同的纤维同伦型.

记 Ω_a 为由所有 a 次单位根组成的有限循环群, 并记 J 为联结

$$J = \Omega_{a_1} * \Omega_{a_2} * \cdots * \Omega_{a_m} \subset \mathbb{C}^m$$

由所有形如

$$(t_1\omega_1, t_2\omega_2, \dots, t_m\omega_m)$$

的线性组合组成, 其中

$$t_1 \geq 0, \dots, t_m \geq 0, \quad t_1 + \cdots + t_m = 1,$$

且 $\omega_j \in \Omega_{a_j}$. 注意 J 包含在 $\psi^{-1}(1)$ 中.

引理 9.2 (Pham). 该联结 J 是纤维 $\psi^{-1}(1)$ 的形变收缩核.

证明. 对任意点 $z \in \psi^{-1}(1)$, 首先将每个坐标 z_j 沿着 \mathbb{C} 中的一条路径形变. 该路径的选择使得 $z_j^{a_j}$ 沿直线移动到实轴上的最近点 $\mathcal{R}(z_j^{a_j})$. 于是向量 z 移动到向量 z' , 它满足 $(z'_j)^{a_j} \in \mathbb{R}$ 对每个 j 成立. 显然, 在这一形变过程中函数值 $f(z) > 0$ 保持不变. 故始终留在纤维 $\psi^{-1}(1)$ 中. 接下来, 对于每个满足 $(z'_j)^{a_j} < 0$ 的 j , 将 z'_j 沿直线移动到零. 若 $(z'_j)^{a_j} \geq 0$, 则让 z'_j 保持不动. 于是向量 z' 沿直线移动到向量 $z'' \in \psi^{-1}(1)$, 它满足 $(z''_j)^{a_j} \geq 0$ 对所有 j 成立. 由此可知每个坐标 z''_j 形如 $t_j\omega_j$, 其中 $t_j \geq 0$ 且 $\omega_j \in \Omega_{a_j}$. 最后, 将 z'' 沿直线移动到点

$$z'' / (t_1 + \cdots + t_{n+1}) \in J.$$

由于 J 中的点在整个形变过程中保持不动, 这完成了引理 9.2 的证明. □

任何联结 $A * B$ 的同调群都自然地同构于张量积的直和:

$$\tilde{H}_{k+1}(A * B) \cong \sum_{i+j=k} \tilde{H}_i A \otimes \tilde{H}_j B,$$

前提是 $\tilde{H}_* A$ 无挠. (例如参见 Milnor, 《Universal Bundles, II》.) 由于每个 Ω_{a_j} 只在维数零上有同调, 故归纳地有

$$\tilde{H}_{m-1} J = \tilde{H}_0 \Omega_{a_1} \otimes \cdots \otimes \tilde{H}_0 \Omega_{a_m},$$

且 J 的约化同调群在所有其他维数上都是平凡的.

现在回忆特征同胚

$$h = h_{2\pi} : \psi^{-1}(1) \rightarrow \psi^{-1}(1)$$

由公式

$$h_{2\pi}(z) = (e^{2\pi i/a_1} z_1, \dots, e^{2\pi i/a_m} z_m)$$

给出. 显然, 该同胚将 J 映到自身, 且 $h_{2\pi}|_J$ 可描述为联结

$$r_{a_1}^* * \cdots * r_{a_m}^* : J \rightarrow J,$$

其中 r_a 表示 Ω_a 上角度为 $2\pi/a$ 的旋转, 由公式

$$r_a(\omega) = e^{2\pi i/a} \omega$$

给出.

考虑约化同调群上诱导的同态

$$r_{a^*} : \tilde{H}_0(\Omega_a; \mathbb{C}) \rightarrow \tilde{H}_0(\Omega_a; \mathbb{C})$$

r_{a^*} 的特征值显然是 a 次单位根 (除了 1). (证明: 对每个介于 1 和 $a-1$ 之间的整数 ν , $\tilde{H}_0(\Omega_a; \mathbb{C})$ 中将系数 $\omega^\nu \in \mathbb{C}$ 与 Ω_a 的每一点 ω 相关联的同调类是 r_{a^*} 的一个特征向量, 对应的特征值为 $e^{-2\pi i \nu/a}$.)

因此张量积同态

$$(h_{2\pi}|_J)_* = r_{a_1^*} \otimes \cdots \otimes r_{a_m^*}$$

的特征值是形如 $\omega_1 \omega_2 \cdots \omega_m$ 的乘积, 其中每个 ω_j 取遍所有 a_j 次单位根 (除了 1). 证毕. \square

有一类更大的多项式, 其处理方式与 Brieskorn 多项式几乎一样容易. 设 a_1, \dots, a_m 为正有理数.

定义 9.3. 多项式 $f(z_1, \dots, z_m)$ 称为加权齐次的, 类型为 (a_1, \dots, a_m) , 如果它可以表示为形如 $z_1^{i_1} \cdots z_m^{i_m}$ 的单项式的线性组合, 其中

$$i_1/a_1 + \cdots + i_m/a_m = 1.$$

这等价于要求

$$f(e^{c/a_1} z_1, \dots, e^{c/a_m} z_m) = e^c f(z_1, \dots, z_m)$$

对每个复数 c 都成立.

引理 9.4. 若多项式 f 是加权齐次的, 则第 4 节中的纤维 F 微分同胚于非奇异超曲面

$$F' = \{z \in \mathbb{C}^m \mid f(z) = 1\}.$$

作为从 F' (或 F) 到自身的特征同胚, 可以选择周期酉变换

$$h(z_1, \dots, z_m) = (e^{2\pi i/a_1} z_1, \dots, e^{2\pi i/a_m} z_m).$$

证明极易验证.

记 $h^j : F' \rightarrow F'$ 为 h 与自身复合 j 次. h^j 的不动点集显然是 F' 与 \mathbb{C}^m 的线性子空间 L_j 的交集, L_j 由形如 $z_{i_1} = \cdots = z_{i_k} = 0$ 的方程定义. 不难验证该不动点集 $F' \cap L_j$ 本身是 L_j 中的非奇异超曲面.

引理 9.5. 映射 $h^j : F' \rightarrow F'$ 的 Lefschetz 数等于 h^j 的不动点流形的 Euler 数.

将该 Euler (或 Lefschetz) 数记为 χ_j .

证明. 首先注意更一般的原理: 任何紧 Riemann 流形的等距映射的 Lefschetz 数等于其不动点流形的 Euler 数. (比较 Kobayashi.) 因为任何从紧流形到自身的映射 f 的 Lefschetz 数仅依赖于 f 在不动点集附近的行为. 因此, 在等距映射的特殊情形下, 可首先用不动点集的管状邻域 T 代替整个流形, 然后将 Lefschetz 公式应用于限制映射 $f|_T$.

证明如下. 作为紧流形, 使用 F' 与以原点为中心的大圆盘 D 的交集. 利用第 2.8 节可以验证 $D \cap F'$ 是 F' 的形变收缩核. 类似地, 不动点集 $D \cap F' \cap L_j$ 是 $F' \cap L_j$ 的形变收缩核. 引理 9.5 的断言极易验证. \square

下面考虑映射 h 的 Weil zeta 函数

$$\zeta(t) = \exp \sum_{j=1}^{\infty} \chi_j t^j / j$$

(比较 Milnor, 《Infinite Cyclic Coverings》.) 由于映射 h 是周期的, 设周期为 p . 直接的计算表明 $\zeta(t)$ 可表示为乘积

$$\zeta(t) = \prod_{d|p} (1 - t^d)^{-r_d}$$

其中指数 $-r_d$ 可从公式

$$\chi_j = \sum_{d|j} dr_d$$

归纳计算. (结果是 r_d 为整数, 除非 d 整除周期 p , 否则为零.)

根据 Weil, zeta 函数可表示为多项式的交错乘积

$$\zeta(t) = P_0(t)^{-1} P_1(t) P_2(t)^{-1} \dots P_{m-1}(t)^{\pm 1}$$

其中 $P_i(t)$ 是线性变换

$$(I_* - th_*) : H_i F' \rightarrow H_i F'$$

的行列式.

假设原点是多项式 f 的孤立临界点, 因此纤维 F' 只在维数 0 和 $m-1$ 上有同调. 则显然 $P_0(t) = 1-t$, 且 (差一个符号) $P_{m-1}(t)$ 就是第 8 节中的特征多项式 $\Delta(t)$. (这依赖于观察到 $\Delta(t)$ 的系数是对称的, 这一点是清楚的, 因为 $\Delta(t)$ 是周期线性变换的特征多项式.) 于是可得:

定理 9.6. 各次迭代 $h^d: F' \rightarrow F'$ 的不动点流形的 Euler 数 χ_d 与特征多项式 $\Delta(t)$ 的关系由公式

$$\Delta(t) = (t-1)^{-1} \prod_{d|p} (t^d - 1)^{r_d}$$

(当 m 为奇数时), 或

$$\Delta(t) = (t-1) \prod_{d|p} (t^d - 1)^{-r_d}$$

(当 m 为偶数时) 给出; 其中 $\chi_j = \sum_{d|j} dr_d$.

下面给出两个例子.

例 9.7. 多项式

$$z_1^2 z_2 + z_2^4 = (z_1^2 + z_2^3) z_2$$

是加权齐次的, 类型为 $(8/3, 4)$. 设 $u = e^{2\pi i/8}$, 线性变换

$$h(z_1, z_2) = (u^3 z_1, u^2 z_2)$$

的周期为 8. 注意 h 和 h^2 没有非平凡的不动点, 但 h^4 在 F' 上有四个不动点 (方程 $z_1^2 z_2 + z_2^4 = 1$, $z_1 = 0$ 的四个解). 计算表明 $\mu = 5$, 故不动点集 F' (对应于 h^8) 的 Euler 数 $1 - \mu$ 等于 -4 . 因此

$$\chi_1 = 0, \quad \chi_2 = 0, \quad \chi_4 = 4, \quad \chi_8 = -4,$$

且

$$r_1 = 0, \quad r_2 = 0, \quad r_4 = 1, \quad r_8 = -1,$$

因此

$$\Delta(t) = (t-1)(t^4-1)^{-1}(t^8-1) = (t-1)(t^4+1).$$

注记. 流形 K , 由球面 S_ε 上 $z_1^2 z_2 + z_2^4$ 的所有零点组成, 由一个三叶纽结和一个环绕数等于 2 的圆环连接而成. 该联结的 Alexander 多项式等于 $t_1^3 t_2 + 1$. (比较第 10.1 节.)

例 9.8. (比较 Klein, Hirzebruch, Cartan.) 设 G 是特殊酉群 $SU(2)$ 的任意有限子群. 则 G 作用于坐标空间 \mathbb{C}^2 , 除原点外没有不动点.

断言: 由所有在 G 作用下不变的两个变量的多项式构成的环由三个多项式生成, 记为 p_1, p_2, p_3 , 它们分别是各种次数的齐次多项式. 这些多项式由单个多项式方程

$$f(p_1, p_2, p_3) = 0$$

联系, 其中 f 是加权齐次的. 所得的映射 $p: \mathbb{C}^2 \rightarrow \mathbb{C}^3$ 将轨道空间 \mathbb{C}^2/G 同胚地映到超曲面 $V = f^{-1}(0) \subset \mathbb{C}^3$.

由此容易推出, 3 维流形 S^3/G , 其基本群同构于 G , 被同胚地映到 V 的一个子流形, 该子流形微分同胚于交集 $K = V \cap S_\varepsilon$.

例如, 若 G 是二进制二十面体群 (在满射 $SU(2) \rightarrow SO(3)$ 下二十面体群的原像), 则多项式 p_1, p_2, p_3 的次数分别为 30、20 和 12. p_3 的零点在由 \mathbb{C}^2 中过原点的所有复直线构成的射影空间中形成正二十面体的 12 个顶点. p_2 的零点形成该二十面体 20 个面的中心. p_1 的零点形成 30 条棱的中点. 这三个多项式由方程

$$p_1^2 + p_2^3 + p_3^5 = 0$$

联系. 因此轨道空间 \mathbb{C}^2/G 同构于 Brieskorn 簇 $V(2, 3, 5)$, 而 Poincaré 流形 S^3/G 微分同胚于交集 $K = V(2, 3, 5) \cap S_\varepsilon$. (比较第 8 节.)

(有趣的是, G 在 \mathbb{C}^2 中的每个非平凡轨道可以看作某个具有六百个面的正多面体的顶点集, 每个面都是正四面体. 比较 Coxeter, 《Regular Polytopes》, New York, 1963, 图版 IV、VII.)

类似地, 若 G 是 k 阶循环群, 则透镜空间 S^3/G 微分同胚于流形 $V(2, 2, k) \cap S_\varepsilon$. 若 G 是四元数群, 则 $S^3/G \cong V(2, 3, 3) \cap S_\varepsilon$. 若 G 是二进制四面体群, 则 $S^3/G \cong V(2, 3, 4) \cap S_\varepsilon$.

对于 48 阶的二进制八面体群, 轨道空间 \mathbb{C}^2/G 同构于由加权齐次方程

$$z_1^2 + z_2^3 + z_3^3 = 0$$

定义的簇.

最后, 对于 $4k$ 阶的二进制二面体群, 得到簇

$$z_1^2 + z_2^2 z_3 + z_3^{k+1} = 0.$$

(在特殊情形 $k = 2$ 中, 注意该簇同构于 $V(2, 3, 3)$.) 这完成了对所有 $SU(2)$ 的有限子群描述.

注记. 注意上面列出的加权齐次多项式的类型 (a_1, a_2, a_3) 都满足不等式 $1/a_1 + 1/a_2 + 1/a_3 > 1$. 若 $1/a_1 + 1/a_2 + 1/a_3 \leq 1$, 则猜测 3 维流形 $K = V \cap S_\varepsilon$ 具有无限的基本群, 并以一个开 3-胞腔为万有覆盖空间. 猜测该无限群是幂零的仅当 $1/a_1 + 1/a_2 + 1/a_3 = 1$. 这发生在 Brieskorn 簇 $V(3, 3, 3)$, $V(2, 4, 4)$ 和 $V(2, 3, 6)$ 的情形. (比较 Brieskorn, 《Rationale Singularitäten komplexer Flächen》, *Inventiones math.*, 4 (1968), 336-358.)

第十章

\mathbb{C}^2 中曲线的经典情形

本节将复曲线奇异点处的代数几何与相应的纽结理论进行比较. (可参见 BRAUNER, KAHLER, ZARISKI, BURAU, REEVE 的著作.) 特别地, 本节将比较链环 $K = V \cap S_\varepsilon$ 的 Alexander 多项式与第 8 节的特征多项式 $\Delta(t)$, 并证明如下等式:

$$2\delta = \mu + r - 1,$$

它将原点处的“二重点数” δ 与第 7 节研究的重数 μ 以及过原点的 V 的分支数 r 联系起来.

设 $f(z_1, z_2)$ 是一个在 0 处取零值的两复变量无平方因子多项式. 曲线 $V = f^{-1}(0)$ 的奇异集 $\Sigma(V)$ 由 V 上满足

$$\partial f / \partial z_1 = \partial f / \partial z_2 = 0$$

的所有点组成. (见第 2.5 节.) 由于 V 的每个不可约分支至少包含一个不位于其他不可约分支上的简单点, 故 $\Sigma(V)$ 的维数小于 1, 因此是有限的. 所以原点要么是一个简单点, 要么是一个孤立临界点, 从而第 6、7、8 节的结果适用.

设 r 为过原点的 V 的局部解析分支数. (比较第 3.3 节.) 则交集 $K = V \cap S_\varepsilon$ 是 3 维球面 S_ε 中由 r 个分支组成的 1 维光滑紧流形, 换言之是一个链环. (比较第 2.9、2.10 节. 单分支的链环称为纽结.)

引理 10.1. 若 $r = 1$, 则第 8 节的特征多项式 $\Delta(t)$ 等于纽结 K 的 Alexander 多项式. 若 $r \geq 2$, 则 $\Delta(t)$ 与 K 的 Alexander 多项式 $\Delta(t_1, \dots, t_r)$ 通过如下恒等式联系起来:

$$\pm t^i \Delta(t) = (t - 1) \Delta(t, \dots, t).$$

(因子 $\pm t^i$ 必须包含在内, 因为 $\Delta(t_1, \dots, t_r)$ 仅定义到乘以单项式 $\pm t_1^{i_1} \cdots t_r^{i_r}$ 的程度.)



引理 10.1 的证明将在本节末尾给出.

例. 代数集

$$z_1^p + z_2^{pq} = 0$$

由 p 个非奇异分支组成, 其中任意两个在原点处相交, 相交重数为 q . (每个分支可由形如 $z_1 = \omega z_2^q$ 的多项式方程定义, 其中 $\omega^p = -1$.) 相应的 $K = V \cap S_\varepsilon$ 是由 p 个不打结的圆周组成的环面链环, 其中任意两个的环绕数为 q . (比较图 5, 其中对 $p = 3, q = 2$ 的情形作了图示.) 计算表明

$$\Delta(t_1, \dots, t_p) = ((t_1 \cdots t_p)^q - 1)^{p-1} / (t_1 \cdots t_p - 1)$$

(假设 $p \geq 2$). 因此

$$\Delta(t) = (t - 1)(t^{pq} - 1)^{p-1} / (t^p - 1),$$

其次数 μ 等于 $(p-1)(pq-1)$. 此结论当然与第 9.1 节和第 9.6 节一致.

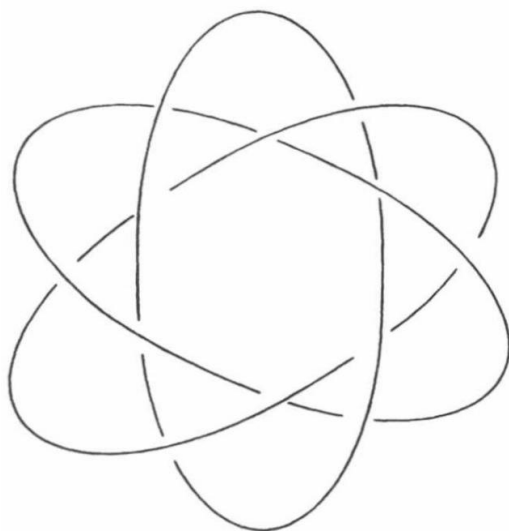


图 10.1: 与 $z_1^3 + z_2^6 = 0$ 相关联的链环 K

纽结补空间的纤维化已被 STALLINGS 和 NEUWIRTH 深入研究. 他们证明了如下结论.

Neuwirth-Stallings 定理. 对于 3 维球面中的驯顺纽结 k , 如下三个条件是等价的:

- (1) 补空间 $S^3 - k$ 是以连通曲面 F 为纤维的圆上的纤维丛的全空间.
- (2) 纽结群 $G = \pi_1(S^3 - k)$ 的换位子群 G' 是一个自由群.
- (3) 换位子群 G' 是有限生成的群.

此外, 若纽结 k 满足这些条件, 则:

- (4) k 的 Alexander 多项式的首项系数为 ± 1 , 其次数记为 μ , 等于自由群 G' 的秩.
- (5) 纤维 F 是亏格为 $\mu/2$ 、具有一个端点的可定向曲面.

(6) 整数 $\mu/2$ 等于该纽结的亏格.

(根据定义, 纽结 k 的亏格是 S^3 中跨接 k 的可定向曲面的最小亏格.)

将这一结果应用于我们的纤维化, 得到

推论 10.2. 若复曲线 V 只有一个分支过原点, 则 $K = V \cap S_\varepsilon$ 是一个 *Neuwirth-Stallings* 纽结. $\pi_1(S_\varepsilon - K)$ 的换位子群是秩为 μ 的自由群, 且 K 的亏格等于跨接曲面 \bar{F}_θ 的亏格 $\mu/2$.

(由此立即可知此整数 μ 与第 7.2 节的重数 μ 一致.)

注记. 并非每个 *Neuwirth-Stallings* 纽结都能用这种方式得到. 例如, “八字结”(ALEXANDER-BRIGGS 表中的 4_1) 是一个 *Neuwirth-Stallings* 纽结, 但不能作为复奇异性的纽结 $V \cap S_\varepsilon$ 出现, 因为其 *Alexander* 多项式 $t^2 - 3t + 1$ 不是分圆多项式的乘积. (比较第 9 节的讨论.)

下面概述这一论证中较容易的部分, 即证明

$$(1) \implies (2) \implies (3), (4).$$

若 $S^3 - k$ 以连通纤维 F 为底圆上的纤维化, 则正合序列

$$\pi_2(S^1) \rightarrow \pi_1(F) \rightarrow \pi_1(S^3 - k) \rightarrow \pi_1(S^1) \rightarrow 1$$

表明 $\pi_1(F)$ 可以与 $G = \pi_1(S^3 - k)$ 的换位子群 G' 等同. 由于任何开曲面的基本群都是自由的, 这验证了 (2). 根据 RAPAPORT 和 CROWELL, 任何纽结群的 Abel 化换位子群 G'/G'' 都是无挠有限秩的. 因此 (2) 蕴含 (3). 事实上, 他们证明了 G'/G'' 的秩等于 *Alexander* 多项式的次数; 但该群实际上是有限生成的当且仅当 *Alexander* 多项式的首项系数为 ± 1 . 因此 (2) 蕴含 (4).

下面讨论奇异点处的代数几何. 对于曲线 $V \subset \mathbb{C}^2$ 的任何奇异点 z , 都有一个整数 $\delta_z > 0$ 与之相关联, 它直观上度量了 V 在 z 处聚集的“二重点数”. (比较 10.9.) 精确定义读者可参阅 SERRE, 第 68 页.

对我们的目的而言, 此整数 δ_z 可由如下两个性质刻画.

性质 10.3. 整数 δ_z 是局部解析不变量. 即, 若定义在 z 的某开邻域内的复解析同胚将 V 局部映到另一代数曲线 V' , 并将 z 映到 z' , 则整数 $\delta_z(V)$ 等于 $\delta_{z'}(V')$. 事实上, 若 V' 与 V 仅由形式幂级数坐标变换相联系, 同样的结论也成立.

性质 10.4. 若 Γ 是复射影平面中次数为 d 、亏格为 g 的不可约曲线, 则

$$\frac{1}{2}(d-1)(d-2) = g + \sum \delta_z,$$

右端对所有 Γ 的奇异点 z 求和.

这两个性质由 SERRE 证明（分别为第 68 页和第 74 页）。

注记. 对代数几何学家而言，曲线的“亏格”是指有理函数域的某个不变量，先验地看与拓扑学家的“亏格”定义很不同。但经典定理断言，对非奇异复曲线这两种定义是一致的。（例如见 SPRINGER 或 CHEVALLEY.）

定理 10.5. 假设曲线 V 有 r 个分支过原点。则整数 $\delta = \delta_0(V)$ 与第 7 节的重数 μ 通过方程

$$2\delta = \mu + r - 1$$

相联系。

例如，当 $r = 1$ 时，这表明 $2\delta = \mu$ ，所以 δ 等于纽结 $K = V \cap S_\varepsilon$ 的亏格。

注记. 定理 10.5 的陈述是纯代数的，对其他特征为零的域上的曲线应当也成立。但证明将是拓扑的，仅适用于复数情形。

定理 10.5 的证明. 设 $f(z_1, z_2)$ 生成在 V 上取零值的多项式理想。若 $f(z_1, z_2)$ 的次数为 d ，则相应的齐次方程

$$z_0^d f(z_1/z_0, z_2/z_0) = 0$$

定义了复射影平面中的一条曲线 \bar{V} ， \bar{V} 与有限平面 \mathbb{C}^2 的交集等于 V 。

情形 1. 假设完备曲线 \bar{V} 是不可约的，且除原奇异点 $0 \in V$ 外没有其他奇异点。

则 Plücker 公式 10.4 给出

$$\frac{1}{2}(d-1)(d-2) = g + \delta, \quad (1)$$

其中 g 是 \bar{V} 的亏格， $\delta = \delta_0(V)$ 。

现选取一个小常数 c ，令 V_c 表示簇

$$\{(z_1, z_2) \mid f(z_1, z_2) = c\}.$$

由 Sard 定理或 Bertini 定理，对几乎所有 c 的选取， V_c 根本没有奇异点。显然完备簇 \bar{V}_c 也没有奇异点，因此

$$\frac{1}{2}(d-1)(d-2) = g_c \quad (2)$$

其中 g_c 表示 \bar{V}_c 的亏格。从 (2) 减去 (1) 得到

$$\delta = g_c - g. \quad (3)$$

现在考察这一情形的拓扑. 回忆 V 横截相交适当球面 S_ε 于由 r 个不交圆周组成的光滑流形 K . 若 c 充分小, 则显然 V_c 也横截相交 S_ε , 且交集 K_c 也由 r 个不交圆周组成.

回忆第 5.11 节, V_c 与开 ε 圆盘的交集微分同胚于纤维 F_θ . 所以带边流形 $V_c \cap D_\varepsilon$ 是连通的, 其第一 Betti 数等于 μ , Euler 数为

$$\chi(V_c \cap D_\varepsilon) = 1 - \mu.$$

由于两个流形 $V_c \cap D_\varepsilon$ 和 $\bar{V}_c - \text{int}D_\varepsilon$ 的并是 \bar{V}_c , 交是 K_c , \bar{V}_c 的 Euler 数 $2 - 2g_c$ 必须等于

$$\chi(V_c \cap D_\varepsilon) + \chi(\bar{V}_c - \text{int}D_\varepsilon) - \chi(K_c).$$

因此

$$2 - 2g_c = 1 - \mu + \chi(\bar{V}_c - \text{int}D_\varepsilon). \quad (4)$$

在对 \bar{V} 的亏格 g 作类似计算之前, 必须选取一个非奇异模型, 比如 Γ , 对应于奇异曲线 \bar{V} . 因此 Γ 是非奇异射影曲线 (可能在更高维射影空间中), 且存在映射 $\Gamma \rightarrow \bar{V}$, 除 Γ 的 r 个不同点映到 \bar{V} 的一个奇异点外, 它是处处一一的. 因此

$$2 - 2g = \chi(\Gamma) = \chi(\bar{V}) + r - 1.$$

将 \bar{V} 表为两个子集 $\bar{V} \cap D_\varepsilon$ 和 $\bar{V} - \text{int}D_\varepsilon$ 的并, 其交为 K , 并注意 $\bar{V} \cap D_\varepsilon$ 由 2.10 是可缩的, 有

$$\chi(\bar{V}) = 1 + \chi(\bar{V} - \text{int}D_\varepsilon),$$

因此

$$2 - 2g = \chi(\bar{V} - \text{int}D_\varepsilon) + r. \quad (5)$$

但显然流形 $(\bar{V} - \text{int}D_\varepsilon)$ 与 $(\bar{V}_c - \text{int}D_\varepsilon)$ 是微分同胚的, 只要数 c 充分小. 因此, 从 (5) 减去 (4) 并与 (3) 比较, 得到所需公式

$$2\delta = 2(g_c - g) = \mu + r - 1.$$

这就证明了定理 10.5 的情形 1.

情形 2. 假设射影曲线 \bar{V} 是可约的, 或者除原点外还有其他奇异点.

则将给 $f(z_1, z_2)$ 添加一个齐次多项式

$$h(z) = c_0 z_1^e + c_1 z_1^{e-1} z_2 + \cdots + c_e z_2^e$$

来修改它, 其次数 $e \geq d$. 令 V' 为 \mathbb{C}^2 中的曲线 $f(z_1, z_2) + h(z_1, z_2) = 0$, 令 \bar{V}' 为相应的射影曲线

$$z_0^e f(z_1/z_0, z_2/z_0) + h(z_1, z_2) = 0.$$

下面证明两个引理.

引理 10.6. 若修正项的次数 e 充分大, 则与 V' 的奇异点 0 相关联的整数 δ' 、 μ' 、 r' 分别等于与 V 的奇异点 0 相关联的相应整数 δ 、 μ 、 r .

引理 10.7. 若 e 充分大, 则对几乎所有复系数 c_0, c_1, \dots, c_e 的选取, 射影曲线 \bar{V}' 将是不可约的, 且除原点 $z_1 = z_2 = 0$ 外没有其他奇异点.

结合这两个引理, 显然得到定理 10.5 的一个证明. 因为等式

$$2\delta' = \mu' + r' - 1$$

由定理 10.5 的情形 1 成立, 且等式 $2\delta = \mu + r - 1$ 当然随之成立.

引理 10.6 和 10.7 的证明将基于如下结果.

引理 10.8. 设 f 和 g 是 m 个变量的复解析函数. 若 f 在 0 处有孤立临界点, 且若 $g - f$ 在 0 处有充分高阶的零点, 则存在如下形式的幂级数

$$w(z) = z + \sum a_{jk} z_j z_k + (\text{高阶项})$$

使得

$$f(w(z)) = g(z).$$

注记. *John Mather* 证明了强得多的结论, 即 $w(z)$ 可以选取为收敛幂级数. (未发表.) 这对我们的目的更方便, 但这里只证明上面给出的较弱结论.

引理 10.8 的证明. 由于解析方程

$$\partial f / \partial z_1 = \dots = \partial f / \partial z_m = 0$$

定义了一个在原点处有孤立点的解析集, 由零点定理的局部解析版本可知, 第 j 个坐标函数 z_j 的某次幂 $z_j^{k_j}$ 属于由 $\partial f / \partial z_1, \dots, \partial f / \partial z_m$ 在局部收敛幂级数环中张成的理想. (见 GUNNING 和 ROSSI.)

令 $k = k_1 + \dots + k_m$, 则每个次数 $i_1 + \dots + i_m \geq k$ 的单项式 $z_1^{i_1} \dots z_m^{i_m}$ 属于此理想.

现转到形式幂级数环 $\mathbb{C}[[z_1, \dots, z_m]]$. 此环的元素将用诸如 $f = f(z)$ 的符号表示. 令 I 为由 z_1, \dots, z_m 张成的极大理想. 显然已建立了如下结论.

断言. 若 $e \geq k$, 则理想 I^e 的每个元素都可表为线性组合

$$a_1 \partial f / \partial z_1 + \cdots + a_m \partial f / \partial z_m$$

其中系数

$$a_1, \dots, a_m \in I^{e-k}.$$

设 $f \equiv g \pmod{I^{2k+1}}$. 令

$$g(z) - f(z) = \sum a_j^1(z) \partial f / \partial z_j$$

其中 $a_j^1 \in I^{k+1}$, 可以作 Taylor 展开

$$\begin{aligned} f(z + a^1(z)) &= f(z) + \sum a_j^1(z) \partial f / \partial z_j \\ &\quad + \frac{1}{2} \sum a_i^1(z) a_j^1(z) \partial^2 f / \partial z_i \partial z_j + \cdots \\ &\equiv g(z) \pmod{I^{2k+2}}. \end{aligned}$$

归纳假设可以找到元素

$$a_j^2 \in I^{k+2}, \dots, a_j^s \in I^{k+s}$$

使得

$$f(z + a^1(z) + \cdots + a^s(z)) \equiv g(z) \pmod{I^{2k+s+1}}.$$

记此方程左端为 $f'(z)$, 类似的论证可构造元素 $b_j \in I^{k+s+1}$ 使得

$$f'(z + b(z)) \equiv g(z) \pmod{I^{2k+2s+2}}.$$

令

$$a^{s+1}(z) = b(z) + \sum_{\nu=1}^s (a^\nu(z + b(z)) - a^\nu(z)),$$

则有

$$\begin{aligned} f(z + a^1(z) + \cdots + a^{s+1}(z)) &= f((z + b(z)) + a^1(z + b(z)) + \cdots + a^s(z + b(z))) \\ &= f'(z + b(z)) \equiv g(z) \pmod{I^{2k+s+2}}. \end{aligned}$$

由于 $a_j^{s+1}(z) \in I^{k+s+1}$, 归纳完成.

现今 $s \rightarrow \infty$ 取极限, 得到所需方程

$$f(z + a^1(z) + a^2(z) + \cdots) = g(z).$$

这就完成了引理 10.8 的证明. □

引理 10.6 的证明. 等式 $\delta' = \delta$ 是引理 10.8 与 10.3 的直接推论. 等式 $r' = r$ 也由 10.8 得出, 因为代数曲线的“分支”可以用形式幂级数参数化来定义. (例如见 VAN DER WAERDEN 《Algebraische Geometrie》, 第 52 页.)

等式 $\mu' = \mu$ 将用相当不同的论证来证明. 我们将用 m 个变量的函数进行, 因为证明并不更困难. 由于实多项式函数 $\|\text{grad}f\|^2$ 在原点有孤立零点, Hörmander 和 LOJASIEWICZ 的一个不等式蕴含此函数被 $\|z\|$ 的某次幂从下方界定, 比如

$$\|\text{grad}f(z)\| \geq c\|z\|^r > 0$$

对 $0 < \|z\| \leq \varepsilon$ 成立. (此不等式也可由局部解析零点定理导出.)

现若齐次多项式 h 的次数 $\geq r + 2$, 则

$$\|\text{grad}h(z)\| < c\|z\|^r$$

对小 z 成立. 利用 Rouché 原理, 容易得出映射

$$(\partial(f+h)/\partial z_1, \dots, \partial(f+h)/\partial z_m) / \|(\partial(f+h)/\partial z_1, \dots, \partial(f+h)/\partial z_m)\|$$

在球面 S_ε 上的次数 μ' 等于映射

$$(\partial f/\partial z_1, \dots, \partial f/\partial z_m) / \|(\partial f/\partial z_1, \dots, \partial f/\partial z_m)\|$$

在 S_ε 上的次数 μ . (比较附录 B.) 这就完成了引理 10.6 的证明. □

引理 10.7 的证明. 若齐次修正项的次数 $e \geq d$, 则由 Bertini 定理立即可知, 对几乎所有系数的选取, 修改后的曲线 \bar{V}' 除原点外没有其他奇异点. (比较 VAN DER WAERDEN, 《Algebraische Geometrie》, 第 201 页.)

假设修改后的多项式 $f(z_1, z_2) + h(z_1, z_2)$ 是可约的, 分解为两个次数分别为 d_1 和 d_2 的因子之积, 且 $d_1 + d_2 = e$. 由 Bezout 定理, 相应的两条射影曲线必须相交, 总相交重数等于 $d_1 d_2$.

这些曲线只能在原点相交, 因为它们的并 \bar{V}' 除 0 外没有其他奇异点. 但在 0 处的相交重数显然在形式幂级数坐标变换下是不变的. 所以由 10.8 可知, 过 0 的 V 的 r 个分支可以划分为两个子集, 其相交重数等于 $d_1 d_2 \geq e - 1$. 对充分大的 e , 这显然是不可能的, 所以多项式 $f(z_1, z_2) + h(z_1, z_2)$ 必须是不可约的. 这就完成了引理 10.7 和定理 10.5 的证明. □

注记 10.9. 希望对整数 δ 有更好的拓扑解释. 可以证明链环 $K = V \cap S_\varepsilon$ 在圆盘 D_ε 中界定了 r 个光滑 2 维胞腔的集合, 除 δ 个普通二重点外没有其他奇异性. 问题: δ 是否可能等于 K 的“Überschneidungszahl”: 即 K 在光滑变形过程中必须允许自身交叉的最小次数, 以便将 K 变换为 r 个不环绕不打结的圆周的集合? (比较 WENDT.)

注记 10.10. 在 $r = 1$ 的情形下, 这里给出 δ 的一个显式公式. 用参数 w 局部描述曲线 V , 通过幂级数

$$\begin{aligned} z_1 &= w^{a_0} \\ z_2 &= \lambda_1 w^{a_1} + \lambda_2 w^{a_2} + \lambda_3 w^{a_3} + \cdots, \end{aligned}$$

其中指数 a_j 是正整数, 最大公约数为 1, 且 $a_1 < a_2 < a_3 < \cdots$, 系数 λ_j 非零. (比较第 3.3 节.) 令 D_j 表示 $\{a_0, a_1, \dots, a_{j-1}\}$ 的最大公约数, 则对大的 k 有 $a_0 = D_1 \geq D_2 \geq \cdots \geq D_k = 1$. 于是

$$\mu = 2\delta = \sum_{j \geq 1} (a_j - 1)(D_j - D_{j+1}).$$

证明略去.

在 $r > 1$ 的情形, 整数 δ 可描述为和

$$\delta = \delta_{(1)} + \cdots + \delta_{(r)} + \sum_{i < j} \delta_{ij}$$

其中 $\delta_{(i)} \geq 0$ 表示第 i 分支相关联的整数 δ , $\delta_{ij} > 0$ 表示第 i 分支与第 j 分支之间的相交重数. (于是 $\delta \geq r(r-1)/2$, 从而 $\mu = 2\delta - r + 1 \geq (r-1)^2$.)

注记 10.11. 按照 BURAU 和 Kähler 的做法, 这里给出对纽结 K 的一个更明确的描述. 上面的参数化总可以选取使得 $a_0 < a_1$. 则 K 是一个“复合缆绳纽结”, 它可以通过以下方式构造: 从一条不打结的圆周 k_0 开始, 在 k_0 的管状邻域边界上选取一条纽结 k_1 , 然后在 k_1 的管状邻域边界上选取 k_2 , 依此类推; 构造迭代次数等于上面 $\mu = 2\delta$ 公式中非零项的个数.

为完成本节, 这里给出 10.1 的证明. 首先回忆纽结的 Alexander 多项式 ($r \geq 2$ 时由 FOX 提出) 的定义.

给定任何群 G , 令 X 为基本群为 G 的连通复形. 任何正规子群 $N \subset G$ 确定了一个正则覆叠 \tilde{X} , 满足 $\pi_1(\tilde{X}) = N$. 令 X^0 为 X 中的基点, \tilde{X}^0 为它在 \tilde{X} 中的完全逆像. 则同调 $H_1(\tilde{X}, \tilde{X}^0)$ 可以看作覆叠变换群 $\mathbb{Z}[G/N]$ 的整数群环上的模. 此模的同构类仅依赖于 G 和 N .

特别地, 给定 G 的一个含 p 个生成元和 q 个关系的表示, 可以选取 X 为具有单个顶点、每个生成元对应一个 1 维胞腔、每个关系对应一个 2 维胞腔的 2 维复形. 正合序列

$$H_2(\tilde{X}, \tilde{X}^1) \rightarrow H_1(\tilde{X}^1, \tilde{X}^0) \rightarrow H_1(\tilde{X}, \tilde{X}^0) \rightarrow 0,$$

其中前两个模是自由的, 表明模 $H_1(\tilde{X}, \tilde{X}^0)$ 有 p 个生成元和 q 个关系的表示. (这里 \tilde{X}^1 表示 1 维骨架.)

若覆叠变换群 G/N 是 Abel 的, 则相应关系矩阵的 $(p-i) \times (p-i)$ 子式张成理想 $E_i^N \subset \mathbb{Z}[G/N]$, 它是模 $H_1(\tilde{X}, \tilde{X}^0)$ 的不变量. (比较 ZASSENHAUS.) 特别地, 若 G' 是 G 的换位子群, 则理想 $E_i^{G'}$

当然有定义.

若 G 是某个纽结的群, N 是换位子群 G' , 则“阶理想” $E_0^{G'}$ 为零; 且 $E_1^{G'}$ 是主理想. $E_1^{G'}$ 的一个生成元称为该纽结的 Alexander 多项式.

若 G 是含 $r \geq 2$ 个定向分支的链环的群, 则 G/G' 是以 t_1, \dots, t_r 为生成元的自由 Abel 群, 分别对应于各分支. 在此情形同样有 $E_0^{G'} = 0$; 且理想 $E_1^{G'}$ 等于基本理想 $(t_1 - 1, \dots, t_r - 1)$ 乘以一个主理想. 主理想的生成元仍称为 Alexander 多项式.

为证明 10.1, 必须研究从底空间 S^1 的万有覆叠产生的 $E = S_\varepsilon - K$ 的无限循环覆叠 \tilde{E} . 此覆叠对应于 $G = \pi_1(S_\varepsilon - K)$ 的某个正规子群 N . 显然自然同态

$$\mathbb{Z}[G/G'] \rightarrow \mathbb{Z}[G/N]$$

将 G/G' 的所有生成元 t_1, \dots, t_r 映到 G/N 的单个生成元, 比如 t . 显然理想

$$E_i^N \subset \mathbb{Z}[G/N]$$

是相应理想 $E_i^{G'}$ 在此同态下的像. 特别地, 假设 $r \geq 2$, 理想

$$E_1^{G'} = (t_1 - 1, \dots, t_r - 1)\Delta(t_1, \dots, t_r)$$

必须映到 E_1^N , 因此

$$E_1^N = ((t - 1)\Delta(t, \dots, t)).$$

现考虑正合序列

$$0 \rightarrow H_1\tilde{E} \rightarrow H_1(\tilde{E}, \tilde{E}^0) \xrightarrow{\partial} H_0\tilde{E}^0 \rightarrow H_0\tilde{E} \rightarrow 0.$$

(比较 CROWELL, “Corresponding group and module sequences.”) 容易验证 $H_0\tilde{E}^0$ 是以 ξ 为生成元的自由 $\mathbb{Z}[G/N]$ 模, 且 $\partial H_1(\tilde{E}, \tilde{E}^0)$ 是由 $(t - 1)\xi$ 生成的自由子模. 因此

$$H_1(\tilde{E}, \tilde{E}^0) \cong H_1\tilde{E} \oplus \mathbb{Z}[G/N].$$

所以第一初等理想

$$E_1^N(H_1(\tilde{E}, \tilde{E}^0)) = ((t - 1)\Delta(t, \dots, t))$$

显然等于阶理想 $E_0^N(H_1\tilde{E})$.

但此阶理想显然由线性变换的特征多项式 $\Delta(t)$ 张成, 该变换将自由 Abel 群 $H_1\tilde{E} \cong H_1F_\theta$ 的

每个元 a 映到 $t_*(a)$. (比较第 8.6 节.) 于是得到所需公式

$$((t-1)\Delta(t, \dots, t)) = (\Delta(t)),$$

在 $r \geq 2$ 的情形.

由于 $r = 1$ 的讨论完全类似, 这就完成了证明. □

第十一章

实奇点的纤维化定理

设 $f: \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^k$ 为一个多项式映射, 它将原点映到原点, 且满足以下条件.

假设 11.1. 存在 \mathbb{R}^m 中原点的一个邻域 U , 使得矩阵 $(\partial f_i / \partial x_j)$ 对所有 $x \in U - \{0\}$ 都具有秩 k .

由此可知, 方程

$$f_1(x) = \cdots = f_k(x) = 0$$

定义了一个代数集 V , 它在 $U \cap V - \{0\}$ 上构成一个维数为 $m - k$ 的光滑流形. 此外, 交集 $K = V \cap S_\varepsilon^{m-1}$ 对于充分小的 ε 是一个维数为 $m - k - 1$ 的光滑流形. (与 2.9 比较. 注意 K 可能为空.)

同时假设 $k \geq 2$.

定理 11.2. S_ε^{m-1} 中 K 的开管状邻域之补集是一个光滑纤维丛的全空间, 其底空间为球面 S^{k-1} , 每个纤维 F 都是光滑紧致的 $(m - k)$ 维流形, 其边界是 K 的一个拷贝.

证明. 利用 2.9 或 3.1 可以验证, 原点是映射

$$f|_{S_\varepsilon^{m-1}}: S_\varepsilon^{m-1} \rightarrow \mathbb{R}^k.$$

的一个正则值.

因此存在一个完全由正则值组成的小圆盘 D_η^k . 由此可知, 原像

$$T = \{x \in S_\varepsilon^{m-1} \mid \|f(x)\| \leq \eta\}$$

在 D_η^k 上以 K 为典型纤维构成纤维化. (与 EHRESMANN 比较.) 由于底空间可缩, 故 T 微分同胚于积空间 $K \times D_\eta^k$. 我们将 T 称为 K 在 S_ε^{m-1} 中的管状邻域.

现在考虑集合 $E = D_\epsilon^m \cap f^{-1}(S_\eta^{k-1})$. (与图 6 比较.) 注意 E 是以 $\partial E = \partial T$ 为边界的光滑流形. 一个类似于 Ehresmann 的论证表明

$$f|_E : E \rightarrow S_\eta^{k-1}$$

也是一个光滑纤维丛的投影映射. 典型纤维

$$F_y = D_\epsilon^m \cap f^{-1}(y),$$

是以集合

$$\partial F_y = S_\epsilon^{m-1} \cap f^{-1}(y)$$

为边界的紧致流形, 该集合微分同胚于 K (因为它是纤维化 $T \rightarrow D_\eta^k$ 的一个纤维).

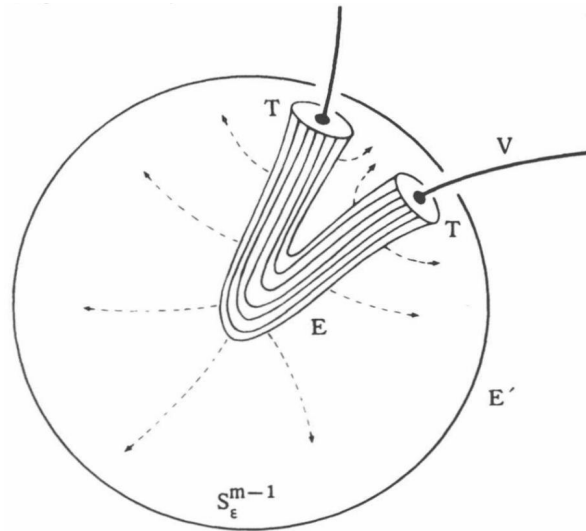


图 11.1

引理 11.3. 该丛的全空间 $E = D_\epsilon^m \cap f^{-1}(S_\eta^{k-1})$ 微分同胚于开管状邻域的补集 $(S_\epsilon^{m-1} - \text{int } T)$.

换言之, E 微分同胚于由所有满足 $\|f(x)\| \geq \eta$ 的 $x \in S_\epsilon^{m-1}$ 构成的流形 E' . 证明类似于 5.10. 首先需要在 $D_\epsilon^m - V$ 上构造一个向量场 $v(x)$, 使得欧几里得内积 $\langle v(x), x \rangle$ 和 $\langle v(x), \text{grad} \|f(x)\|^2 \rangle$ 均为正. 这是可行的, 因为两个向量场

$$\text{grad} \|f(x)\|^2$$

和

$$2x = \text{grad} \|x\|^2$$

在整个 $D_\epsilon^m - V$ 上非零, 且根据 3.4 它们不可能指向相反的方向.

现在沿着该向量场 v 的轨迹向外推, 可将 E 微分同胚地映射到 E' 上. 这就证明了引理 11.3.

因此, E' 即 S_ϵ^{m-1} 中 K 的开管状邻域之补集, 也可以在 S_η^{k-1} 上纤维化. 这就完成了定理 11.2 的证明. \square

注记. 再稍加努力, 可以证明整个补集 $S_\epsilon^{m-1} - K$ 也可在 S^{k-1} 上纤维化, 每个纤维是以 K 为边界的紧致流形之内部.

然而, 从 $S_\epsilon^{m-1} - K$ 到 S^{k-1} 的显然映射

$$x \mapsto f(x)/\|f(x)\|$$

不一定是纤维化的投影映射. [这种直接构造在某些情况下会失效, 例如

$$f(x_1, x_2) = (x_1, x_1^2 + x_2(x_1^2 + x_2^2)).]$$

注意, 任何满足 11.1 的多项式映射 $\mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^k$ 都可与投影 $\mathbb{R}^k \rightarrow \mathbb{R}^{k-1}$ 复合, 得到一个新的映射 $\mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^{k-1}$, 它自然也同样满足 11.1. 猜想: 与新映射相关联的纤维化的纤维同胚于原纤维与单位区间的乘积.

定理 11.2 的主要弱点在于假设条件太强, 难以找到合适的例子.

问题. 对于哪些维数 $m \geq k \geq 2$ 存在非平凡的例子?

“非平凡”在此应作何解释尚不清楚. 当然, 投影 $f(x_1, \dots, x_m) = (x_1, \dots, x_k)$ 是一个平凡的例子. 这里有一个尝试性的定义: 当且仅当纤维化 $E' \rightarrow S^{k-1}$ 的纤维 F 微分同胚于圆盘 D^{m-k} 时, 该例子被称为平凡的. (这意味着 K 在 S_ϵ^{m-1} 中与 ∂F 同痕, 故必须是一个不打结的球面.)

当 $k = 2$ 时存在许多非平凡的例子. 实际上, 第 6 节中的所有纤维化都作为例子出现: 每个在原点处有孤立临界点的复多项式 $f(z_1, \dots, z_m)$ 都产生一个多项式映射 $\mathbb{R}^{2m} \rightarrow \mathbb{R}^2$, 它显然满足假设 11.1.

问题. 当 $k = 2$ 时, 是否存在其他本质上不同的例子? 例如, 八字结是否可以作为与多项式映射 $\mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R}^2$ 相关联的交集 $V \cap S_\epsilon$ 出现? 当 m 为奇数且 $k = 2$ 时, 是否存在非平凡的例子?

若 $m < 2(k - 1)$, 则可猜想所有例子都是平凡的. (相比之下, 我们将展示 Kuiper 的一些非平凡例子, 其中 $m = 2(k - 1) = 4, 8, 16$.)

引理 11.4. 如果 $m < 2(k - 1)$, 则纤维 F 必然是可缩的.

证明. 球面 S_ϵ^{m-1} 可以通过在子空间 $E' = S_\epsilon^{m-1} - \text{int}T$ 上附加若干维数 $\geq k$ 的胞腔得到, 对 K 的每个 i 维胞腔附加一个 $(k + i)$ 维胞腔. 因此

$$\pi_i E' \cong \pi_i S_\epsilon^{m-1} = 0$$

对于 $i \leq k - 2$ 成立.

由于纤维化 $E' \rightarrow S^{k-1}$ 具有截面 $S^{k-1} \rightarrow \partial E' \subset E'$, 故序列

$$0 \rightarrow \pi_i F \rightarrow \pi_i E' \rightarrow \pi_i S^{k-1} \rightarrow 0$$

是分裂正合的. 因此纤维 F 也是 $(k - 2)$ 连通的.

现在假设 $m < 2(k - 1)$. 则 $k \geq 3$, 因此 F 是单连通的. 如同 6.2, 存在 Alexander 对偶同构

$$\tilde{H}_i F = \tilde{H}^{m-i-2} F.$$

因此, 若 F 的维数 $m - k$ 小于 $(m - 2)/2$, 则 F 具有一个点的同调. 而具有一个点同调的单连通空间自然是可缩的.

由于条件 $m - k < \frac{1}{2}(m - 2)$ 等价于引理 11.4 的假设 $m < 2(k - 1)$, 这就完成了证明. \square

因此, 若 $m < 2(k - 1)$, 则 F 是可缩的, 并且容易推出 K 是一个同调球面. 若 F 的维数 $m - k \leq 2$, 则 F 是一个实际的胞腔, 该例子是“平凡的”. 但若 $m - k \geq 3$, 我无法证明 F 是一个胞腔; 而若 $m - k \geq 4$, 我无法证明 K 是单连通的.

接下来, 我将证明, 若余维数 $k \geq 3$ 且 $m - k \geq 6$, 则 K 不可能是一个怪球面或纽结球面.

引理 11.5. 如果余维数 $k \geq 3$, 且 K 具有球面的同调, 则纤维 F 必然是可缩的.

因此, 若 K 实际上是一个维数为 $m - k - 1 \geq 5$ 的同伦球面, 则由 SMALE 可知 F 微分同胚于一个圆盘, 因此该例子是“平凡的”. 对于 $m - k - 1 = 2, 3, 4$ 的情形, 我尚不清楚这是否成立.

证明. 如同 11.4 的证明, 纤维 F 是 $(k - 2)$ 连通的. 由于 K 是一个 $(m - k - 1)$ 维同调球面, 由 Alexander 对偶可知空间 E' 是一个 $(k - 1)$ 维同调球面. 利用纤维化的 Wang 序列

$$\cdots \rightarrow H_i F \rightarrow H_{k-1} F \rightarrow H_{k-1} E' \rightarrow H_0 F \rightarrow H_{k-2} F \rightarrow \cdots$$

容易推出 F 具有一个点的同调; 这完成了证明. \square

在本节结束之前, 让我描述一些由 N. Kuiper 建议的例子. 首先将证明 Hopf 纤维化 $S^{2p-1} \rightarrow S^p$ (其中 $p = 2, 4, 8$) 可以从定理 11.2 得到. (与 P. Baum, Illinois J. Math. 11, p. 586 比较.)

设 A 表示复数、四元数或 Cayley 数. 定义

$$f: A \times A \rightarrow A \times \mathbb{R}$$

为

$$f(x, y) = (2x\bar{y}, |y|^2 - |x|^2).$$

引理 11.6. 该映射 f 将 $A \times A$ 的单位球面通过 Hopf 纤维化映到 $A \times \mathbb{R}$ 的单位球面.

证明. 恒等式

$$\|f(x, y)\|^2 = |2x\bar{y}|^2 + (|y|^2 - |x|^2)^2 = (|x|^2 + |y|^2)^2$$

表明 f 将 $A \times A$ 的单位球面映到 $A \times \mathbb{R}$ 的单位球面. 现在将 f 与球极投影

$$\sigma(z, t) = z/(1 + t)$$

复合, 后者将去掉点 $(0, -1)$ 的 $A \times \mathbb{R}$ 的单位球面微分同胚地映到 A 上. 则

$$\begin{aligned} \sigma f(x, y) &= 2x\bar{y}/(1 + |y|^2 - |x|^2) \\ &= 2x\bar{y}/2|y|^2 = xy^{-1} \end{aligned}$$

(假设 $|x|^2 + |y|^2 = 1$).

将此公式与 Hopf 纤维化的显式定义比较 (与 STEENROD, p. 109 比较), 我们看到 f 限制在单位球面上确实构成一个 Hopf 纤维化. □

现在我可以描述 Kuiper 的例子了. 设 A 如上, 定义

$$f : A^n \times A^n \rightarrow A \times \mathbb{R}$$

为

$$f(x, y) = (2 \langle x, y \rangle, \|y\|^2 - \|x\|^2),$$

其中使用 A^n 上的 Hermite 内积. 为验证 (实) 一阶导数矩阵在每个异于 $(0, 0)$ 的点处具有极大秩, 显然只需考虑 $n = 1$ 的情形. 但对于 $n = 1$, 该结论容易从 11.6 以及 f 为实二次齐次的事实推出.

因此 f 满足假设 11.1. 注意 f 将实维数为 $4n$ 、 $8n$ 或 $16n$ 的向量空间分别映到维数为 3、5 或 9 的向量空间. 相应纤维化的底空间分别是维数为 2、4 或 8 的球面.

在这个 Kuiper 例子中, 流形 K 是 A^n 中 2-标架的 Stiefel 流形, 纤维 F 微分同胚于 A^n 的单位球面上的一个圆盘丛, 由 $A^n \times A^n$ 中满足

$$\|x\| = 1, \quad \|y\| \leq 1, \quad \text{且} \quad \langle x, y \rangle = 0$$

的所有对 (x, y) 组成.

附录 A

Whitney 关于代数集的有限性定理

本附录将给出定理 2.4 的一个证明，与 Whitney 的证明略有不同。该定理断言，任意实或复代数集的差 $V - W$ 至多具有有限个拓扑分支。

只需考虑实情形，因为 \mathbb{C}^m 中的任意复代数集都可以视为 \mathbb{R}^{2m} 中的实代数集。

(注记：若 V 是复不可约的，则可给出更强的断言： $V - W$ 是连通的。参见 LEFSCHETZ, *Algebraic Geometry*, 第 97 页。)

证明基于以下引理。设 V 是任意无限域上 m 维坐标空间中的代数集， f_1, \dots, f_m 是在 V 上恒为零的多项式。

引理 A.1. 若矩阵 $(\partial f_i / \partial x_j)$ 在 V 的某点 x^0 处非奇异，则从 V 中移除 x^0 后，其补集 $V - \{x^0\}$ 仍是代数集。

在实情形中，这显然意味着 x^0 是 V 的孤立点。（但其逆不成立：参见 §2 的例 2。）

证明. 不妨设 $x^0 = 0$ 。由于多项式 f_j 在原点为零，故可选取多项式 g_{jk} 使得

$$f_j(x) = g_{j1}(x)x_1 + \cdots + g_{jm}(x)x_m$$

记 W 为 V 中所有满足多项式方程

$$\det(g_{jk}(x)) = 0$$

的点 x 构成的代数集。故原点不属于 W ，因为矩阵

$$(\partial f_j(0) / \partial x_k) = (g_{jk}(0))$$



是非奇异的. 但在 V 的任意非零点 x 处, 线性相关关系

$$\begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} g_{11}(x) \\ \vdots \\ g_{m1}(x) \end{pmatrix} x_1 + \cdots + \begin{pmatrix} g_{1m}(x) \\ \vdots \\ g_{mm}(x) \end{pmatrix} x_m$$

表明 $\det(g_{jk}(x)) = 0$. 所以 $V - \{0\} = W$, 这就证明了 $V - \{0\}$ 是代数集. \square

现在考虑实数域 \mathbb{R} 这一特殊情形.

推论 A.2. 若代数集 $V \subset \mathbb{R}^m$ 的拓扑维数为零 (例如, 若 V 仅由孤立点组成), 则 V 是有限集.

证明. 设 f_1, \dots, f_k 生成理想 $I(V)$. 只需证明每个零维代数集 V 都至少包含一点 x^0 , 使得矩阵 $(\partial f_i / \partial x_j)$ 的秩为 m . 因为根据 A.1, 可以移除点 x^0 , 得到一个真代数子集 $V_1 = V - \{x^0\}$. 重复这一构造, 得到一个嵌套代数子集链

$$V_1 \supset V_2 \supset V_3 \supset \dots$$

由于每条这样的链都必须在 §2.1 处终止, 这就证明了 V 是有限的.

但若矩阵 $(\partial f_i / \partial x_j)$ 在 V 的所有点处的秩至多为 $\rho \leq m - 1$, 则定理 2.3 将意味着 V 包含一个光滑流形 $V - \Sigma(V)$, 其维数为 $m - \rho \geq 1$. 这与 V 的拓扑维数为零的假设矛盾, 证毕. \square

引理 A.3. 任意非奇异代数集 $V \subset \mathbb{R}^m$ 都具有有限复形的同伦型.

证明. 对任意点 $a \in \mathbb{R}^m$, 记

$$r_a : V \rightarrow \mathbb{R}$$

为平方距离函数

$$r_a(x) = \|x - a\|^2.$$

ANDREOTTI 和 FRANKEL 的一个引理断言, 对几乎所有的 a 的选取, 函数 r_a 在 V 上仅有非退化临界点.

记 $\Gamma \subset V$ 为 r_a 的所有临界点构成的集合. 根据引理 2.7, Γ 是代数集. 非退化临界点显然是孤立的, 故由 A.2 可知 Γ 是有限集.

初等论证表明 V 仅有有限个分支. V 的每个分支 $V^{(i)}$ 必须与临界点集 Γ 相交. 因为距离 a 必须在闭集 $V^{(i)}$ 的某点 x 处取得最小值, 显然这个最近点 x 属于 Γ . 因此 V 只能有有限个分支.

或者, 回忆 Morse 理论的主要定理, 该定理断言流形 V 具有一个胞腔复形的同伦型, 其中胞腔的个数等于非退化、逆紧、非负函数 r_a 的临界点个数. (参见 MILNOR, Morse Theory, §3.5 以及 §6.6.) 于是 Γ 的有限性蕴含了更强的断言: V 具有有限复形的同伦型. 证毕. \square

推论 A.4. 对任意实代数集 V , 若 W 是包含奇异集 $\Sigma(V)$ 的代数子集, 则 $V - W$ 具有有限复形的同伦型.

证明. 设 W 由多项式方程 $f_1(x) = \cdots = f_k(x) = 0$ 定义. 记

$$s(x) = f_1(x)^2 + \cdots + f_k(x)^2,$$

注意 W 也可以由单个多项式方程 $s(x) = 0$ 定义.

现在记 G 为从 V 到 \mathbb{R} 的有理函数 $1/s$ 的图像. 即, 令 G 为所有满足 $s(x)y = 1$ 的

$$(x, y) \in V \times \mathbb{R} \subset \mathbb{R}^{m+1}$$

构成的集合.

显然 G 是代数集, 且与 $V - W$ 同胚. 简单的计算表明 G 没有奇异点, 证毕. □

定理. 对任意一对实代数集 $V \supset W$, 其差 $V - W$ 至多具有有限个道路分支.

证明. 根据 §2.5, 集合 V 可以表示为有限并 $M_1 \cup \cdots \cup M_p$, 其中流形 M_1 是 $V_1 = V$ 的非奇异点集, 流形 M_2 是 $V_2 = \Sigma(V_1)$ 的非奇异点集, 依此类推. 因此

$$V - W = (M_1 - W) \cup \cdots \cup (M_p - W)$$

其中每个

$$M_i - W = V_i - (\Sigma(V_i) \cup W)$$

都是流形, 根据 A.4 它仅有有限个 (道路) 分支.

由此可知, 并集 $V - W$ 仅有有限个道路分支. 这就完成了定理 2.4 的证明. □

注记 1. THOM, “L’homologie des variétés algébriques réelles” 以及 MILNOR, “On the Betti numbers of real varieties” 给出了代数集连通性的更精细估计.

注记 2. 自然可以猜想, 每个差 $V - W$ 实际上都具有有限复形的同伦型.

附录 B

解析方程组孤立解的重数

给定 m 个复变量的解析函数 g_1, \dots, g_m , 它们在 z^0 处有一个孤立公共零点, 将重数 μ 定义为映射

$$z \mapsto g(z)/\|g(z)\|$$

从以 z^0 为中心的 ε -球面到单位球面的度. (参见 §7.) 本附录通过验证若干初等性质来说明这一定义的合理性. 首先给出以下引理.

引理 B.1. 若 *Jacobi* 阵 $(\partial g_j / \partial z_k)$ 在 z^0 处非奇异, 则 $\mu = 1$.

证明. 考虑带余项的 Taylor 展开:

$$g(z) = L(z - z^0) + r(z),$$

其中线性变换 L 根据假设是非奇异的, 且

$$\|r(z)\|/\|z - z^0\|$$

当 $z \rightarrow z^0$ 时趋于零. 取充分小的 ε 使得

$$\|r(z)\| < \|L(z - z^0)\|$$

对所有满足 $\|z - z^0\| = \varepsilon$ 的 z 成立. 那么单参数映射族

$$h_t(z) = (L(z - z^0) + tr(z)) / \|L(z - z^0) + tr(z)\|, \quad 0 \leq t \leq 1,$$



从 $S_\varepsilon(z^0)$ 到单位球面, 表明 h_1 的度 μ 等于映射 $L/\|L\|$ 在 $S_\varepsilon(z^0)$ 上的度.

注记. 事实”当 $\|r\| < \|L\|$ 在 S_ε 上处处成立时, $(L+r)/\|L+r\|$ 在 S_ε 上的度等于 $L/\|L\|$ 的度”将被频繁使用. 称这一事实为“Rouché 原理”.

现在将 L 在群 $GL(m, \mathbb{C})$ 内连续形变到恒等变换, 这是可行的, 因为 Lie 群 $GL(m, \mathbb{C})$ 是连通的. 易知, 映射 $L/\|L\|$ 在 $S_\varepsilon(z^0)$ 上的度为 $+1$. 证毕. \square

接下来考虑 \mathbb{C}^m 中具有光滑边界的紧区域 D . 假设 g 在 D 内仅有有限个零点, 且在边界上没有零点.

引理 B.2. g 在 D 内的零点个数 (每个按其相应的重数计算) 等于映射

$$z \mapsto g(z)/\|g(z)\|$$

从 ∂D 到单位球面的度.

(注记. 对于单复变量的函数, 这一陈述称为“辐角原理”. 参见例如 HILLE, §9.2.2.)

证明. 从区域 D 中挖去以 g 的每个零点为中心的小开圆盘. 那么函数 $g/\|g\|$ 在剩余区域 D_0 上有定义且连续. 由于 ∂D 在 D_0 内同调于诸小边界球面的和, 可知 $g/\|g\|$ 在 ∂D 上的度等于在各小球面上的度之和 $\sum \mu$. (参见 MILNOR, “Topology from the differentiable viewpoint”, 第 28、36 页.) 证毕. \square

再次设 z^0 是 g 的具有重数 μ 的孤立零点.

引理 B.3. 若 D_ε 是包含 g 的其他零点的一个以 z^0 为中心的圆盘, 则对几乎所有充分靠近原点的点 $a \in \mathbb{C}^m$, 方程 $g(z) = a$ 在 D_ε 内恰有 μ 个解 z .

特别地, 这蕴涵:

推论 B.4. 不等式 $\mu \geq 0$ 恒成立.

B.3 的证明. 根据 Sard 定理, \mathbb{C}^m 的几乎每个点 a 都是可微映射

$$g : \mathbb{C}^m \rightarrow \mathbb{C}^m$$

的正则值. (参见 DE RHAM, 第 10 页.) 换言之, 对所有不属于某个 Lebesgue 零测集的 a , 矩阵 $(\partial g_j / \partial z_k)$ 在逆像 $g^{-1}(a)$ 的每一点 z 处都是非奇异的.

对任意这样的正则值 a , 注意解析方程组 $g(z) - a = 0$ 的解都是孤立的, 且重数为 $+1$. (引理 B.1.)

选取 g 的任意一个正则值 a , 它足够靠近原点, 使得

$$\|a\| < \|g(z)\|$$

对所有 $z \in \partial D_\varepsilon$ 成立. 那么根据引理 B.2, 方程 $g(z) - a = 0$ 在 D_ε 内的解的个数等于映射 $(g - a)/\|g - a\|$ 在 ∂D_ε 上的度. (每个解必须按某个重数计算, 但我们刚刚看到这些重数都是 +1.)

根据 Rouché 原理, 映射 $(g - a)/\|g - a\|$ 的度等于 $g/\|g\|$ 的度 μ . 证毕. \square

注记. 或许值得将这些引理在特殊情形 $g_j(z) = \partial f / \partial z_j$ (即 §7 的情形) 下进行解释. 引理 B.1 表明, 对于 f 的非退化临界点, 其中 Hessian 阵 $(\partial^2 f / \partial z_j \partial z_k)$ 非奇异, 整数 μ 为 +1. 引理 B.3 表明, 若将 f 扰动, 减去几乎任意的“小”线性多项式 $a_1 z_1 + \cdots + a_m z_m$, 则孤立临界点 z^0 将分裂成 μ 个附近的临界点, 它们都是非退化的.

下面证明定理 7.1.

定理. m 个多项式方程在 m 个变量下的孤立解的重数 μ 恒为正整数.

证明. 给定一个以 z^0 为中心且不含 g 的其他零点的圆盘 D_ε , 选取一个数 η , 它足够小使得

$$|\eta| < \|g(z)\|/\varepsilon$$

对所有 $z \in \partial D_\varepsilon$ 成立, 且它异于矩阵 $(\partial g_j(z^0) / \partial z_k)$ 的所有特征值. 那么扰动后的函数

$$g'(z) = g(z) - \eta(z - z^0)$$

在 z^0 处有一个重数为 +1 的零点, 因为矩阵

$$(\partial g'_j / \partial z_k) = (\partial g_j / \partial z_k - \eta \delta_{jk})$$

在 z^0 处非奇异. 因此, 假设 g' 在 D_ε 内仅有有限个零点, g' 在 D_ε 内的零点代数个数 $\sum \mu'$ 当然 ≥ 1 . (由 B.4, 所有加项都 ≥ 0 .) 这个和等于 $g'/\|g'\|$ 在 ∂D_ε 上的度, 根据 Rouché 原理, 它等于 $g/\|g\|$ 在 ∂D_ε 上的度 μ . 故 $\mu \geq 1$.

理论上, 至少存在 g' 在 D_ε 内有无限多个零点的可能性. (参见下面的问题 1.) 但在那种情况下, 可以从 g' 中减去一个小的常向量 a , 其中 a 是 g' 的一个正则值. (参见 B.3.) 那么 $g' - a$ 的零点是孤立的, 因此在 D_ε 内 $g' - a$ 仅有有限个零点. 为保证 $g' - a$ 至少有一个零点, 利用反函数定理选取 z^0 在 D_ε 内的一个邻域 U , 使得 g' 将 U 微分同胚地映到原点的一个开邻域上. 选取 $a \in g'(U)$, 则方程 $g'(z) - a = 0$ 当然在 $U \subset D_\varepsilon$ 内有解 z . 这就完成了 $\mu \geq 1$ 的证明. \square

本节最后给出三个问题供读者思考. 前两个可用上述方法证明, 第三个较难.

问题 1. 若 g 在 ∂D 上没有零点, 证明它在 D 内仅有有限个零点.

问题 2. 若矩阵 $(\partial g_j / \partial z_k)$ 在 z^0 处奇异, 证明 $\mu \geq 2$.

问题 3. 变量 $z_j - z_j^0$ 的形式幂级数环 $\mathbb{C}[[z - z^0]]$ 可以视为子环 $\mathbb{C}[[g_1, \dots, g_m]]$ 上的模. 这个模是秩为 μ 的自由模. 因此, 若 I 表示 g_1, \dots, g_m 在 $\mathbb{C}[[z - z^0]]$ 中生成的理想, 则商环 $\mathbb{C}[[z - z^0]]/I$ 作为 \mathbb{C} 上的向量空间维数为 μ . (我被告知这些陈述可以通过首先证明映射 $g: \mathbb{C}^m \rightarrow \mathbb{C}^m$ 诱导了从原点的小邻域 U 到原点的小邻域 V 的正常平坦映射; 然后证明全纯函数芽层 \mathcal{O}_U 在 g 下的直接像作为相应的层 \mathcal{O}_V 上的模是局部自由的来证明.)

术语表

外文术语	中文术语
Alexander duality	Alexander 对偶.
Alexander duality theorem	Alexander 对偶定理.
Alexander polynomial	Alexander 多项式.
algebraic dimension	代数维数.
algebraic set	代数集.
angle	角度.
argument	辐角.
argument principle	辐角原理.
automorphism	自同构.
basis	基.
Betti number	Betti 数.
binary dihedral group	二进制二面体群.
binary icosahedral group	二进制二十面体群.
binary octahedral group	二进制八面体群.
binary tetrahedral group	二进制四面体群.
bouquet	球束.
branch	分支.
cell complex	胞腔复形.
chain rule	链式法则.
characteristic homeomorphism	特征同胚.
characteristic polynomial	特征多项式.
closure	闭包.
cohomology group	上同调群.
commutator subgroup	换位子群.
compact Riemannian manifold	紧 Riemann 流形.



外文术语	中文术语
compact set	紧集.
complement	补集.
complex analytic	复解析的.
complex conjugate	复共轭.
complex curve	复曲线.
complex dimension	复维数.
complex hypersurface	复超曲面.
complex plane	复平面.
complex valued	复值的.
complex variables	复变量.
cone	锥.
connected	连通的.
contractible	可缩的.
convergent	收敛的.
convergent series	收敛级数.
coordinate hyperplane	坐标超平面.
coordinate space	坐标空间.
covering homotopy	覆盖同伦.
covering transformation	覆盖变换.
critical point	临界点.
critical value	临界值.
CW-complex	CW-复形.
cyclic group	循环群.
deformation retract	形变收缩核.
degenerate critical point	退化临界点.
degree	度.
dense	稠密的.
descending chain condition	降链条件.
determinant	行列式.
diffeomorphic	微分同胚的.
diffeomorphism	微分同胚.
differentiable structure	微分结构.
differential	微分.
differential equation	微分方程.
dimension	维数.
directional derivative	方向导数.
dual vector space	对偶向量空间.
eigenvalue	特征值.

外文术语	中文术语
eigenvector	特征向量.
embedded	嵌入的.
Euler number	Euler 数.
exact sequence	正合序列.
exotic sphere	怪球面.
exponent	指数.
fiber	纤维.
fiber bundle	纤维丛.
fibration	纤维化.
field of quotients	分式域.
figure eight knot	八字结.
finite complex	有限复形.
fixed point manifold	不动点流形.
fixed point set	不动点集.
formal power series	形式幂级数.
free abelian	自由 Abel 的.
free group	自由群.
fundamental group	基本群.
genus	亏格.
germ	芽.
gradient	梯度.
greatest common divisor	最大公约数.
half-branch	半分支.
half-plane	半平面.
handlebody	手柄体.
hermitian inner product	Hermite 内积.
Hessian	Hessian 阵.
Hilbert basis theorem	Hilbert 基定理.
holomorphic function	全纯函数.
homeomorphic	同胚的.
homogeneous polynomial	齐次多项式.
homology group	同调群.
homology sphere	同调球面.
homotopy exact sequence	同伦正合序列.
homotopy group	同伦群.
homotopy type	同伦型.
Hopf fibration	Hopf 纤维化.
Hopf fibrations	Hopf 纤维化.

外文术语	中文术语
Hurewicz theorem	Hurewicz 定理.
icosahedral group	二十面体群.
ideal	理想.
imaginary part	虚部.
index	指标.
infinite cyclic covering	无限循环覆叠.
initial condition	初值条件.
inner product	内积.
integral domain	整环.
intersection multiplicity	相交重数.
intersection number	相交数.
intersection pairing	相交配对.
irreducible	不可约的.
irreducible algebraic set	不可约代数集.
isolated critical point	孤立临界点.
isometry	等距映射.
Jacobi matrix	Jacobi 矩阵.
join	连接.
Kervaire invariant	Kervaire 不变量.
knot	纽结.
knot group	纽结群.
knot theory	纽结理论.
Laurent expansion	Laurent 展开.
leading coefficient	首项系数.
Lefschetz number	Lefschetz 数.
lens space	透镜空间.
Lie group	Lie 群.
limit point	极限点.
linear subspace	线性子空间.
linearly independent	线性无关的.
link	链环.
linking number	环绕数.
locally trivial fibration	局部平凡纤维化.
locus of zeros	零点轨迹.
logarithm	对数.
manifold-with-boundary	带边流形.
many-valued function	多值函数.
matrix	矩阵.

外文术语	中文术语
maximal open interval	极大开区间.
minor determinant	子式.
Morse index	Morse 指标.
Morse theory	Morse 理论.
multiplicity	重数.
negative definite	负定的.
Neuwirth-Stallings theorem	Neuwirth-Stallings 定理.
non-compact	非紧的.
non-degenerate critical point	非退化临界点.
non-isolated point	非孤立点.
non-negative	非负的.
non-singular	非奇异的.
nonsingular	非奇异的.
normal	法向的.
normal flat morphism	正常平坦映射.
one-parameter group	单参数群.
open disk	开圆盘.
open interval	开区间.
open set	开集.
orbit space	轨道空间.
parallelizable	可平行化的.
parametrization	参数化.
partial derivative	偏导数.
partition of unity	单位分解.
Poincaré hypothesis	Poincaré 猜想.
polynomial	多项式.
polynomial inequalities	多项式不等式.
positive definite	正定的.
positive direction	正方向.
positive real axis	正实轴.
positive real number	正实数.
positive semi-definite	半正定的.
power series	幂级数.
prime ideal	素理想.
projection map	投影映射.
proper	逆紧的.
proper algebraic subset	真代数子集.
rank	秩.

外文术语	中文术语
real algebraic sets	实代数集.
real analytic	实解析的.
real analytic curves	实解析曲线.
real analytic path	实解析路径.
real dimension	实维数.
real numbers	实数.
real part	实部.
reduced homology group	约化同调群.
regular point	正则点.
regular value	正则值.
retract	收缩核.
roots of unity	单位根.
Rouché principle	Rouché 原理.
Sard theorem	Sard 定理.
signature	符号差.
simply connected	单连通的.
simultaneous solution	联立解.
singular	奇异的.
singular set	奇异集.
singular varieties	奇异簇.
smooth manifold	光滑流形.
square distance function	平方距离函数.
square-free	无平方因子的.
Stiefel manifold	Stiefel 流形.
subvariety	子簇.
tangent	切向的.
tangent space	切空间.
Taylor expansion	Taylor 展开.
tensor product	张量积.
topological dimension	拓扑维数.
topology	拓扑.
torsion	挠的.
torus knot	环面纽结.
torus link	环面链环.
trajectory	轨迹.
transcendence degree	超越次数.
trivial normal bundle	平凡法丛.
tubular neighborhood	管状邻域.

外文术语	中文术语
unit circle	单位圆.
unit velocity	单位速度.
unitary transformation	酉变换.
unknotted	不打结的.
variety	簇.
vector field	向量场.
Wang sequence	Wang 序列.
weighted homogeneous polynomial	加权齐次多项式.
Whitehead's theorem	Whitehead 定理.
winds around	环绕.
zeta function	zeta 函数.