线性算子理论

Théorie des Opérations Linéaires

原著作者 Stefen Banach（波兰）

中文翻译 临江仙

更新发布 https://afdian.com/a/solitairemiya

更新日期 2026 年 2 月 21 日

惊鸿舟数海，一笔临江仙。

目录

引言

第 1 节　Lebesgue-Stieltjes 积分

本节假定读者已熟悉测度论和 Lebesgue 积分理论[1].

Lebesgue 积分的一些定理

若可测函数 $x_n(t)$ 整体有界，且序列 $\{x_n(t)\}$ 在闭区间 $[a,b]$ 上几乎处处收敛于函数 $x(t)$，则有

$$\lim_{n\to\infty}\int_a^b x_n(t)\,\mathrm{d}t=\int_a^b x(t)\,\mathrm{d}t. \tag{1}$$

更一般地，若存在可和函数 $\varphi(t)\geqslant 0$ 使得 $|x_n(t)|\leqslant\varphi(t)$ 对所有 $n=1,2,\ldots$ 成立，则极限函数同样可和且满足等式 (1).

若函数 $x_n(t)$ 在 $[a,b]$ 上可和且构成单调不减序列并收敛于函数 $x(t)$，则当函数 $x(t)$ 可和时等式 (1) 成立，否则有

$$\lim_{n\to\infty}\int_a^b x_n(t)\,\mathrm{d}t=+\infty.$$

若 p 次幂可和函数 $(p\geqslant 1)$ 的序列 $\{x_n(t)\}$ 几乎处处收敛于函数 $x(t)$ 且

$$\int_a^b |x_n(t)|^p\,\mathrm{d}t<K\quad\text{对所有}\quad n=1,2,\ldots,$$

则函数 $x(t)$ 同样是 p 次幂可和的[2].

[1] 见 F. Riesz, *Sur l'intégrale de Lebesgue* (关于 Lebesgue 积分), *Acta Univ. Szeged*, 1920.

[2] 见 H. Lebesgue, *Leçons sur l'intégration* (积分论讲义), Paris 1904, p. 37.

p 次幂可和函数的一些不等式

在 $[a,b]$ 上 p 次幂 $(p>1)$ 可和的函数类记为 $(L^{(p)})$. 与数 p 对应的数 q 满足方程 $\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1$，称为 p 的**共轭指数**. 当 $p=2$ 时，同样有 $q=2$.

若 $x(t)\in(L^{(p)})$ 且 $y(t)\in(L^{(q)})$，则函数 $x(t)\cdot y(t)$ 可和且其积分满足不等式

$$\left|\int_a^b xy\,\mathrm{d}t\right| \leqslant \left(\int_a^b |x|^p\,\mathrm{d}t\right)^{\frac{1}{p}} \cdot \left(\int_a^b |y|^q\,\mathrm{d}t\right)^{\frac{1}{q}}. \tag{Hölder 不等式}$$

特别地，当 $p=2$ 时有

$$\left|\int_a^b xy\,\mathrm{d}t\right| \leqslant \left(\int_a^b x^2\,\mathrm{d}t\right)^{\frac{1}{2}} \cdot \left(\int_a^b y^2\,\mathrm{d}t\right)^{\frac{1}{2}}. \tag{Schwarz 不等式}$$

若函数 $x(t)$ 和 $y(t)$ 都属于 $(L^{(p)})$，则函数 $x(t)+y(t)$ 也属于 $(L^{(p)})$，且有

$$\left(\int_a^b |x+y|^p\,\mathrm{d}t\right)^{\frac{1}{p}} \leqslant \left(\int_a^b |x|^p\,\mathrm{d}t\right)^{\frac{1}{p}} + \left(\int_a^b |y|^p\,\mathrm{d}t\right)^{\frac{1}{p}}. \tag{Minkowski 不等式}$$

对应于这些不等式，有下列算术不等式：

$$\left|\sum_{i=1}^n a_i b_i\right| \leqslant \left(\sum_{i=1}^n |a_i|^p\right)^{\frac{1}{p}} \cdot \left(\sum_{i=1}^n |b_i|^q\right)^{\frac{1}{q}},$$

$$\left(\sum_{i=1}^n |a_i+b_i|^p\right)^{\frac{1}{p}} \leqslant \left(\sum_{i=1}^n |a_i|^p\right)^{\frac{1}{p}} + \left(\sum_{i=1}^n |b_i|^p\right)^{\frac{1}{p}},$$

其中第一个不等式当 $p=2$ 时给出著名的 Schwarz 不等式：

$$\left|\sum_{i=1}^n a_i b_i\right| \leqslant \left(\sum_{i=1}^n a_i^2\right)^{\frac{1}{2}} \cdot \left(\sum_{i=1}^n b_i^2\right)^{\frac{1}{2}}.$$

对任意 p 次幂 $(p\geqslant 1)$ 可和函数 $x(t)$ 及任意 $\varepsilon>0$，存在连续函数 $\varphi(t)$ 使得

$$\int_a^b |x-\varphi|^p < \varepsilon. \tag{逼近定理}$$

依测度收敛

在某集合上的可测函数序列 $\{x_n(t)\}$ 称为**依测度收敛**于在该集合上定义的函数 $x(t)$，如果对任意 $\varepsilon > 0$ 有

$$\lim_{n\to\infty} mE\left(|x_n(t) - x(t)| > \varepsilon\right) = 0.\text{[1]} \tag{2}$$

依测度收敛于函数 $x(t)$ 的序列 $\{x_n(t)\}$ 必包含一个子序列在通常意义下几乎处处收敛于该函数.

序列 $\{x_n(t)\}$ 依测度收敛的充要条件是对任意 $\varepsilon > 0$ 有

$$\lim_{i,k\to\infty} mE\left(|x_i(t) - x_k(t)| > \varepsilon\right) = 0.\text{[2]} \tag{3}$$

平均收敛

给定 $[a,b]$ 上 p 次幂可和函数 $(p \geqslant 1)$ 的序列 $\{x_n(t)\}$，若

$$\lim_{n\to\infty} \int_a^b |x_n(t) - x(t)|^p \,\mathrm{d}t = 0,$$

则称该序列在 $[a,b]$ 上 p 次幂**平均收敛**于 p 次幂可和函数 $x(t)$.

该函数 $x(t)$ 存在的充要条件是

$$\lim_{i,k\to\infty} \int_a^b |x_i(t) - x_k(t)|^p \,\mathrm{d}t = 0.$$

函数 $x(t)$ 在 $[a,b]$ 上除一个零测集外被唯一确定.

平均收敛于函数 $x(t)$ 的函数序列也依测度收敛于该函数[3]，因此（由 §3）必包含一个子序列在通常意义下几乎处处收敛于同一函数.

Stieltjes 积分

设 $x(t)$ 为 $[a,b]$ 上的连续函数，$\alpha(t)$ 为 $[a,b]$ 上的有界变差函数. 用分点

$$a = t_0 < t_1 < t_2 < \cdots < t_n = b$$

[1]Fr. Riesz, *Les systèmes d'équations linéaires à une infinité d'inconnues* (无穷未知量线性方程组), Paris 1913, p. 50–51.

[2]同上书.

[3]Fr. Riesz, 同上, p. 55.

将区间 $[a, b]$ 分成子区间，并在每个子区间中任取一点 ϑ_i，仿照 Riemann 积分的定义作和

$$S = \sum_{i=1}^{n} x(\vartheta_i)[\alpha(t_i) - \alpha(t_{i-1})] \quad 其中 \quad t_i \geqslant \vartheta_i \geqslant t_{i-1}.$$

可以证明，对任意细分序列，只要其最大子区间长度趋于 0，和 S 就有共同的极限；该极限记为

$$\int_a^b x(t)\,\mathrm{d}\alpha(t)$$

并称为 **Stieltjes 积分**.

该积分具有以下性质：

$$\begin{aligned}
&\int_a^b x(t)\,\mathrm{d}\alpha(t) = -\int_b^a x(t)\,\mathrm{d}\alpha(t),\\
&\int_a^b x(t)\,\mathrm{d}\alpha(t) + \int_b^c x(t)\,\mathrm{d}\alpha(t) = \int_a^c x(t)\,\mathrm{d}\alpha(t),\\
&\int_a^b [x_1(t) + x_2(t)]\,\mathrm{d}\alpha(t) = \int_a^b x_1(t)\,\mathrm{d}\alpha(t) + \int_a^b x_2(t)\,\mathrm{d}\alpha(t).
\end{aligned}$$

这里的第一个平均值定理用下列不等式表示：

$$\left|\int_a^b x(t)\,\mathrm{d}\alpha(t)\right| \leqslant MV,$$

其中 M 表示 $|x(t)|$ 的上确界，V 表示 $\alpha(t)$ 在 $[a, b]$ 上的全变差.

若函数 $\alpha(t)$ 绝对连续，则 Stieltjes 积分可用 Lebesgue 积分表示如下：

$$\int_a^b x(t)\,\mathrm{d}\alpha(t) = \int_a^b x(t)\alpha'(t)\,\mathrm{d}t.$$

若 $\alpha(t)$ 为增函数（即当 $a \leqslant t' < t'' \leqslant b$ 时有 $\alpha(t') < \alpha(t'')$），且对所有 $s \in [\alpha(a), \alpha(b)]$ 定义

$$\beta(s) = a + \text{borne sup}_t E(s \geqslant \alpha(t)),$$

则得到：

$$\int_a^b x(t)\,\mathrm{d}\alpha(t) = \int_{\alpha(a)}^{\alpha(b)} x[\beta(s)]\,\mathrm{d}s.[1] \tag{4}$$

[1] 见 S. Saks, *Sur les fonctionnelles de M. Hadamard* (关于 Hadamard 的泛函), *Fundamenta Mathematicae* I, Warszawa 1920.

证明. 由 $\beta(s)$ 的定义有

$$\beta[\alpha(t)] = t \quad 对 \quad a \leqslant t \leqslant b. \tag{5}$$

由假设函数 $\beta(s)$ 递增且取 $[a,b]$ 中所有数值，或由 (5) 得 $a=\beta[\alpha(a)]$ 和 $b=\beta[\alpha(b)]$，故 $\beta(s)$ 为连续函数. 因此函数 $x[\beta(s)]$ 也连续.

考虑 $[a,b]$ 的由分点 $a=t_0<t_1<\cdots<t_n=b$ 给出的细分 (δ)，并令 $\alpha(t_i)=\vartheta_i$ $(i=1,2,\ldots,n)$. 有

$$I_i=\int_{\vartheta_{i-1}}^{\vartheta_i} x[\beta(s)]\,\mathrm{d}s=(\vartheta_i-\vartheta_{i-1})x(\vartheta_i'),$$

其中 $\vartheta_i'=\beta(s_i')$ 且 $\vartheta_{i-1}\leqslant\vartheta_i'\leqslant\vartheta_i$. 显然 $\beta(\vartheta_{i-1})\leqslant\beta(s_i')=\vartheta_i'\leqslant\beta(\vartheta_i)$. 由 (5) 有 $\beta(\vartheta_{i-1})=\beta[\alpha(t_{i-1})]=t_{i-1}$，类似地 $\beta(\vartheta_i)=t_i$. 因此

$$t_{i-1}\leqslant\vartheta_i'\leqslant t_i,$$

故

$$I_i=x(\vartheta_i')[\alpha(t_i)-\alpha(t_{i-1})],$$

从而

$$\int_{\alpha(a)}^{\alpha(b)} x[\beta(s)]\,\mathrm{d}s=\sum_{i=1}^{n} I_i=\sum_{i=1}^{n} x(\vartheta_i')[\alpha(t_i)-\alpha(t_{i-1})]. \tag{6}$$

由于当细分 (δ) 的最大区间长度趋于 0 时，后一和趋于 $\int_a^b x(t)\,\mathrm{d}\alpha(t)$，故等式 (6) 给出等式 (4). 证毕. □

由此，若承认 $\alpha(t)$ 为任意有界变差函数，则总可将其表示为差 $\alpha_1(t)-\alpha_2(t)$，其中函数 $\alpha_1(t)$ 和 $\alpha_2(t)$ 递增；像前面一样用 $\beta_1(s)$ 和 $\beta_2(s)$ 表示相应的函数，得到

$$\begin{aligned}\int_a^b x(t)\,\mathrm{d}\alpha(t)&=\int_a^b x(t)\,\mathrm{d}\alpha_1(t)-\int_a^b x(t)\,\mathrm{d}\alpha_2(t)\\&=\int_{\alpha_1(a)}^{\alpha_1(b)} x[\beta_1(s)]\,\mathrm{d}s-\int_{\alpha_2(a)}^{\alpha_2(b)} x[\beta_2(s)]\,\mathrm{d}s.\end{aligned}$$

若函数 $x_n(t)$ 连续且整体有界，且序列 $\{x_n(t)\}$ 处处收敛于连续函数 $x(t)$，则对任意有界变差函数 $\alpha(t)$ 有

$$\lim_{n\to\infty}\int_a^b x_n(t)\,\mathrm{d}\alpha(t)=\int_a^b x(t)\,\mathrm{d}\alpha(t),$$

因为

$$\lim_{n\to\infty}\int_{\alpha_1(a)}^{\alpha_1(b)} x_n[\beta_1(s)]\,\mathrm{d}s=\int_{\alpha_1(a)}^{\alpha_1(b)} x[\beta_1(s)]\,\mathrm{d}s$$

且

$$\lim_{n\to\infty}\int_{\alpha_2(a)}^{\alpha_2(b)} x_n[\beta_2(s)]\,\mathrm{d}s=\int_{\alpha_2(a)}^{\alpha_2(b)} x[\beta_2(s)]\,\mathrm{d}s.$$

Lebesgue 定理

下面记录如下定理.

可和函数序列 $\{x_n(t)\}$（$0\leqslant t\leqslant 1$）对 $[0,1]$ 上任意可测有界函数 $\alpha(t)$ 满足

$$\lim_{n\to\infty}\int_0^1 \alpha(t)x_n(t)\,\mathrm{d}t=0$$

的充要条件是以下三个条件同时满足：

1° 序列 $\left\{\int_0^1 |x_n(t)|\,\mathrm{d}t\right\}$ 有界；

2° 对任意 $\varepsilon>0$ 存在 $\eta>0$ 使得 $[0,1]$ 的任意测度 $<\eta$ 的子集 H 对所有 $n=1,2,\ldots$ 产生不等式 $\left|\int_H x_n(t)\,\mathrm{d}t\right|\leqslant\varepsilon$；

3° $\lim_{n\to\infty}\int_0^u x_n(t)\,\mathrm{d}t=0$ 对所有 $0\leqslant u\leqslant 1$ 成立.[1]

以后还会遇到其他这类定理.

第 2 节　度量空间中的 (B) 可测集和运算

度量空间

给定非空集 E，若对 E 中任意有序元素对 x,y 对应一个数 (x,y) 满足下列条件[2]：

$$\begin{aligned}
&1)\quad (x,x)=0,\quad (x,y)>0\quad \text{当}\quad x\neq y,\\
&2)\quad (x,y)=(y,x),\\
&3)\quad (x,z)\leqslant(x,y)+(y,z),
\end{aligned}$$

则称 E 构成一个**度量空间**或 **(D) 型空间**.

数 (x,y) 称为点（元素）x,y 的**距离**. 点列 $\{x_n\}$ 称为**收敛**，若

$$\lim_{p,q\to\infty}(x_p,x_q)=0; \tag{7}$$

[1] 见 H. Lebesgue, *Sur les intégrales singulières* (关于奇异积分), *Annales de Toulouse* 1909.

[2] 见 M. Fréchet, *Sur quelques points du calcul fonctionnel* (关于泛函分析的几个问题), *Rendic. Circ. di Palermo* XXII (1906), p. 1–74.

称之为**收敛于点** x_0（记作 $\lim_{n\to\infty} x_n = x_0$），若

$$\lim_{n\to\infty}(x_n, x_0) = 0. \tag{8}$$

此时点 x_0 称为序列 $\{x_n\}$ 的**极限**（或**极限点**）.

易见关系 (8) 蕴含 (7)，因为总有

$$(x_p, x_q) \leqslant (x_p, x_0) + (x_q, x_0).$$

因此，收敛于一点的序列必为收敛序列；当然，反之不总成立.

具有每个收敛序列都收敛于某点的性质的 (D) 型空间称为**完备空间**.

具有每个无穷点列都包含收敛于一点的子列性质的 (D) 型空间称为**紧空间**.

欧几里得空间是完备 (D) 型空间的例子. 下面列举其他一些重要例子.

1. 设 (S) 为 $[0,1]$ 上可测函数之集. 对该集中任意有序元素对 x, y 定义[1]

$$(x,y) = \int_0^1 \frac{|x(t)-y(t)|}{1+|x(t)-y(t)|}\,\mathrm{d}t.$$

易验证上述距离条件 1）–3）满足. 事实上，条件 1）和 2）显然（不区分仅在一个零测集上不同的函数），而为确信条件 3）也成立，只需注意对任意两个数 a, b 有

$$\frac{|a+b|}{1+|a+b|} \leqslant \frac{|a|}{1+|a|} + \frac{|b|}{1+|b|}.$$

如此"度量化"后，集 (S) 构成一个 (D) 型空间；该空间完备，因为该空间中点列 $\{x_n\}$（收敛于点 x_0）的收敛等价于函数序列 $\{x_n(t)\}$ 在 $[0,1]$ 上依测度收敛（于函数 $x_0(t)$）.

2. 设 (s) 为所有数列之集. 对该集中任意有序元素对 x, y 定义

$$(x,y) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} \cdot \frac{|\xi_n - \eta_n|}{1+|\xi_n - \eta_n|}.$$

集 (s) 构成一个完备的 (D) 型空间. 事实上，点列 $\{x_m\}$ 的收敛（或收敛于点 x_0）意味着（记 $x_m = \{\xi_n^{(m)}\}$ 且 $x_0 = \{\xi_n\}$）对每个自然数 n，数列 $\{\xi_n^{(m)}\}$ 都收敛（或收敛于 ξ_n）当 $m \to \infty$.

3. 设 (M) 为 $[0,1]$ 上可测有界函数之集. 若对该集中任意元素对 x, y 定义

$$(x,y) = \operatorname*{vrai\,sup}_{0\leqslant t\leqslant 1} |x(t)-y(t)|,$$

[1] 若不区分仅在一个零测集上不同的函数，则易证所得空间满足公理 1）–3）.

则得到一个完备的 (D) 型空间. 点列 $\{x_n\}$（收敛于点 x_0）的收敛等价于函数序列 $\{x_n(t)\}$ 在 $[0,1]$ 上几乎处处一致收敛（于函数 $x_0(t)$）.

4. 设 (m) 为有界数列之集. 定义

$$(x,y)=\underset{1\leqslant n<\infty}{\text{borne sup}}|\xi_n-\eta_n|,$$

显然由 (m) 得到一个完备的 (D) 型空间.

5. 设 (C) 为 $[0,1]$ 上连续函数之集. 对该集中任意元素对 x,y 定义

$$(x,y)=\max_{0\leqslant t\leqslant 1}|x(t)-y(t)|.$$

集 (C) 构成一个完备的 (D) 型空间；该集中点列 $\{x_n\}$（收敛于点 x_0）的收敛等价于函数序列 $\{x_n(t)\}$ 在 $[0,1]$ 上一致收敛（于函数 $x_0(t)$）.

6. 设 (c) 为收敛数列之集. 若对该集中任意元素对 x,y 像集 (m) 中那样定义距离 (x,y)，易证集 (c) 也构成完备的 (D) 型空间.

7. 设 $(C^{(p)})$ 为 $[0,1]$ 上具有 p 阶连续导数的函数之集. 定义

$$(x,y)=\max_{0\leqslant t\leqslant 1}|x(t)-y(t)|+\max_{0\leqslant t\leqslant 1}|x^{(p)}(t)-y^{(p)}(t)|,$$

得到一个完备的 (D) 型空间. 点列 $\{x_n\}$ 在其中收敛（于点 x_0）的充要条件是函数序列 $\{x_n(t)\}$ 和 $\{x_n^{(p)}(t)\}$ 都在 $[0,1]$ 上一致收敛（前者收敛于函数 $x_0(t)$，后者收敛于函数 $x_0^{(p)}(t)$）.

8. 设 $(L^{(p)})$（其中 $p\geqslant 1$）为 $[0,1]$ 上 p 次幂可和函数之集. 定义

$$(x,y)=\left[\int_0^1|x(t)-y(t)|^p\,\mathrm{d}t\right]^{\frac{1}{p}},$$

得知集 $(L^{(p)})$ 成为完备的 (D) 型空间. 为使该集中点列 $\{x_n\}$ 收敛（于点 x_0），充要条件是函数序列 $\{x_n(t)\}$ 在 $[0,1]$ 上 p 次幂平均收敛（于函数 $x_0(t)$）.

9. 设 $(l^{(p)})$（其中 $p\geqslant 1$）为使级数 $\sum_{n=1}^{\infty}|\xi_n|^p$ 收敛的数列之集. 对 $(l^{(p)})$ 中元素 x,y 定义

$$(x,y)=\left[\sum_{n=1}^{\infty}|\xi_n-\eta_n|^p\right]^{\frac{1}{p}},$$

得到一个完备的 (D) 型空间.

10. 在圆周 $|z|\leqslant 1$ 上一致连续的解析函数 $f(z)$ 之集构成完备的 (D) 型空间，若定义两函数 $f(z)$ 和 $\varphi(z)$ 的距离为

$$\max_{|z|\leqslant 1}|f(z)-\varphi(z)|.$$

注意，可定义对应于例子 3、5、7 和 8 的 n 元函数集.

度量空间中的集合

设 E 为任意 (D) 型空间，G 为 E 中任意元素（点）集.

点 x_0 称为集 G 的**聚点**，若存在点列 $\{x_n\}$ 使得对所有 n 有 $x_0 \neq x_n \in G$ 且 $\lim_{n\to\infty} x_n = x_0$. G 的所有聚点之集称为 G 的**导集**，记为 G'. 集

$$\bar{G} = G + G'$$

称为 G 的**闭包**；当 $G' \subset G$ 时 G 称为**闭集**，当 $G' = G$ 时 G 称为**完备集**. 当 G 的补集（即 $E - G$）为闭集时，G 称为**开集**. 每个开集也称为其中每一点的**邻域**.

给定点 $x_0 \in E$ 和数 $r_0 > 0$，所有满足 $(x, x_0) \leqslant r_0$ 的点 x 之集称为**球**，满足 $(x, x_0) < r_0$ 的点 x 之集称为**开球**；点 x_0 称为**中心**，数 r_0 称为该球（或开球）的**半径**. 当 $\bar{G} = E$ 时称集 G **稠密**，当 $\bar{G}$ 不含任何球时称 G **无处稠密**.

当 E 包含可数稠密集时称空间 E **可分**. 易见每个紧度量空间（即每个无穷点列都包含收敛子列；见第 9 页）都可分.

当 G 为无处稠密集的可数并时称集 G 为**第一纲**；否则称为**第二纲**. 当存在 x_0 的邻域 V 使得 $G \cdot V$ 在点 x_0 相对于 P 为第一纲时，称集 G 在点 x_0 **相对于** P **为第一纲**；若点 x_0 的所有邻域都不具有此性质，则称集 G 在点 x_0 **相对于** P **为第二纲**.

可证如下

定理 0.1. 若任意度量空间 E 中集 G 为第二纲，则 E 中存在球 K 使得 G 在 $G \cdot K$ 的每一点都为第二纲.[1]

现设 E 为完备 (D) 型空间. 下面证明

引理 0.1. 给定 E 中球列 $\{K_n\}$，其半径 r_n 满足对所有 $n = 1, 2, \ldots$ 有 $K_{n+1} \subset K_n$ 且 $\lim_{n\to\infty} r_n = 0$，则存在属于所有这些球的公共点.

证明. 设 x_n 为球 K_n 的中心. 由假设对自然数 $p < q$ 有 $x_q \in K_q \subset K_p$，故

$$(x_p, x_q) \leqslant r_p. \tag{9}$$

由此得点列 $\{x_n\}$ 收敛. 令 $\lim_{n\to\infty} x_n = x_0$（空间 E 完备），则由 (9) 对 $p < q$ 有 $(x_p, x_0) \leqslant (x_p, x_q) + (x_q, x_0) \leqslant r_p + (x_q, x_0)$，故 $(x_p, x_0) \leqslant r_p$. 由于 p 任意，点 x_0 属于所有球 K_n. 证毕. □

该引理的一个简单推论是

[1] 见 W. H. Young, *Proc. Lond. Math. Soc.* 34 (1902), p. 285.

定理 0.2. 每个完备度量空间 E 为第二纲.

证明. 假设相反

$$E = \sum_{n=1}^{\infty} G_n, \tag{10}$$

其中每个 G_n 都无处稠密. 因此存在球列 $\{K_n\}$，其半径 $\{r_n\}$ 具有以下性质：

$$K_1 \cdot G_1 = \emptyset, \quad r_1 < 1 \quad 且 \quad K_{n+1} \subset K_n, \quad K_{n+1} \cdot G_{n+1} = \emptyset, \quad r_{n+1} < \frac{1}{n+1}.$$

由引理，存在属于所有这些球的点 x_0. 但由对所有 $n = 1, 2, \ldots$ 有 $K_n \cdot G_n = \emptyset$，该点不可能属于任何 G_n，与 (10) 矛盾. □

现设 E 为任意 (D) 型空间，E^* 为 E 的任意点集. 若对 E^* 的元素保留 E 中采用的相同距离定义，则 E^* 也成为某个 (D) 型空间.

考虑 E^* 中集 $G \subset E^*$. 若例如当在 E^* 中考虑时 G 无处稠密，则称 G **相对于** E^***无处稠密**；仅当 $E^* = E$ 时通常省略" 相对于 E^*" 字样. 本节开头引入的其他定义也类似处理.

定理 1 蕴含，若集 G 在 E^* 的所有点相对于 E^* 为第一纲，则 G 相对于 E^* 为第一纲. 类似地，定理 2 蕴含当度量空间 E 完备且集 E^* 为闭集时，该集相对于自身为第二纲.

考虑任意 (D) 型空间 E 中满足下列条件的该空间集类的最小类 K：

1) 每个闭集属于 K,

2) K 中集的可数并属于 K,

3) K 中集的补集属于 K.

类 K 中的集称为"**(B) 可测集**". 若对任意完备集 $P(\neq \emptyset)$，P 中存在点 x_0 使得 $P \cdot G$ 和 $P - G$ 中至少有一个在点 x_0 相对于 P 为第一纲，则称集 G **满足 Baire 条件**.

下面给出

定理 0.3. 每个 (B) 可测集满足 Baire 条件.[1]

度量空间中的运算

设 E 和 E_1 为任意非空集. 若对每个元素 $x \in E$ 对应 E_1 中某个元素，则称在集 E 中定义了一个**运算**. 对应于 x 的元素称为该运算在 x 处的**值**；集 E 称为该运算的**定义域**，所有值之集称为其**陪域**. 特别地，当给定运算的值为数时，通常称之为**泛函**.

如此，设集 E 构成 (D) 型空间，$U(x)$ 为以 E 为定义域、以某 (D) 型空间为陪域的运算. 若对任意收敛于点 x_0 的点列 $\{x_n\}$ 有 $\lim_{n\to\infty} U(x_n) = U(x_0)$，则称运算 $U(x)$ 在点 x_0 **连续**；若 $U(x)$ 在空间 E 的每点都连续，则称其在 E **连续**. 给定运算列 $\{U_n(x)\}$ 和定义在 E 中的运算 $U_0(x)$，且所

[1] 见 F. Hausdorff, *Grundzüge der Mengenlehre* (集合论基础), Leipzig 1914, p. 362.

有这些运算的陪域都属于同一 (D) 型空间，若值列 $U_n(x_0)$ 收敛于 $U_0(x_0)$，则称该运算列在点 x_0 **收敛**于运算 $U_0(x)$；若运算列 $\{U_n(x)\}$ 在 E 的每点都收敛于运算 $U_0(x)$，则称其在 E 收敛. 若运算列 $\{U_n(x)\}$ 在 E 收敛于运算 $U_0(x)$，则称后一运算为 $\{U_n(x)\}$ 在 E 的**极限**. 不说" 在 E 连续的运算" 而简说" 连续运算"，当从上下文可明确是哪个空间时；其他术语也类似处理.

设 K 为运算的最小类（以给定 (D) 型空间 E 为公共定义域，以某 (D) 型空间中的集为各自的陪域），满足条件：

1) 每个连续运算属于 K，

2) K 中收敛运算列的极限属于 K.

该类中的运算称为"**(B) 可测算子**".

设 $U(x)$ 为定义域 E、陪域也为 (D) 型空间的运算，若在每个非空完备集 $P \subset E$ 中存在相对于 P 为第一纲的集 G，使得运算 $U(x)$ 在 $P-G$ 中考虑时在空间中连续，则称该运算**满足 Baire 条件**.

下面给出

定理 0.4. 每个 (B) 可测算子满足 Baire 条件.[1]

同样可证

定理 0.5. 若运算 $U(x)$ 在 E 中是连续运算的极限，则 E 中存在第一纲集 G 使得运算 $U(x)$ 在 $E-G$ 的每点都连续.

如下定理建立了 (B) 可测集与 (B) 可测算子之间的关系；设 E 为它们的定义域所在的 (D) 型空间，E_1 为包含其值的空间.

定理 0.6. 运算 $U(x)$ 为 (B) 可测时，对 E_1 中每个 (B) 可测集 G_1，使得 $U(x) \in G_1$ 的点 x 之集 G 也是 (B) 可测的.[2]

定理 0.7. 若空间 E 和 E_1 可分且运算 $U(x)$ 在 E 连续，则 E 中满足 Baire 条件的 (B) 可测集 $G \subset E$ 的像也满足 Baire 条件. 此外，若 $x \neq x'$ 总蕴含 $U(x) \neq U(x')$，则 (B) 可测集的像也是 (B) 可测的.

定理的第一部分源于如下事实：(B) 可测集的连续像总是所谓" 解析集"[3]，而每个解析集满足 Baire 条件[4]. 定理的第二部分证明见 F. Hausdorff 的书[5].

定理 0.8. 若运算 $U'(x)$ 和 $U''(x)$ 为 (B) 可测，则泛函 $(U'(x), U''(x))$ 也是 (B) 可测的.

证明源于如下事实：若运算 $U'(x)$ 和 $U''(x)$ 连续，则泛函 $(U'(x), U''(x))$ 也连续，且对每点 $y_0 \in E_1$ 泛函 $(y, y_0) = (y_0, y)$ 在 E_1 连续.

[1] 见 H. Lebesgue, *Journ. de Math.* (6) 1 (1905), p. 202; F. Hausdorff, 同上, p. 393.

[2] 见 F. Hausdorff, 同上, p. 394.

[3] 见 F. Hausdorff, 同上, p. 401.

[4] 同上书, p. 425.

[5] 同上书, p. 423.

定理 0.9. $\{U_n(x)\}$ 为 (B) 可测算子列时，该序列收敛的点之集为 (B) 可测集.

证明. 对自然数 p, q, r，设 $G_{p,q,r}$ 为使 $(U_p(x), U_q(x)) \leqslant \frac{1}{r}$ 的点 x 之集. 由定理 6 和 8，集 $G_{p,q,r}$ 为 (B) 可测. 有 $G = \prod_{r=1}^{\infty} \sum_{p=1}^{\infty} \prod_{q=p}^{\infty} G_{p,q,r}$，故 G 为 (B) 可测. □

定理 0.10. $\{U'_n(x)\}$ 和 $\{U''_n(x)\}$ 为 (B) 可测算子列，若对任意 $x \in E$ 有 $\lim_{n\to\infty}(U'_n(x), U''_n(x)) < \infty$，则泛函 $\lim_{n\to\infty}(U'_n(x), U''_n(x))$ 为 (B) 可测.

证明. 对任意自然数对 p, q 和任意点 x 记

$$F_{p,q}(x) = \max_{p \leqslant n \leqslant p+q+1}(U'_n(x), U''_n(x)).$$

显然对任意 x 有

$$\lim_{n\to\infty}(U'_n(x), U''_n(x)) = \lim_{p\to\infty}\lim_{q\to\infty} F_{p,q}(x).$$

因此只需证明每个泛函 $F_{p,q}(x)$ 为 (B) 可测. 由定理 8，每个泛函 $F_{p,1}(x) = (U'_p(x), U''_p(x))$ 为 (B) 可测，且因对任意 $q > 1$ 有

$$F_{p,q+1}(x) = F_{p,q}(x) + F_{p+q,1}(x) + |F_{p,q}(x) - F_{p+q,1}(x)|,$$

由归纳法，再次应用定理 8，所有泛函 $F_{p,q}(x)$ 都为 (B) 可测. □

定理 0.11. 给定连续非负泛函列 $\{F_n(x)\}$，若在 E 中第二纲集 $G \subset E$ 的所有元素 x 上有

$$\lim_{n\to\infty} F_n(x) < \infty,$$

则存在球 $K \subset E$ 和数 N 使得对所有 $x \in K$ 和 $n = 1, 2, \ldots$ 有 $F_n(x) \leqslant N$.

证明. 使 $F_n(x) \leqslant i$ 对 $n = 1, 2, \ldots$ 成立的点 x 之集 G_i 显然为闭集且有 $G \subset \sum_{i=1}^{\infty} G_i$；因此存在指标 N 使得 G_N 为第二纲. 作为闭集，它含有某个球 K. □

第一章 群

第 1 节　G 型空间的定义

设 E 为完备度量空间. 若对 E 中任意有序元素对 x, y，都存在 E 中唯一确定的元素 z 与之对应，则称 z 为 x 与 y 的**和**，记作 $x+y$.

进一步假设 E 关于此加法构成群，即满足：

I$_1$

$$(x+y)+z=x+(y+z),$$

I$_2$ 在 E 中存在零元 Θ，使得

$$\Theta+x=x+\Theta=x \quad (\forall x \in E).$$

I$_3$ 对任意 $x \in E$，存在元素 $-x$（称为 x 的逆元）满足

$$x+(-x)=\Theta.$$

由上述公理易证：

(a) 零元 Θ 唯一；

(b) $(-x)+x=\Theta$ 对所有 $x \in E$ 成立；

(c) $x+y=x+z$ 蕴含 $y=z$.

再假设下列公理成立：

$$\mathrm{II}_1. \quad \lim_{n\to\infty} x_n = x \quad \text{蕴含} \quad \lim_{n\to\infty}(-x_n) = -x,$$

$$\mathrm{II}_2.\quad \lim_{n\to\infty} x_n = x\text{且} \lim_{n\to\infty} y_n = y\text{蕴含} \lim_{n\to\infty}(x_n+y_n) = x+y.$$

满足这些公理的完备度量空间称为 **G 型空间**.

注释. 以 $x-y$ 记 $x+(-y)$，以 $-x+y$ 记 $(-x)+y$.

第 2 节　子群的性质

设 E 为 G 型空间. 给定 $x\in E$ 及 $H\subset E$，以 xH（相应地 Hx）表示 E 中所有满足 $y=x+z$（相应地 $y=z+x$）且 $z\in H$ 的元素 y 之集合.

显然，成立如下恒等式

$$x(H_1+H_2) = xH_1 + xH_2,$$
$$x(H_1-H_2) = xH_1 - xH_2,$$
$$x(H_1\cdot H_2) = (xH_1)\cdot(xH_2),$$

以及关于 H_1x 和 H_2x 的类似恒等式.

易证：若 H 为闭集、开集、无处稠密集、第一纲集、第二纲集或 Borel 可测集，则 xH 亦然. 又若 z 为 H 的内点，则 $x+z$ 为 xH 的内点.

非空集合 $H\subset E$ 称为 E 的**子群**，若 $x\in H$ 且 $y\in H$ 蕴含 $x+y\in H$ 及 $-x\in H$. 此时显然 $\Theta\in H$.

集合称为**连通**的，若其不能表为两个非空不交闭子集之和. 若 E 连通而 H 为其既开又闭的子集，则 $H=E$，因否则 $E-H$ 亦为非空闭集.

定理 1.1. 设 $H\subset E$ 为子群. 若 H 是第二纲集且满足 Baire 条件，则 H 在 E 中既开又闭.

证明. 根据第 13 页定理 1，存在开球 K 使得 H 在 K 中为第一纲集. 不妨设 K 的中心 $y_0\in H$. 因 H 满足 Baire 条件，故 $K-H$ 为第一纲集. 又 y_0 为 K 的内点，故 $\Theta=-y_0+y_0$ 为 $(-y_0)K$ 的内点. 于是存在以 Θ 为中心的开球 $K_1\subset(-y_0)K$. 注意 $(-y_0)[K-H]=(-y_0)K-(-y_0)H$，而由 H 为子群知 $(-y_0)H=H$，故 $(-y_0)[K-H]=(-y_0)K-H\supset K_1-H$. 因 $K-H$ 与 $(-y_0)[K-H]$ 均为第一纲集，故 K_1-H 亦然.

另一方面，对任意 $x\in K_1$ 有 $x\in xK_1$，因 $\Theta\in K_1$ 且 $x+\Theta=x$. 故 $K_1\cdot xK_1\neq\varnothing$. 于是存在以 x 为中心的开球 $K_2\subset K_1\cdot xK_1$. 我们有 $K_2-H\subset K_1-H$ 且 $K_2-xH\subset xK_1-xH=x[K_1-H]$，故 K_2-H 与 K_2-xH 均为第一纲集.

由此推出 $H\cdot xH\neq\varnothing$；故存在 y 使得 $y\in H$ 且 $y\in xH$，从而 $-x+y\in H$. 由 H 为子群得 $-x=-x+y-y\in H$，故 $x\in H$.

这就证明了 $K_1\subset H$，即 Θ 为 H 的内点. 由于对任意 $y\in H$ 有 $yH=H$ 且 $y=y+\Theta$，故 H 的每一点 y 均为其内点. 因此 H 为开集.

为证 H 亦为闭集，设 $\lim_{n\to\infty} y_n = y$，其中 $y_n \in H$（$n = 1, 2, \ldots$）. 因 $\lim_{n\to\infty}(y - y_n) = \Theta \in K_1 \subset H$，故存在 n 使得 $y - y_n \in K_1 \subset H$，从而 $y = y - y_n + y_n \in H$. 证毕. □

由此立得

定理 1.2. 设空间 E 连通. 若子群 $H \subset E$ 是第二纲集且满足 Baire 条件，则 $H = E$.

注释. 由于任意 Borel 可测集都满足 Baire 条件，故当 H 是 Borel 可测集时定理 1 和定理 2 特别成立.

第 3 节　加性算子与线性算子

设 E 与 E_1 均为 G 型空间，$U(x)$ 为定义于 E 上、取值于 E_1 中的算子.

算子 $U(x)$ 称为**加性**的，若

$$U(x+y) = U(x) + U(y) \quad (\forall x, y \in E).$$

此时有 $U(x) = U(x+\Theta) = U(x) + U(\Theta)$，故

$$U(\Theta) = \Theta,$$

又因 $\Theta = U(\Theta) = U(x - x) = U(x) + U(-x)$，故

$$U(-x) = -U(x).$$

连续的加性算子称为**线性**算子.

定理 1.3. 在一点连续的加性算子必为线性算子.

证明. 设 x_0 为加性算子 $U(x)$ 的连续点. 设 $x_n \in E, x \in E$ 且 $\lim_{n\to\infty} x_n = x$. 则 $\lim_{n\to\infty}(x_n - x + x_0) = x_0$，从而 $\lim_{n\to\infty} U(x_n - x + x_0) = U(x_0)$，即 $\lim_{n\to\infty}[U(x_n) - U(x) + U(x_0)] = U(x_0)$，因此 $\lim_{n\to\infty} U(x_n) = U(x)$. 故所述算子在任一点 x 均连续，即其为线性算子. □

定理 1.4. Borel 可测的加性算子必为线性算子.

证明. 根据第 17 页定理 4，所考虑的算子 $U(x)$ 满足 Baire 条件. 于是它在某集合 H 上连续，其中 $E - H$ 为第一纲集. 设 $\lim_{n\to\infty} x_n = \Theta$. 对每个 $n = 1, 2, \ldots$，集合 $x_n[E - H] = E - x_n H$ 均为第一纲集，故集合

$$(E - H) + \sum_{n=1}^{\infty} x_n[E - H] = E - H + \sum_{n=1}^{\infty}(E - x_n H) \supset E - H \cdot \prod_{n=1}^{\infty} x_n H$$

亦为第一纲集，从而（根据第 14 页定理 2）不能穷尽空间 E. 于是存在点 x 使得

$$x \in H \quad 且 \quad x \in x_n H \ (n = 1, 2, \ldots),$$

从而 $(-x_n + x) \in H$. 又考虑到 $\lim_{n\to\infty}(-x_n + x) = x$，那么 $\lim_{n\to\infty} U(-x_n + x) = U(x)$，因此 $\lim_{n\to\infty}[U(-x_n) + U(x)] = U(x)$，最终得 $\lim_{n\to\infty} U(x_n) = \Theta$. 故算子 $U(x)$ 在点 Θ 处连续，从而由定理 3 知其为线性算子. □

注释. 由证明过程可见，该定理对满足 Baire 条件的加性算子也成立.

定理 1.5. 设空间 E 连通. 若 $\{U_n(x)\}$ 为线性算子列，则使极限 $\lim_{n\to\infty} U_n(x)$ 存在的点 x 的集合或为第一纲集，或为 E.

由第 22 页定理 2 易得此结论，因根据第 18 页定理 9，算子列 $\{U_n(x)\}$ 的收敛点集为 Borel 可测，从而根据第 15 页定理 3 满足 Baire 条件，且该点集构成群.

第 4 节 奇点凝聚定理

定理 1.6. 设 E 为连通空间，$\{U_{p,q}(x)\}$ 为双重线性算子列. 若对点列 $\{x_p\}$，极限 $\lim_{q\to\infty} U_{p,q}(x_p)$ 对任意 $p = 1, 2, \ldots$ 均不存在，则使极限 $\lim_{q\to\infty} U_{p,q}(x)$ 对任意 $x \in H$ 及任意 $p = 1, 2, \ldots$ 均不存在的点集 H 为第二纲集，且其余集 $E - H$ 为第一纲集.

证明. 对每个 $p = 1, 2, \ldots$，以 H_p 记序列 $\{U_{p,q}(x)\}$ 的收敛点集. 由假设 $x_p \in E - H_p$ 知 $H_p \neq E$. 根据第 24 页定理 5，H_p 为第一纲集. 故 $\sum_{p=1}^{\infty} H_p$ 亦为第一纲集. 因

$$H = E - \sum_{p=1}^{\infty} H_p,$$

证毕. □

第二章
一般向量空间

第 1 节　向量空间的定义与基本性质

设 E 为非空集合. 假设对 E 中任意有序元素对 x, y，都对应着 E 中一个元素 $x+y$（称为 x 与 y 的**和**)，且对任意数 t 和任意 $x \in E$，都对应着 E 中一个元素 tx（称为数 t 与元素 x 的**积**）. 假设上述运算，即元素加法与数乘元素，满足下列条件（其中 x, y 和 z 表示 E 的任意元素，a, b 表示数):

(1) $x+y=y+x,$

(2) $x+(y+z)=(x+y)+z,$

(3) $x+y=x+z$ 蕴含 $y=z,$

(4) $a(x+y)=ax+ay,$

(5) $(a+b)x=ax+bx,$

(6) $a(bx)=(ab)x,$

(7) $1 \cdot x=x.$

在这些假设下，称集合 E 构成一个**向量空间**或**线性空间**. 易见此时存在唯一元素——记作 Θ——使得恒有 $x+\Theta=x$，且等式 $ax=bx$（其中 $x \neq \Theta$）蕴含 $a=b$；此外，等式 $ax=ay$（其中 $a \neq 0$）蕴含 $x=y$.

进一步，定义:

$$-x=(-1)x \quad \text{且} \quad x-y=x+(-y).$$

第 9–12 页所描述的 (D) 型空间例 1–10，同时也是向量空间的例子，其中采用通常的元素加法与数乘定义.

当 $x \neq y$ 时，将连接 x 与 y 的**线段**理解为形如 $tx+(1-t)y$ 的所有元素组成的集合，其中 t 是区间 $[0,1]$ 中的任意数.

若集合 $G \subset E$ 包含连接其任意两元素的线段，则称 G 为**凸集**.

若 $x_1, x_2, \ldots, x_n$ 为向量空间的元素，则表达式

$$\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + \cdots + \alpha_n x_n = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i x_i,$$

其中 $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ 为任意实数，称为元素 $x_1, x_2, \ldots, x_n$ 的**线性组合**.

第 2 节　加性齐次泛函的延拓

设 E 与 E_1 为两个向量空间，$f(x)$ 为定义于 E 上、取值于 E_1 中的算子.

若对任意元素对 x, y 都有

$$f(x+y) = f(x) + f(y),$$

则称算子 $f(x)$ 为**加性**的；若对任意元素 x 和任意数 t 都有

$$f(tx) = tf(x),$$

则称算子 $f(x)$ 为**齐次**的.

定理 2.1. 设给定

1° 定义于 E 上的泛函 $p(x)$，满足对任意 $x, y \in E$ 有

$$p(x+y) \leqslant p(x) + p(y) \quad \text{且} \quad p(tx) = tp(x)\ (t \geqslant 0),$$

2° 定义于向量空间 $G \subset E$（自然采用相同的运算定义）上的加性齐次泛函 $f(x)$，且对所有 $x \in G$ 满足

$$f(x) \leqslant p(x),$$

则总存在定义于 E 上的加性齐次泛函 $F(x)$，使得

$$F(x) \leqslant p(x)\ (\forall x \in E) \quad \text{且} \quad F(x) = f(x)\ (\forall x \in G).$$

证明. 不妨设 $G \neq E$；取 $x_0 \in E - G$. 由 2° 知，对 $x' \in G$ 和 $x'' \in G$ 有：

$$f(x'') - f(x') = f(x'' - x') \leqslant p(x'' - x') = p[(x'' + x_0) + (-x' - x_0)]$$

$$\leqslant p(x'' + x_0) + p(-x' - x_0),$$

从而

$$-p(-x'-x_0)-f(x')\leqslant p(x''+x_0)-f(x'').$$

因此数

$$m=\sup_{x\in G}\left[-p(-x-x_0)-f(x)\right] \quad \text{和} \quad M=\inf_{x\in G}\left[p(x+x_0)-f(x)\right]$$

均为有限数且 $m\leqslant M$. 取满足 $m\leqslant r_0\leqslant M$ 的数 r_0，则对所有 $x\in G$ 有

$$-p(-x-x_0)-f(x)\leqslant r_0\leqslant p(x+x_0)-f(x). \tag{1}$$

考虑形如

$$y=x+tx_0 \quad (x\in G,\ t\ \text{为数}) \tag{2}$$

的所有元素 y 组成的集合 G_0. 显然 G_0 构成一个向量空间. 令

$$\varphi(y)=f(x)+tr_0, \tag{3}$$

其中元素 y 由 (2) 定义；由于 $x_0\in E-G$，每个 $y\in G_0$ 都有唯一的形如 (2) 的表示，因此泛函 $\varphi(y)$ 在 G_0 上有唯一确定的意义. 易见它在 G_0 上是加性且齐次的，且在 G 上与 $f(x)$ 重合. 下面证明

$$\varphi(y)\leqslant p(y) \quad (\forall y\in G_0). \tag{4}$$

事实上，若将 y 写成 (2) 的形式，可设 $t\neq 0$. 在不等式 (1) 中以 $\dfrac{x}{t}$ 代替 x 并乘以 t（依 $t>0$ 或 $t<0$ 而乘右端或左端），得 $tr_0\leqslant p(x+tx_0)-f(x)$，由 (3) 即得不等式 (4).

由此可知，只要将集合 $E-G$ 良序化，按照上述方法对 $f(x)$ 进行逐次延拓，就能得到满足定理结论的泛函 $F(x)$. 证毕. □

推论. 设给定定义于 E 上的泛函 $p(x)$，满足对任意 $x,y\in E$ 有

$$p(x+y)\leqslant p(x)+p(y) \quad \text{且} \quad p(tx)=tp(x)\ (t\geqslant 0),$$

则存在定义于 E 上的加性齐次泛函 $F(x)$，使得对所有 $x\in E$ 有

$$F(x)\leqslant p(x).$$

事实上，取 $x_0\in E$ 并以 G 记形如 tx_0（其中 t 为任意数）的所有元素组成的集合. 则 G 构成一个向量空间. 在其中令 $f(tx_0)=tp(x_0)$，则对任意 t 都有 $f(tx_0)\leqslant p(tx_0)$，因为 $t\geqslant 0$ 蕴含 $tp(x_0)=p(tx_0)$，而 $t<0$ 蕴含 $0=p(0)\leqslant p(x_0)+p(-x_0)$，从而 $p(x_0)\geqslant -p(-x_0)$，故 $tp(x_0)\leqslant -tp(-x_0)=p(tx_0)$；于是只需应用前述定理 1 即可.

第 3 节 应用：积分、测度与极限概念的推广

下面介绍定理 1 与上述推论的几个有趣应用.

1. 设 E 为定义在长度为 1 的圆周上的实值有界函数 $x(s)$ 的集合，其中 s 表示从定点沿固定方向测量的弧长. 采用通常的运算定义，E 构成一个向量空间.

现对 E 的每个元素 $x = x(s)$，将 $p(x)$ 理解为形如

$$M(x;\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_n) = \sup_{-\infty<s<+\infty} \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} x(s+\alpha_k)$$

的所有数 $M(x;\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_n)$ 的**下确界**，其中 $\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_n$ 为任意有限数列. 泛函 $p(x)$ 则满足推论的全部假设. 首先，显然恒有 $p(tx) = tp(x)$（$t \geqslant 0$）.

其次，给定 E 的两个元素 $x = x(s)$ 和 $y = y(s)$ 及数 $\varepsilon > 0$，存在有限数列 $\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_u$ 和 $\beta_1,\beta_2,\ldots,\beta_v$ 使得

$$M(x;\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_u) \leqslant p(x)+\varepsilon \quad 且 \quad M(y;\beta_1,\beta_2,\ldots,\beta_v) \leqslant p(y)+\varepsilon. \tag{5}$$

将形如 $\alpha_i+\beta_j$（其中 $i=1,2,\ldots,u$ 且 $j=1,2,\ldots,v$）的所有数任意排成序列 $\gamma_1,\gamma_2,\ldots,\gamma_{uv}$，则有

$$p(x+y) \leqslant M(x+y;\gamma_1,\gamma_2,\ldots,\gamma_{uv}) \tag{6}$$

且易验证

$$M(x+y;\gamma_1,\gamma_2,\ldots,\gamma_{uv}) \leqslant M(x;\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_u)+M(y;\beta_1,\beta_2,\ldots,\beta_v). \tag{7}$$

关系式 (5)–(7) 蕴含 $p(x+y) \leqslant p(x)+p(y)+2\varepsilon$，由于 ε 任意，这证明 $p(x+y) \leqslant p(x)+p(y)$.

由此，考虑由推论保证存在的泛函 $F(x)$.

若 $x(s)=1$，则 $p(x)=1$ 且 $p(-x)=-1$，而由 $F(x) \leqslant p(x)$ 及 $F(x)=-F(-x) \geqslant -p(-x)$ 得 $F(x)=1$.

若 $x(s) \geqslant 0$，则 $p(-x) \leqslant 0$，而由 $F(x)=-F(-x) \geqslant -p(-x)$ 知 $F(x) \geqslant 0$.

此外，泛函 $F(x)$ 具有如下性质：对任意数 s_0 都有 $F[x(s+s_0)] = F[x(s)]$. 事实上，令 $y(s) = x(s+s_0)-x(s)$ 且 $\alpha_k=(k-1)s_0$（$k=1,2,\ldots$），则对每个 n 有：

$$p(y) \leqslant M(y;\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_n) = \frac{1}{n}\sup_{-\infty<s<+\infty}[x(s+ns_0)-x(s)],$$

从而 $p(y) \leqslant 0$；类似可得 $p(-y) \leqslant 0$. 但 $F(y) \leqslant p(y)$ 且 $F(y)=-F(-y) \geqslant -p(-y)$，故 $F(y)=0$.

因此，若以符号 $\int x(s)\,ds$ 记泛函 $\dfrac{1}{2}\{F[x(s)]+F[x(1-s)]\}$，则有如下定理：

对 E 类中的每个函数 $x(s)$，都可赋予一个数 $\int x(s)\,ds$，使得下列条件（其中 $x(s)$ 和 $y(s)$ 为 E 类的任意函数，a, b, s_0 为数）成立：

(1) $\int[ax(s)+by(s)]\,ds = a\int x(s)\,ds + b\int y(s)\,ds$,

(2) $\int x(s)\,ds \geqslant 0$，当 $x(s) \geqslant 0$,

(3) $\int x(s+s_0)\,ds = \int x(s)\,ds$,

(4) $\int x(1-s)\,ds = \int x(s)\,ds$,

(5) $\int 1\,ds = 1$.

易验证满足条件 (1)–(5) 的泛函 $\int x(s)\,ds$ 恒介于函数 $x(s)$ 的 Riemann 下积分与 Riemann 上积分之间.

因此，对每个 Riemann 可积函数，该泛函与该函数的积分重合.

对 Lebesgue 可积函数，所述泛函并不总与它们的 Lebesgue 积分重合. 然而，从构成该函数类的向量空间 G 出发，并在其中将泛函 $f(x)$ 定义为函数 $x(s) \in G$ 的 Lebesgue 积分，定理 1 为我们提供了一个定义于空间 E 上的泛函 $F(x)$，使得泛函 $\int\, ds = \dfrac{1}{2}\{F[x(s)] + F[x(1-s)]\}$ 显然满足所有条件 (1)–(5) 且对任意 Lebesgue 可积函数与该函数的积分重合.

2. 现考虑上述圆周上所有集合组成的类 K，并以 A_0 记该圆周本身. 对 K 中的每个集合 A，令 $\mu(A) = \int x(s)\,ds$，其中 $x(s)$ 为集合 A 的**特征函数**，即 1 中考虑的 E 空间中的函数，则有如下定理:

对 K 类中的每个集合 A，都可赋予一个数 $\mu(A)$，使得下列条件（其中 A 和 B 为 K 类的任意集合）成立:

(1) $\mu(A+B) = \mu(A) + \mu(B)$，当 $AB = \varnothing$,

(2) $\mu(A) \geqslant 0$,

(3) $\mu(A) = \mu(B)$，当 $A \cong B$,

(4) $\mu(A_0) = 1$.

满足条件 (1)–(4) 的泛函 $\mu(A)$ 介于集合 A 的 Jordan 内测度与外测度之间. 因此，对每个 Jordan 可测集，该泛函与该集合的测度重合.

对任意 Lebesgue 可测集，所述泛函并不总与它们的 Lebesgue 测度重合，但与前述情形类似，可安排使该性质也成立.

3. 设 E 为定义于 $[0,+\infty]$ 上的所有实值有界函数 $x(s)$ 的集合；采用通常的运算定义，这是一个向量空间.

对 E 的每个元素 $x = x(s)$，以 $p(x)$ 记形如 $\lim\limits_{s\to\infty} \dfrac{1}{n}\sum\limits_{k=1}^{n} x(s+\alpha_k)$ 的所有数的下确界，其中 $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ 为任意有限正数列. 不难验证如此定义于空间 E 上的泛函 $p(x)$ 满足推论的假设. 以符号 $\lim\limits_{s\to\infty} x(s)$ 记由该推论保证存在的泛函 $F(x)$，则有如下定理:

对 E 类中的每个函数 $x(s)$，都可赋予一个数 $\lim\limits_{s\to\infty} x(s)$，使得下列条件（其中 $x(s)$ 和 $y(s)$ 为 E 的任意函数，a, b 和 $s_0 \geqslant 0$ 为数）成立:

(1) $\lim\limits_{s\to\infty}[ax(s)+by(s)] = a\lim\limits_{s\to\infty} x(s) + b\lim\limits_{s\to\infty} y(s)$,

(2) $\lim\limits_{s\to\infty} x(s) \geqslant 0$，当 $x(s) \geqslant 0$,

(3) $\lim\limits_{s\to\infty} x(s+s_0) = \lim\limits_{s\to\infty} x(s)$,

(4) $\lim\limits_{s\to\infty} 1 = 1$.

满足条件 (1)–(4) 的泛函 $\lim\limits_{s\to\infty} x(s)$ 恒介于 $\varliminf\limits_{s\to\infty} x(s)$ 与 $\varlimsup\limits_{s\to\infty} x(s)$ 之间. 因此，每当通常意义下的极限存在时，该泛函与 $\lim\limits_{s\to\infty} x(s)$ 重合.

4. 设 $\{\xi_n\}$ 为任意有界序列. 在区间 $(0,+\infty)$ 上按下述约定定义函数 $x(s)$：当 $n-1 < s \leqslant n$ 且 $n = 1, 2, \ldots$ 时，$x(s) = \xi_n$. 函数 $x(s)$ 于是属于 3 中考虑的 E 集合. 令 $\lim\limits_{n\to\infty} \xi_n = \lim\limits_{s\to\infty} x(s)$，其中 $\lim\limits_{s\to\infty} x(s)$ 采用 3 中给出的意义，则有如下定理：

对任意有界序列 $\{\xi_n\}$，都可赋予一个数 $\lim\limits_{n\to\infty} \xi_n$，使得下列条件（其中 $\{\xi_n\}$ 和 $\{\eta_n\}$ 为任意有界序列，a 和 b 为数）成立：

(1) $\lim\limits_{n\to\infty} (a\xi_n + b\eta_n) = a \lim\limits_{n\to\infty} \xi_n + b \lim\limits_{n\to\infty} \eta_n$,

(2) $\lim\limits_{n\to\infty} \xi_n \geqslant 0$，若对所有 $n = 1, 2, \ldots$ 有 $\xi_n \geqslant 0$,

(3) $\lim\limits_{n\to\infty} \xi_{n+1} = \lim\limits_{n\to\infty} \xi_n$,

(4) $\lim\limits_{n\to\infty} 1 = 1$.

条件 (1)–(4) 蕴含如此定义的泛函 $\lim\limits_{n\to\infty} \xi_n$ 恒介于 $\varliminf\limits_{n\to\infty} \xi_n$ 与 $\varlimsup\limits_{n\to\infty} \xi_n$ 之间. 因此，对每个收敛序列，该泛函与序列的极限（通常意义下）重合.

第三章

(F) 型空间

第 1 节　定义与预备知识

设 E 为完备 **(D) 型向量空间**，且满足下列条件（其中 x, x_n, y 为 E 的元素，h, h_n 为数）:

1^0　$(x,y) = (x-y,\Theta)$,

2^0　$\lim_{n\to\infty} h_n = 0$ 蕴含 $\lim_{n\to\infty} h_n x = \Theta$ 对所有x 成立,

3^0　$\lim_{n\to\infty} x_n = \Theta$ 蕴含 $\lim_{n\to\infty} h x_n = \Theta$ 对所有h 成立.

满足条件 $1^0 - 3^0$ 的空间 E 称为 **(F) 型空间**. 引言 §7 第 9–12 页所列举的 (D) 型空间例 1–10，易见同时都是 (F) 型空间.

条件 $1^0 - 3^0$ 立即蕴含极限的下列性质:

a) 当 $\lim_{n\to\infty} x_n = x$ 且 $\lim_{n\to\infty} y_n = y$ 时，有 $\lim_{n\to\infty}(x_n + y_n) = x + y$.

事实上，只需注意总有

$$\begin{aligned}(x_n+y_n, x+y) &= (x_n+y_n-x-y,\Theta)\\ &\leqslant (x_n-x+y_n-y, y_n-y) + (y_n-y,\Theta)\\ &= (x_n-x,\Theta)+(y_n-y,\Theta) = (x_n,x)+(y_n,y).\end{aligned}$$

b) 若 $\lim_{n\to\infty} h_n = h$，则 $\lim_{n\to\infty} h_n x = hx$，无论 $x \in E$ 为何.

事实上，总有 $(h_n x, hx) = ((h_n - h)x, \Theta)$.

由此可见，每个 (F) 型空间同时都是 (G) 型空间. 因此，当 E 设为 (F) 型空间时，第一章的所有定理仍然成立.

此外，(F) 型向量空间是**连通**的，因为对任意 $x, y \in E$，形如 $hx + (1-h)y$（其中 $0 \leqslant h \leqslant 1$）

的元素集合是包含 x 和 y 的连通集.

在 (F) 型空间 E 中任取一球 K（见第 13 页），易见集合 xK（定义见第 21 页）也是一球.

设 $h \neq 0$，则算子 $U(x) = hx$ 构成空间 E 到自身的连续一一变换，且易见闭集、开集、无处稠密集、第一纲集、第二纲集、Borel 可测集分别变换为同类型的集合.

特别地，由于每个 (F) 型空间都是连通的，由第一章 §2 的定理 2（第 22 页）及第 23 页的注记可得如下定理:

定理 3.1. 设 E 为 (F) 型空间，则任何 Borel 可测的线性子空间 $H \subset E$ 若属于第二纲，则必等于 E.

第 2 节　齐次算子

现在讨论定义在 (F) 型空间 E 上、取值于同样为 (F) 型空间 E_1 中的加性算子.

对此类算子, 第一章的定理 3、4、5、6 仍然成立. 此外, 称满足对任意数 h 都有 $U(hx) = hU(x)$ 的算子 $U(x)$ 为**齐次**算子，则有

定理 3.2. 每个线性算子都是齐次的.

证明. 设算子 $U(x)$ 为线性算子. 显然对任意 $x \in E$ 及任意有理数 r 都有 $U(rx) = rU(x)$. 若 $\{r_n\}$ 为趋于 h 的有理数列，则 $\lim_{n\to\infty} r_n x = hx$. 由算子 $U(x)$ 的连续性可得

$$U(hx) = \lim_{n\to\infty} U(r_n x) = \lim_{n\to\infty} r_n U(x) = hU(x);$$

因此算子 $U(x)$ 确实是齐次的. □

第 3 节　元素级数与线性算子的逆

为简便起见，记

$$|x| = (x, \Theta).$$

易验证对任意 $x, y \in E$ 有下列关系:

$$\begin{aligned}
&1^0 \quad (x,y) = |x-y|,\\
&2^0 \quad |\Theta| = 0; \quad x \neq \Theta \text{ 蕴含} |x| > 0,\\
&3^0 \quad |-x| = |x|,\\
&4^0 \quad |x| - |y| \leqslant |x+y| \leqslant |x| + |y|,\\
&5^0 \quad \lim_{n\to\infty} x_n = x \text{ 蕴含 } \lim_{n\to\infty} |x_n| = |x|.
\end{aligned}$$

给定 E 中元素列 $\{x_n\}$，若 $\lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^n x_i = x$，则称级数 $\sum_{i=1}^\infty x_i$ 收敛于元素 x，或称 x 为该级数的和. 记作 $x=\sum_{i=1}^\infty x_i$.

级数的定义还蕴含下列关系：

$$6^0 \quad x=\sum_{i=1}^{\infty} x_i \text{ 蕴含} |x| \leqslant \sum_{i=1}^{\infty} |x_i|.$$

事实上，对任意 $\varepsilon>0$，存在 n 使得 $|x-\sum_{i=1}^n x_i|<\varepsilon$，于是

$$|x| \leqslant \varepsilon + \left|\sum_{i=1}^{n} x_i\right| \leqslant \varepsilon + \sum_{i=1}^{n} |x_i|,$$

而 ε 任意，故 $|x| \leqslant \sum_{i=1}^\infty |x_i|$.

$$7^0 \quad \text{若级数} \sum_{i=1}^{\infty} |x_i| \text{ 收敛，则级数} \sum_{i=1}^{\infty} x_i \text{ 收敛于某元素.}$$

事实上，记 $s_n=\sum_{i=1}^n x_i$. 若 $p<q$，则

$$|s_p - s_q| = \left|\sum_{i=p+1}^{q} x_i\right| \leqslant \sum_{i=p+1}^{q} |x_i|.$$

因此 $\lim_{\substack{p\to\infty\\ q\to\infty}} |s_p-s_q|=0$. 从而 $\sum_{i=1}^\infty x_i$ 是收敛于某元素的级数.

至此，已证得下列定理.

定理 3.3. 线性算子的陪域要么是第一纲的，要么等于 E_1.

证明. 设定义在 E 上的线性算子 $U(x)$ 的陪域 $H\subset E_1$ 属于第二纲. 首先证明：

$$\text{对任意}\varepsilon>0\text{，存在}\eta>0\text{ 使得}U(x)\text{ 给出的开球}|x|<\varepsilon\text{ 的像包含开球}|y|<\eta. \tag{1}$$

为此，给定 $\varepsilon>0$，对每个自然数 n，以 G_n 记形如 $x=nx'$ 的点集，其中 $|x'|<\frac{\varepsilon}{2}$；以 H_n 记 G_n 经 $U(x)$ 给出的像，即形如 $y=U(x)$（其中 $x\in G_n$）的点集. 对任意给定点 x，总有 $\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}x=\Theta$；因此存在自然数 n 使得 $\left|\frac{1}{n}x\right|<\frac{\varepsilon}{2}$，即 $x\in G_n$. 由此得 $E=\sum_{n=1}^\infty G_n$ 及 $H=\sum_{n=1}^\infty H_n$.

现 H 设为第二纲，故某个 H_{n_0} 亦然. 设 K_1 为以 y_1 为中心、η_1 为半径且包含于 H'_{n_0} 的开球.

由此立即推出，以 $\frac{1}{n_0}y_1$ 为中心、$\frac{1}{n_0}\eta_1$ 为半径的开球 K_2 包含于 H'_1. 事实上，$y\in K_2$，即 $\left|y-\frac{1}{n_0}y_1\right|<\frac{1}{n_0}\eta_1$，蕴含 $n_0y\in K_1$，因为

$$|n_0 y - y_1| = \left|n_0\left(y-\frac{1}{n_0}y_1\right)\right| \leqslant n_0\left|y-\frac{1}{n_0}y_1\right| < \eta_1;$$

因此存在点 $\overline{y_n} \in H_{n_0}$ 使得 $\lim_{n\to\infty} \overline{y_n} = n_0 y$，即 $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n_0}\overline{y}_n = y$，从而 $\frac{1}{n_0}\overline{y_n} \in H_1$，故 $y \in H_1'$.

设 K_3 为以 $y_3 \in H_1$ 为中心、包含于 K_2 的任意开球. 则形如 $y_3 - y$（其中 $y \in H_1$）的点集以开球 $|y| < \bar{\eta}$ 的每一点为聚点. 现令 $y_3 = U(x_3)$，$y = U(x)$（其中 $x_3, x \in G_1$），则有

$$|x_3 - x| \leqslant |x_3| + |x| < \varepsilon \quad \text{且} \quad U(x_3 - x) = y_3 - y.$$

这就证明了开球 $|x| < \bar{\varepsilon}$ 的像的导集包含开球 $|y| < \bar{\eta}$.

现令 $\varepsilon_i = \frac{\varepsilon}{2^i}$（$i = 1, 2, \ldots$）. 由上述，存在正数列 η_i 使得开球 $|x| < \varepsilon_i$ 的像的导集包含开球 $|y| < \eta_i$，且显然可设 $\lim_{i\to\infty} \eta_i = 0$. 下面用归纳法定义两个点列 $\{y_n\}$ 和 $\{x_n\}$ 如下. 设 $|y| < \eta = \eta_1$ 且：

a) y_1 为 E_1 中满足 $|y - y_1| < \eta_2$ 的任意点，x_1 为 E 中满足 $U(x_1) = y_1$ 且 $|x_1| < \varepsilon_1$ 的点；

b) y_n 为 E_1 中满足 $|y - \sum_{k=1}^{n} y_k| < \eta_{n+1}$ 的任意点，x_n 为 E 中满足 $U(x_n) = y_n$ 且 $|x_n| < \varepsilon_n$ 的点.

于是有

$$\sum_{n=1}^{\infty} y_n = y \tag{2}$$

且因 $|x_n| < \varepsilon_n = \frac{\varepsilon}{2^n}$，

$$\sum_{n=1}^{\infty} |x_n| < \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\varepsilon}{2^n}. \tag{3}$$

由 7^0 知级数 $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ 收敛. 设 x 为该级数的和. 由 (3) 及 6^0 得 $|x| < \varepsilon$，且由 (2) 及线性性：

$$U(x) = \sum_{n=1}^{\infty} U(x_n) = \sum_{n=1}^{\infty} y_n = y.$$

于是命题 (1) 得证.

现因对任意 $y \in E_1$ 有 $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} y = \Theta$，故存在自然数 n 使得 $\left|\frac{1}{n} y\right| < \eta$，于是可找到 x 使得 $U(x) = \frac{1}{n} y$，从而 $U(nx) = y$. 由此得 $H = E_1$，符合定理结论. □

定理 3.4. 若线性算子 $U(x)$ 将 E 映成整个 E_1，则对 E_1 中任意收敛于 $y_0 = U(x_0)$ 的点列 $\{y_n\}$，存在 E 中收敛于 x_0 的点列 $\{x_n\}$ 使得 $U(x_n) = y_n$（$n = 1, 2, \ldots$）.

证明. 设 $\{\varepsilon_n\}$ 为趋于 0 的正数列. 因算子 $U(x)$ 为线性算子，有在定理 3 证明中建立的命题 (1)；由此知对每个 $n = 1, 2, \ldots$，开球 $|x| < \varepsilon_n$ 的像包含开球 $|y| < \eta_n$.

取自然数 m_0 使得对所有 $m > m_0$，不等式 $|y_m - y_0| < \eta_n$ 至少对一个 n 值成立；且对给定的满足 $y_m \neq y_0$ 的 m，设 n_m 为这些值中的最大者. 最后，定义点 x_m 如下：

a) 若 $m \leqslant m_0$，令 x_m 为满足方程 $U(x_m) = y_m$ 的任意点；

b) 若 $m > m_0$ 且 $y_m \neq y_0$，令 x_m 为满足同一方程的开球 $|x - x_0| < \varepsilon_{n_m}$ 中的任意点；

c) 若 $m > m_0$ 且 $y_m = y_0$，令 $x_m = x_0$.

如此定义的序列 $\{x_n\}$ ——易验证——满足定理结论. □

定理 3.5. 若线性算子将 E 一一地映成 E_1，则该变换同时是双连续的.

此结论直接由定理 4 得出.

定理 3.6. 若向量空间 E 关于距离 (x, y) 和另一距离 $(x, y)_1$ 都是 (F) 型空间，且

$$\lim_{n\to\infty}(x_n, x) = 0 \text{ 总蕴含 } \lim_{n\to\infty}(x_n, x)_1 = 0,$$

则反之亦然，

$$\lim_{n\to\infty}(x_n, x)_1 = 0 \text{ 也总蕴含 } \lim_{n\to\infty}(x_n, x) = 0,$$

因此两个度量下的极限概念相同.

此结论由定理 5 得出，只需以具有度量 $(x, y)_1$ 的空间 E 为 E_1，并定义线性算子 $y = U(x)$ 为 $y = x$.

定理 3.7. 满足条件

$$\lim_{n\to\infty} x_n = x_0 \text{ 且 } \lim_{n\to\infty} U(x_n) = y_0 \text{ 蕴含} y_0 = U(x_0)$$

的加性算子 $y = U(x)$ 是线性算子.

证明. 在 E 中引入新的距离定义：

$$(x', x'')_1 = (x', x'') + (y', y''), \tag{4}$$

其中 $x' \in E$，$x'' \in E$，$y' = U(x')$，$y'' = U(x'')$，(x', x'') 表示 E 中 x' 到 x'' 的原距离，(y', y'') 表示 E_1 中 y' 到 y'' 的距离.

易见，具有距离 $(x', x'')_1$ 的空间 E 是 (F) 型空间；特别地，为验证其完备性，设 $\{x_n\}$ 为满足

$$\lim_{\substack{p\to\infty\\ q\to\infty}}(x_p, x_q)_1 = 0$$

的点列；于是由 (4) 得

$$\lim_{\substack{p\to\infty\\ q\to\infty}}(x_p, x_q) = \lim_{\substack{p\to\infty\\ q\to\infty}}(y_p, y_q) = 0,$$

从而存在 x_0 和 y_0 使得

$$\lim_{n\to\infty}(x_n, x_0) = \lim_{n\to\infty}(y_n, y_0) = 0,$$

且因由假设 $y_0 = U(x_0)$，故由 (4) 确实得 $\lim_{n\to\infty}(x_n, x_0)_1 = 0$.

现由 (4) 对任意 x', x'' 有 $(x', x'')_1 \geqslant (x', x'')$；因此 $\lim_{n\to\infty}(x_n, x)_1 = 0$ 蕴含 $\lim_{n\to\infty}(x_n, x) = 0$；由定理 6, $\lim_{n\to\infty}(x_n, x) = 0$ 反之也蕴含 $\lim_{n\to\infty}(x_n, x)_1 = 0$, 从而也由 (4) 得 $\lim_{n\to\infty} U(x_n) = U(x)$. 因此加性算子 $U(x)$ 连续. □

引理 3.1. 设 $U'(x)$ 和 $U''(x)$ 分别为定义在 (F) 型空间 E' 和 E'' 上、取值于同样为 (F) 型空间 E_1 中的两个线性算子. 若方程 $U'(x) = U''(y)$ 对每个 x 恰有一解 $y = U(x)$，则算子 $U(x)$ 是线性的.

证明. 此结论由定理 7 得出，因为易见 $\lim_{n\to\infty} x_n = x_0$ 且 $\lim_{n\to\infty} U(x_n) = y_0$ 蕴含 $y_0 = U(x_0)$. □

引理 3.2. 给定加性算子 $y = U(x)$ 和线性算子 $z = V(y)$ 满足 $V(y) = \Theta$ 蕴含 $y = \Theta$, 若算子 $V[U(x)]$ 还是线性的，则算子 $U(x)$ 也是线性的.

证明. 此结论由引理 1 得出，因为方程 $V[U(x)] = V(y)$ 对每个 x 恰有一解 $y = U(x)$. □

定义. 线性算子类 T 称为**全类**，若等式组 $V(x) = 0$（$V \in T$）蕴含等式 $x = \Theta$.

定理 3.8. 设 $y = U(x)$（$x \in E$，$y \in E_1$）为加性算子，T 为定义在 E_1 上的线性算子全类. 若对每个 $V \in T$，算子 $V[U(x)]$ 都是线性的，则 $U(x)$ 也是线性算子.

证明. 设 $\lim_{n\to\infty} x_n = x_0$ 且对相应序列 $\{y_n\}$ 有 $\lim_{n\to\infty} y_n = y_0$，其中 $y_n = U(x_n)$（$n = 1, 2, \ldots$）.

对每个 $V \in T$ 有

$$\lim_{n\to\infty} V[U(x_n)] = \lim_{n\to\infty} V(y_n) = V(y_0),$$

且因算子 $V[U(x)]$ 为线性，

$$\lim_{n\to\infty} V[U(x_n)] = V[U(x_0)],$$

从而 $V[U(x_0)] - V(y_0) = 0$，即 $V[U(x_0) - y_0] = 0$；因类 T 为全类，故 $U(x_0) = y_0$. 由定理 7，算子 $U(x)$ 因此是线性的. □

定理 3.9. 设 $\{U_i(x)\}$（$x \in E'$）和 $\{V_i(y)\}$（$y \in E''$）为两个取值于 (F) 型空间 E_1 的线性算子列，若方程组 $U_i(x) = V_i(y)$（$i = 1, 2, \ldots$）对每个 x 恰有一解 $y = U(x)$，则算子 $y = U(x)$ 是线性的.

证明. 设 $\lim_{n\to\infty} x_n = x_0$ 且对相应序列 $\{y_n\}$ 有 $\lim_{n\to\infty} y_n = y_0$. 由算子 $\{U_i\}$ 和 $\{V_i\}$ 的连续性，对每个 $i = 1, 2, \ldots$ 有 $U_i(x_0) = V_i(y_0)$，从而 $y_0 = U(x_0)$，由此据定理 7 知算子 $y = U(x)$ 连续. □

第 4 节 连续不可导函数

作为应用，首先由第一章定理 4（第 23 页）通过一个简单推导，证明存在在一个正测度集上不可导的连续函数.

以 (C^1) 记所有周期为 1 的连续函数之集合，对 (C^1) 中任意函数对 $x_1(t)$ 和 $x_2(t)$ 令

$$(x_1(t), x_2(t)) = \max_{0\leqslant t\leqslant 1} |x_1(t) - x_2(t)|.$$

易见 (C^1) 构成一个 (F) 型空间.

对任意非零数 h，令

$$y(t) = \frac{x(t+h) - x(t)}{h} \quad 对 \quad 0 \leqslant t \leqslant 1. \tag{5}$$

以 (S) 记可测函数空间（见引言第 9 页），其为 (F) 型空间（见 §1 第 35 页），设 $y(t) \in (S)$. 则表达式 (5) 定义了一个定义域为 (C^1)、陪域含于 (S) 的线性算子.

设 $\lim_{n\to\infty} h_n = 0$ 且 $h_n \neq 0$，令

$$U_n(x) = \frac{x(t+h_n) - x(t)}{h_n} \quad 对 \quad 0 \leqslant t \leqslant 1. \tag{6}$$

若每个连续函数几乎处处有导数，则表达式 (6) 的极限对几乎所有 t 值存在. 因此对任意 $x \in (C^1)$, 极限 $\lim_{n\to\infty} U_n(x)$ 存在, 它定义在域 (S) 中, 即依测度收敛的极限. 令 $U(x) = \lim_{n\to\infty} U_n(x)$, 则得到加性算子 $U(x)$ 为 Borel 可测的，由第一章定理 4（第 35 页），它将是线性算子. $U(x)$ 显然是函数 $x(t)$ 的导数.

由算子 $U(x)$ 的连续性可知，若 $\lim_{n\to\infty} x_n(t) = 0$ 一致收敛，则 $\lim_{n\to\infty} x'_n(t) = 0$ 依测度收敛. 然而对 $x_n(t) = \frac{1}{n}\sin\frac{nt}{2\pi}$ 有 $\lim_{n\to\infty} x_n(t) = 0$ 一致收敛，而导数列 $\left\{\frac{1}{2\pi}\cos n\frac{t}{2\pi}\right\}$ 不依测度趋于 0. 因此存在连续函数在一个正测度集上没有导数.

第 5 节　偏微分方程解的连续性

设 $F(x) = 0$ 为线性偏微分方程，例如二阶方程：

$$F(x) = a_1\frac{\partial^2 x}{\partial u^2} + a_2\frac{\partial^2 x}{\partial v^2} + a_3\frac{\partial^2 x}{\partial u\partial v} + a_4\frac{\partial x}{\partial u} + a_5\frac{\partial x}{\partial v} + a_6 x = 0, \tag{7}$$

其中 a_i（$i = 1, 2, \ldots, 6$）为变量 u 和 v 的连续函数，定义在以简单闭曲线 C 为边界的闭区域 $\overline{G}$ 上.

对于某类边界条件，方程 (7) 可能总有唯一解 $x(u, v)$，它在 $\overline{G}$ 上连续，且其出现于 (7) 中的偏导数在 $\overline{G}$ 的内部 G 中连续，即一阶和二阶导数在 G 的内部连续.

在此假设下，边界条件可以是多种多样的. 例如可给定函数在曲线 C 上的值（椭圆型）或在此曲线的部分上（双曲型、抛物型），或给定曲线 C 上法向导数的值等.

此外，设 t 为遍历 C 的参数，方程 (7) 对每个与例如直到 r 阶导数都连续的函数 $\xi(t)$ 都有一解 $x(u, v)$，它在 C 上等于函数 $\xi(t)$.

在此前提下，证明如下结论：

若序列 $\{\xi_n(t)\}$ 满足（对 $\xi(t)$ 要求的）条件，且一致地有 $\lim_{n\to\infty} \xi_n(t) = 0$ 和 $\lim_{n\to\infty} \xi_n^{(i)}(t) = 0$ $(i = 1, 2, \ldots, r)$, 则记 $\{x_n(u, v)\}$ 为方程 $F(x) = 0$ 的相应解序列, 在 $\overline{G}$ 上一致地有 $\lim_{n\to\infty} x_n(u, v) = 0$，且在含于 G 的任意闭区域上一致地有 $\lim_{n\to\infty} \frac{\partial^2 x_n}{\partial u^2} = 0$，$\lim_{n\to\infty} \frac{\partial^2 x_n}{\partial v^2} = 0$，……等（对出现于方程 (7) 中的所有偏导数）.

为证明此结论，以 E 记所有满足 (7)、在 $\overline{G}$ 上连续且其一阶和二阶偏导数（出现于 (7) 中的那些）在 G 中连续的函数 $x(u,v)$ 之集合. 设 $\{\overline{G}_n\}$ 为含于 G 的闭区域列使得 $G=\sum_{k=1}^{\infty} G_k$. 对任意 $x(u,v)\in E$ 和 $y(u,v)\in E$ 令

$$(x,y)=\max_{u,v\in\overline{G}}|x(u,v)-y(u,v)|+\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{2^k}\cdot\frac{\max_{u,v\in\overline{G_k}}\left|\frac{\partial^2 x}{\partial u^2}-\frac{\partial^2 y}{\partial u^2}\right|+\cdots}{1+\max_{u,v\in\overline{G_k}}\left|\frac{\partial^2 x}{\partial u^2}-\frac{\partial^2 y}{\partial u^2}\right|+\cdots},$$

其中分子中出现方程 (7) 中出现的所有偏导数之差.

如此赋度，E 构成一个 (F) 型空间，且关系 $\lim_{n\to\infty} x_n=x$（按如此定义的距离）表示 x_n 在 $\overline{G}$ 上一致趋于 x，同时偏导数 $\frac{\partial^2 x_n}{\partial u^2},\ldots$（出现于 (7) 中的）在每个闭区域 $\overline{G}_k$（$k=1,2,\ldots$）上一致趋于函数 x 的相应偏导数.

以 E_1 记函数 $\xi(t)$（其中 t 遍历 C）与其前 r 阶导数都连续的函数之集合. 对任意 $\xi(t)\in E_1$ 和 $\eta(t)\in E_1$ 令

$$(\xi,\eta)=\max_{t\in C}|\xi(t)-\eta(t)|+\sum_{i=1}^{r}\max_{t\in C}|\xi^{(i)}(t)-\eta^{(i)}(t)|.$$

现以 $\xi=U(x)$ 记使每个函数 $x=x(u,v)\in E$ 对应于 $x(u,v)$ 在 G 的边界 C 上取值的函数 $\xi=\xi(t)$ 的算子. 如此定义，算子 $U(x)$ 显然是加性且连续的.

现算子 $U(x)$ 的陪域是 (F) 型空间，故由假设存在的逆算子 $x=U^{-1}(\xi)$ 据第 41 页定理 5 是连续的，这就蕴含了待证命题.

注释. 若去掉方程 (7) 解的唯一性假设，则只能（据第 40 页定理 4）得出如下结论：设 $\{\xi_n(t)\}$ 有上述意义，则存在满足 (7) 的函数列 $\{x_n(u,v)\}$，它们在 C 上等于 $\xi_n(t)$，且在 $\overline{G}$ 上一致地有 $\lim_{n\to\infty} x_n(u,v)=0$，在含于 G 的任意闭区域上一致地有 $\lim_{n\to\infty}\frac{\partial^2 x_n}{\partial u^2}=0,\ldots$.

第 6 节　无穷未知量线性方程组

设 (a_{ik})（$i=1,2,\ldots$；$k=1,2,\ldots$）为任意实数矩阵（双重序列），E_1 为元素为序列的 (F) 型空间.

定理 3.10. 若对每个序列 $y=\{\eta_i\}\in E_1$，方程组

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_{ik}\xi_k=\eta_i \quad 其中 \quad i=1,2,\ldots, \tag{8}$$

恰有一解 $\{\xi_k\}$，则存在定义在 E_1 上的线性泛函 $\xi_k = f_k(y)$（$k=1,2,\ldots$）使得

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_{ik} f_k(y) = \eta_i \quad \text{对所有} \quad y \in E_1 \text{ 及} i = 1,2,\ldots$$

证明. 以 E 记所有满足下列条件的序列 $x=\{\xi_k\}$ 之集合:

a) 级数 $\sum_{k=1}^{\infty} a_{ik}\xi_k$ 对每个 $i=1,2,\ldots$ 都收敛;

b) 序列 $\{\eta_i\} = \{\sum_{k=1}^{\infty} a_{ik}\xi_k\}$ 属于 E_1.

对 E 中任意元素对 $x'=\{\xi_k'\}$ 和 $x''=\{\xi_k''\}$ 令

$$(x',x'')_i = \sup_{1\leqslant n<\infty} \left| \sum_{k=1}^{n} a_{ik}(\xi_k' - \xi_k'') \right|,$$

$(x',x'')_0$ 为序列 $\{\sum_{k=1}^{\infty} a_{ik}\xi_k'\}$ 与 $\{\sum_{k=1}^{\infty} a_{ik}\xi_k''\}$ 在 E_1 中的距离，并按下式定义 E 中的距离 (x',x''):

$$(x',x'') = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{1}{2^i} \cdot \frac{(x',x'')_i}{1+(x',x'')_i}.$$

注意

$$\text{对每个} k=1,2,\ldots, \text{ 若 } \lim_{n\to\infty} x_n = \Theta (\text{其中} x_n = \{\xi_k^{(n)}\} \in E), \text{ 则 } \lim_{n\to\infty} \xi_k^{(n)} = 0. \tag{9}$$

事实上，由方程组 (8) 解的唯一性，第 k 列至少有一个元 $a_{ik} \neq 0$. 故设

$$a_{i_k k} \neq 0 \quad \text{对} \quad k=1,2,\ldots \tag{10}$$

因 $\lim_{n\to\infty} x_n = \Theta$，故 $\lim_{n\to\infty}(x_n,\Theta)_{i_1} = 0$，从而 $\lim_{n\to\infty} \xi_1^{(n)} = 0$，因为 (10) 给出 $a_{i_1 1} \neq 0$，且现易用归纳法证明一般地 $\lim_{n\to\infty} \xi_k^{(n)} = 0$ 对每个自然数 k 成立.

如此赋度，命题 (9) 使我们能证明 E 是完备向量空间.

为此，设序列 $\{x_n\}$ (其中 $x_n = \{\xi_k^{(n)}\}$) 满足条件 $\lim_{\substack{p\to\infty\\ q\to\infty}}(x_p,x_q)=0$. 因此 $\lim_{\substack{p\to\infty\\ q\to\infty}}(x_p - x_q) = 0$，从而由 (9) 得 $\lim_{\substack{p\to\infty\\ q\to\infty}}(\xi_k^{(p)} - \xi_k^{(q)}) = 0$（$k=1,2,\ldots$），故对每个自然数 k 存在 $\lim_{n\to\infty}\xi_k^{(n)} = \xi_k$. 设 $x=\{\xi_k\}$. 易验证 $x\in E$ 且对每个 $i=0,1,\ldots$ 有 $\lim_{n\to\infty}(x_n,x)_i = 0$，从而 $\lim_{n\to\infty}(x_n,x)=0$；故空间 E 确实完备.

由此 E 是 (F) 型空间.

至此，令

$$y = U(x)$$

对所有满足方程组 (8) 的序列 $x=\{\xi_k\}\in E$ 和 $y=\{\eta_i\}\in E_1$ 成立.

易见

$$(y,\Theta)=(x,\Theta)_0\leqslant(x,\Theta), \tag{11}$$

其中 (y,Θ) 当然表示 E_1 中的距离，(x,Θ) 表示 E 中的距离.

由 (11)，$\lim_{n\to\infty}x_n=\Theta$ 蕴含 $\lim_{n\to\infty}U(x_n)=\Theta$. 故算子 $y=U(x)$ 是线性的，且因它将 E 一一地映成 E_1，逆算子 $x=U^{-1}(y)$ 据第 40 页定理 5 也是线性的. 因此，若令 $\xi_k=f_k(y)$（$k=1,2,\ldots$），其中 $x=U^{-1}(y)=\{\xi_k\}$，则 $\lim_{n\to\infty}y_n=\Theta$（其中 $x_n=U^{-1}(y_n)=\{\xi_k^{(n)}\}$）蕴含 $\lim_{n\to\infty}x_n=\Theta$，从而 $\lim_{n\to\infty}\xi_k^{(n)}=0$；因此加性泛函 $f_k(y)$ 是 E_1 中的线性泛函. □

此定理蕴含，如我们将看到的，如下定理：

若方程组 (8) 对每个属于

1° 收敛于 0 的序列空间，

2° (s) 型空间，

3° (l) 型空间，

4° $l^{(p)}$ 空间（$p>1$）

的序列 $\{\eta_i\}$ 恰有一解，则存在矩阵 $\{b_{ki}\}$ 使得

$$\xi_k=\sum_{i=1}^{\infty}b_{ki}\eta_i \quad 对 \quad k=1,2,\ldots,$$

其中序列 $\{\xi_k\}$ 和 $\{\eta_i\}$ 满足方程组 (8)，且分别满足条件：

1° $\sum_{i=1}^{\infty}|b_{ki}|<\infty$（$k=1,2,\ldots$），

2° 它只有有限行（即存在数列 n_k 使得对所有 $i>n_k$ 有 $b_{ki}=0$），

3° $|b_{ki}|<m_k$ 对某数列 $\{m_k\}$，

4° $\sum_{i=1}^{\infty}|b_{ki}|^{\frac{p}{p-1}}<\infty$（$k=1,2,\ldots$）.

注释. 若假设方程组 (8) 对每个收敛序列 $\{\eta_i\}$（不必收敛于 0）恰有一解，则除满足 1° 的矩阵 $\{b_{ki}\}$ 外，还存在有界序列 $\{c_k\}$ 使得

$$\xi_k=c_k\lim_{i\to\infty}\eta_i+\sum_{i=1}^{\infty}b_{ki}\eta_i \quad 对 \quad k=1,2,\ldots$$

所有这些定理都由开头建立的一般定理（定理 10，第 47 页）通过对每个特殊空间中线性泛函的适当表示得到（见第 50 页及第 66–68 页的定理）.

第 7 节 (s) 型空间的应用

下面建立 (s) 型数列空间（见引言 §7，2，第 10 页）中线性泛函的一般形式.

定理 3.11. 定义在 (s) 型空间上的每个线性泛函 $f(x)$ 形如

$$f(x)=\sum_{i=1}^{N}a_i\xi_i, \tag{12}$$

其中 N 为依赖于 f 的自然数.

证明. 设 $x_n=\{\xi_i^{(n)}\}$，其中 $\xi_i^{(n)}=0$（$i\neq n$）且 $\xi_n^{(n)}=1$. 令 $f(x_n)=a_n$. 对任意序列 $x=\{\xi_n\}$，有 $x=\sum_{n=1}^{\infty}\xi_nx_n$，从而 $f(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\xi_nf(x_n)=\sum_{n=1}^{\infty}a_n\xi_n$. 现此级数对任意序列 $\{\xi_n\}$ 都收敛，故存在自然数 N 使得对所有 $n>N$ 有 $a_n=0$，从而得 $f(x)$ 的形式 (12). □

M. O. Toeplitz 建立了如下定理:

定理 3.12. 为使存在满足方程组 (8) 的数列 $\{\xi_k\}$，必要且充分条件是对任意有限数列 $h_1,h_2,\dots,h_r$，条件 $\sum_{i=1}^{r}h_ia_{ik}=0$（$k=1,2,\dots$）蕴含等式 $\sum_{i=1}^{r}h_i\eta_i=0$.

特别地，若条件 $\sum_{i=1}^{r}h_ia_{ik}=0$（$k=1,2,\dots$）蕴含 $h_1=h_2=\dots=h_r=0$，则方程组 (8) 对任意序列 $\{\eta_i\}$ 都有解.

下面证明

定理 3.13. 若方程组 (8) 对每个序列 $y=\{\eta_i\}$ 恰有一解，则对每个自然数 i 存在自然数 N_i 使得对所有 $k>N_i$ 有 $a_{ik}=0$.

证明. 令 $\xi_k=f_k(y)$ 对 $\sum_{k=1}^{\infty}a_{ik}\xi_k=\eta_i$（$i=1,2,\dots$）. 由第 47 页定理 10，$f_k(y)$ 是定义在实数序列 (s) 型空间（见第 10 页）中的线性泛函. 因此对每个自然数 k 存在有限数列 $\alpha_{1k},\alpha_{2k},\dots,\alpha_{N_kk}$ 使得

$$f_k(y)=\sum_{i=1}^{N_k}\alpha_{ik}\eta_i=\xi_k. \tag{13}$$

现方程组 (8) 的方程是线性无关的.

事实上，假设相反，存在有限数列 $h_1,h_2,\dots,h_r$ 使得 $\sum_{k=1}^{r}h_ka_{ik}=0$（$i=1,2,\dots$）. 则据 (13) 有

$$\sum_{k=1}^{r}h_k\xi_k=\sum_{k=1}^{r}h_kf_k(y)=0\quad 对所有序列 y=\{\eta_i\}. \tag{14}$$

令 $\eta_i^0=a_{ij}$ 对任意固定的自然数 $j\leqslant r$，则对相应解 $\{\xi_k^0\}$ 有 $\xi_j^0=1$ 且对所有 $k\neq j$ 有 $\xi_k^0=0$. 将这些值代入 (14) 得 $h_j=0$；因此所有系数 h_k 都为零，这证明了方程 (8) 的线性无关性.

由此据定理 12，对任意序列 $\{\xi_k\}$ 存在满足方程 (13) 的数列 $\{\eta_i\}$. 因此级数 $\sum_{k=1}^{\infty}a_{ik}\xi_k$ 对任意序列 $\{\xi_k\}$ 都收敛，从而对每个 $i=1,2,\dots$ 存在满足定理结论的 N_i. □

注释. 若去掉只有唯一解的假设，定理不再成立.

事实上，设 $\{\eta_j\}$ 为任意序列，则存在实系数幂级数 $\sum_{k=0}^{\infty}\xi_k z^k$ 使得

$$\sum_{k=0}^{\infty}\xi_k j^k=\eta_j \quad \text{其中} \quad j=1,2,\ldots$$

因此此方程组对任意序列 $\{\eta_i\}$ 都有解；显然此解不唯一，因为存在异于 0 的幂级数使得

$$\sum_{k=0}^{\infty}\xi_k j^k=0 \quad \text{其中} \quad j=1,2,\ldots$$

第四章
赋范空间

第 1 节　赋范向量空间和 (B) 型空间的定义

设 E 为向量空间. 若存在定义在 E 上的一个泛函——称为**范数**，记作 $|x|$ 或 $\|x\|$——满足下列条件:

(1) $|\Theta| = 0$ 且 $|x| > 0$ 对 $x \neq \Theta$,

(2) $|x+y| \leqslant |x| + |y|$,

(3) $|tx| = |t| \cdot |x|$ 对所有数 t.

则称 E 为**赋范向量空间**.

若按公式

$$(x, y) = |x - y|$$

定义 E 中两元素 x 和 y 之间的距离，则显然得到一个度量空间. 若此空间还是完备的（见第 9 页；即在所考虑的情形下，由 $\lim_{p,q\to\infty} |x_p - x_q| = 0$ 可推出存在 $x \in E$ 使得 $\lim_{n\to\infty} |x_n - x| = 0$），则称之为 **(B) 型空间**[1].

易见，每个 (B) 型空间同时也是 (F) 型空间，但反之不然：导言中第 9–12 页描述的空间例子都是 (F) 型空间，但其中只有除空间 (s) 和 (S) 之外的才是 (B) 型空间.

第 2 节　线性算子的性质，线性泛函的延拓

首先讨论赋范空间 E，但不假设其必然完备.

定理 4.1. 设 $U(x)$ 为定义在向量空间 $G \subset E$ 上的加性算子. 为使 $U(x)$ 为线性算子，必须且只需存

[1] 即 Banach 空间.

在数 M 使得:

$$|U(x)| \leqslant M \cdot |x| \quad \text{对所有} \quad x \in G. \tag{1}$$

证明. 1° 条件是必要的. 事实上, 若不存在这样的 M, 则存在序列 $\{x_n\}$ 使得 $|U(x_n)| > M_n|x_n|$, 其中 $\lim_{n\to\infty} M_n = +\infty$. 令 $y_n = \frac{1}{M_n|x_n|} \cdot x_n$, 则 $|y_n| = \frac{1}{M_n}$, 从而 $\lim_{n\to\infty} y_n = \Theta$ 且因此 $\lim_{n\to\infty} U(y_n) = \Theta$, 但这是不可能的，因为 $|U(y_n)| = \frac{1}{M_n|x_n|} \cdot |U(x_n)| > 1$.

2° 条件是充分的. 事实上，对任意 $x_n, x \in G$，由 $\lim_{n\to\infty} x_n = x$ 可得 $\lim_{n\to\infty} |x - x_n| = 0$，因此

$$\lim_{n\to\infty} |U(x_n) - U(x)| = \lim_{n\to\infty} |U(x - x_n)| \leqslant \lim_{n\to\infty} M \cdot |x - x_n| = 0$$

从而 $\lim_{n\to\infty} U(x_n) = U(x)$. 证毕. □

给定定义在向量空间 $G \subset E$ 上的线性算子 $U(x)$，称满足条件 (1) 的最小数 M 为算子 $U(x)$ 在 G 中的**范数**，记作 $|U|_G$. 若 $G = E$，则可简记 $|U|$ 代替 $|U|_E$.

因此，对 $x \in G$ 有 $|U(x)| \leqslant |U|_G \cdot |x|$，且易见

$$|U|_G = \sup_{x\in G, |x|\leqslant 1} |U(x)|.$$

自然产生这样的问题：是否对任意赋范向量空间，都存在定义在其上的非恒为零的线性泛函? 下面定理[1]给出了肯定回答，其中第一个定理是第 27 页第 2 章 §2 定理 1 的简单推论.

定理 4.2. 设 $f(x)$ 为定义在向量空间 $G \subset E$ 上的线性泛函. 则存在定义在 E 上的线性泛函 $F(x)$ 满足:

$$F(x) = f(x) \quad \text{对} \quad x \in G \quad \text{且} \quad |F| = |f|_G.$$

为证明，只需在第 2 章定理 1 中取 $p(x) = |x| \cdot |f|_G$.

定理 4.3. 对每个 $x_0 \in E$，存在定义在 E 上的线性泛函 $F(x)$ 使得

$$F(x_0) = |x_0| \quad \text{且} \quad |F| = 1.$$

为证明，只需在前一定理中取 G 为形如 hx_0 的元素全体（其中 h 为任意数），并令 $F(hx_0) = h \cdot |x_0|$.

特别地，由此可知在任意赋范向量空间中都存在不恒为零的线性泛函.

定理 4.4. 设 $f(x)$ 为定义在集合 $G \subset E$ 上的任意泛函. 为使存在定义在 E 上且满足下列条件的线性泛函 $F(x)$:

1° $f(x) = F(x)$ 对 $x \in G$;

[1]这些是 Hahn-Banach 定理的赋范空间形式.

2° $|F| \leqslant M$ 对给定数 $M > 0$；

必须且只需对任意有限序列 $x_1, x_2, \ldots, x_r \in G$ 和任意有限实数序列 $h_1, h_2, \ldots, h_r$ 都有不等式

$$\left|\sum_{i=1}^{r} h_i f(x_i)\right| \leqslant M \cdot \left|\sum_{i=1}^{r} h_i x_i\right|$$

成立[1].

证明. 条件是必要的. 事实上，由 $|F(\sum_{i=1}^{r} h_i x_i)| \leqslant |F| \cdot |\sum_{i=1}^{r} h_i x_i|$，根据 2° 有 $|\sum_{i=1}^{r} h_i F(x_i)| \leqslant M \cdot |\sum_{i=1}^{r} h_i x_i|$，而根据 1° 对所有 $x_i \in G$ 有 $F(x_i) = f(x_i)$，由此即得所需不等式.

条件是充分的. 设 H 为形如 $z = \sum_{i=1}^{r} h_i x_i$ 的元素构成的向量空间，其中 r 为自然数，h_i 为任意数，$x_i \in G$. 令 $\varphi(z) = \sum_{i=1}^{r} h_i f(x_i)$.

若 $z = \sum_{i=1}^{r} h_i x_i = \sum_{i=1}^{s} h'_i x'_i$，则由假设

$$\left|\sum_{i=1}^{r} h_i f(x_i) - \sum_{i=1}^{s} h'_i f(x'_i)\right| \leqslant M \cdot \left|\sum_{i=1}^{r} h_i x_i - \sum_{i=1}^{s} h'_i x'_i\right| = 0.$$

因此泛函 $\varphi(z)$ 在 H 上单值确定，且易见它是加性的. 此外，由 $|\varphi(z)| = |\sum_{i=1}^{r} h_i f(x_i)| \leqslant M \cdot |\sum_{i=1}^{r} h_i x_i|$ 得 $|\varphi|_H \leqslant M$. 于是由第 55 页的定理 2（以 φ 代 f，以 H 代 G）可得在 E 上存在满足性质 1° 和 2° 的泛函 $F(x)$. 证毕. □

特别地，若 G 是 E 中元素的序列 $\{x_n\}$ 且 C_n 表示泛函 $f(x)$ 的对应值，则有

定理 4.5. 为使在 E 上存在满足条件

1° $F(x_n) = C_n$ 对 $n = 1, 2, \ldots$；

2° $|F| \leqslant M$ 对给定数 $M > 0$；

对给定序列 $\{x_n\} \subset E$ 和给定实数序列 $\{C_n\}$，必须且只需对任意有限实数序列 $h_1, h_2, \ldots, h_r$ 都有不等式

$$\left|\sum_{i=1}^{r} h_i C_i\right| \leqslant M \cdot \left|\sum_{i=1}^{r} h_i x_i\right|$$

成立.

第 3 节　基本集和全元素集

下面建立几个定理，它们在赋范空间理论中的作用类似于 Weierstrass 关于用多项式逼近连续函数的定理在实变函数理论中的作用.

[1] 根据第 18 页的约定，这里隐含要求当 $\sum_{i=1}^{r} h_i x_i = \Theta$ 时必有 $\sum_{i=1}^{r} h_i f(x_i) = 0$.

引理 4.1. 设 $G \subset E$ 为向量空间，$y_0 \in E$ 为与 G 的距离为 $d > 0$ 的元素. 则存在定义在 E 上的线性泛函 $F(x)$ 满足：

(1) $F(y_0) = 1$;

(2) $F(x) = 0$ 对 $x \in G$;

(3) $|F| = \frac{1}{d}$.

证明. 设 H 为形如

$$x = x' + \alpha y_0 \tag{2}$$

的 x 全体，其中 α 为任意数，$x' \in G$.

如此定义的 H 显然是线性集，且因 $d > 0$，x 的表示 (2) 是唯一的. 在 H 上定义加性泛函 $f(x)$，对形如 (2) 的 x 令 $f(x) = \alpha$. 由

$$|x| = |x' + \alpha y_0| = |\alpha| \cdot \left| \frac{1}{\alpha} x' + y_0 \right| \geqslant |\alpha| \cdot d,$$

一方面得 $|f(x)| = |\alpha| \leqslant \frac{1}{d}|x|$，从而 $|f|_H \leqslant \frac{1}{d}$.

另一方面，对 $x_n \in G$ 且 $\lim_{n\to\infty} |x_n - y_0| = d$，有

$$|f(x_n - y_0)| = 1 \leqslant |x_n - y_0| \cdot |f|_H,$$

从而 $1 \leqslant d \cdot |f|_H$，即 $\frac{1}{d} \leqslant |f|_H$.

因此 $|f|_H = \frac{1}{d}$.

于是根据第 55 页的定理 2（以 H 代 G），存在定义在 E 上的线性泛函 $F(x)$ 使得 $F(x) = f(x)$ 对 $x \in H$ 且 $|F| = |f|_H = \frac{1}{d}$（条件 3），特别地，$F(x) = 0$ 对 $x \in G$（条件 2）且 $F(y_0) = 1$（条件 1）. 证毕. □

定理 4.6. 设 $G \subset E$ 为任意集合，$y_0 \in E$ 为任意元素. 为使存在 G 的元素之线性组合[1]序列 $\{g_n\}$ 满足 $\lim_{n\to\infty} g_n = y_0$，必须且只需：对任意线性泛函 $f(x)$，由 $f(x) = 0$ 对所有 $x \in G$ 可推出 $f(y_0) = 0$.

证明. 条件是必要的. 事实上，由 $f(x) = 0$ 对所有 $x \in G$ 可推出 $f(g_n) = 0$ 对 $n = 1, 2, \ldots$，从而 $f(\lim_{n\to\infty} g_n) = f(y_0) = 0$.

条件是充分的，这可由上述引理推出，只需在其中取 G 为 G 的所有元素之线性组合构成的集合. 证毕. □

若 $G \subset E$ 的所有元素之线性组合构成的集合在 E 中稠密，则称 G 为**基本集**；若对任意线性泛函 $f(x)$，由 $f(x) = 0$ 对所有 $x \in G$ 可推出 $f(x) = 0$ 对所有 $x \in E$，则称 G 为**全元素集**（或简称**全集**）.

---

[1]即形如 $\sum_{i=1}^{r} h_i x_i$ 的表达式，其中 $x_i \in G$.

由定理 6 易得

定理 4.7. 为使集合 $G \subset E$ 是基本集，必须且只需它是全元素集.

若 $f(x_0) = 0$，则称线性泛函 $f(x)$ **正交于**元素 x_0；若此等式对所有 $x \in G$ 成立，则称 $f(x)$ **正交于** G.

第 57 页的引理表明，对任意线性闭子集 $G \neq E$，在 E 上存在非恒为零且正交于 G 的线性泛函.

第 4 节　各具体空间 (C), $(L^{(r)})$, (c), $(l^{(r)})$, (m) 中线性泛函的一般形式

下面建立某些具体赋范空间中线性泛函的一般形式[1].

1. 空间 (C). 空间 (M) 中定义的范数[2]对连续函数而言与空间 (C) 中的范数相同，因此可将 (C) 视为 (M) 中的向量空间.

设 $f(x)$ 为定义在 (C) 上的线性泛函. 由第 55 页的定理 2，存在定义在 (M) 上的线性泛函 $F(x)$ 满足：

$$F(x) = f(x) \quad \text{对所有} \quad x \in (C) \tag{1}$$

$$|F|_{(M)} = |f|_{(C)} \tag{2}$$

令

$$\xi_t = \xi_t(u) = \begin{cases} 1 & \text{对} \quad 0 \leqslant u \leqslant t \\ 0 & \text{对} \quad t < u \leqslant 1 \end{cases}$$

且

$$F(\xi_t) = g(t). \tag{3}$$

下面证明 $g(t)$ 是有界变差函数. 设 $a = t_0 < t_1 < \cdots < t_n = b$ 且 $\varepsilon_i = \operatorname{sign}[g(t_i) - g(t_{i-1})]$ 对 $i = 1, 2, \ldots, n$. 有

$$\sum_{i=1}^{n} |g(t_i) - g(t_{i-1})| = \sum_{i=1}^{n} \{g(t_i) - g(t_{i-1})\}\varepsilon_i = F\left[\sum_{i=1}^{n} \{\xi_{t_i} - \xi_{t_{i-1}}\}\varepsilon_i\right]$$

$$\leqslant |F|_{(M)} \cdot \left\| \sum_{i=1}^{n} \{\xi_{t_i} - \xi_{t_{i-1}}\}\varepsilon_i \right\|,$$

[1]这里给出的结果属于 F. Riesz（对空间 (C) 和 $(L^{(r)})$，其中 $r > 1$）、H. Steinhaus（对空间 $(l^{(r)})$，其中 $r \geqslant 1$）和作者本人（对空间 (c) 及 (m) 的可分子空间）.

[2]空间 (M) 的定义见第 11 页.

且易见此和的范数等于 1. 由 (2) 得

$$\operatorname*{variation}_{0\leqslant t\leqslant 1} g(t) \leqslant |F|_{(M)} = |f|_{(C)}. \tag{4}$$

确立了这一点后，设 $x(t) \in (C)$ 且

$$z_n = z_n(u) = \sum_{r=1}^{n} x\left(\frac{r}{n}\right) \cdot \left\{\xi_{\frac{r}{n}}(u) - \xi_{\frac{r-1}{n}}(u)\right\}. \tag{5}$$

函数 $z_n(u)$ 在区间 $\frac{r-1}{n} < u \leqslant \frac{r}{n}$ 上分别取值 $x\left(\frac{r}{n}\right)$. 因 $x = x(u)$ 连续，有 $\lim_{n\to\infty} \|x - z_n\| = 0$，从而由 (1)：

$$\lim_{n\to\infty} F(z_n) = F(x) = f(x). \tag{6}$$

另一方面，由 (3) 和 (5) 得

$$F(z_n) = \sum_{r=1}^{n} x\left(\frac{r}{n}\right) \cdot \left[g\left(\frac{r}{n}\right) - g\left(\frac{r-1}{n}\right)\right],$$

因此，因 $x(t) \in (C)$ 且 $g(t)$ 是有界变差函数，

$$\lim_{n\to\infty} F(z_n) = \int_0^1 x(t)\,\mathrm{d}g,$$

从而由 (6)：

$$f(x) = \int_0^1 x(t)\,\mathrm{d}g \quad \text{对所有} \quad x(t) \in (C). \tag{7}$$

因 $|f(x)| = \left|\int_0^1 x(t)\,\mathrm{d}g\right| \leqslant \operatorname{variation}_{0\leqslant t\leqslant 1} g(t) \cdot \max_{0\leqslant t\leqslant 1} |x(t)|$，由 (4) 并记 $|f| = |f|_{(C)}$ 得：

$$\operatorname*{variation}_{0\leqslant t\leqslant 1} g(t) = |f|.$$

这样便得到定理[1]：

定理. 定义在空间 (C) 上的每个线性泛函形如

$$f(x) = \int_0^1 x(t)\,\mathrm{d}g,$$

其中 $g(t)$ 是不依赖于 $x(t)$ 的、变差为 $|f|$ 的函数.

反之，给定有界变差函数 $g(t)$，由 (7) 定义的泛函 $f(x)$ 显然是线性的.

[1]这是著名的 Riesz 表示定理.

2. 空间 $(L^{(r)})$，其中 $r \geqslant 1$. 设 $f(x)$ 为定义在 $(L^{(r)})$ 上的线性泛函. 令

$$\xi_t = \xi_t(u) = \begin{cases} 1 & \text{对} \quad 0 \leqslant u \leqslant t \\ 0 & \text{对} \quad t < u \leqslant 1 \end{cases}$$

且

$$f(\xi_t) = g(t).$$

下面证明 $g(t)$ 是绝对连续函数.

事实上, 设 $\delta_1, \delta_2, \ldots, \delta_n$ 为互不相交的区间, 其端点分别为 t_i 和 t_i', 其中 $t_i < t_i'$, $i = 1, 2, \ldots, n$. 令 $\varepsilon_i = \mathrm{sign}[g(t_i') - g(t_i)]$，有

$$\sum_{i=1}^{n} |g(t_i') - g(t_i)| = \sum_{i=1}^{n} \{g(t_i') - g(t_i)\}\varepsilon_i \tag{8}$$

$$= f\left(\sum_{i=1}^{n} \{\xi_{t_i'} - \xi_{t_i}\}\varepsilon_i\right) \leqslant |f| \cdot \left\|\sum_{i=1}^{n} \{\xi_{t_i'} - \xi_{t_i}\}\varepsilon_i\right\|.$$

函数 $(\xi_{t_i'} - \xi_{t_i})\varepsilon_i$ 在区间 δ_i 上取值 $\varepsilon_i = \pm 1$ 而在其余地方为零，由假设区间 δ_i 互不相交得

$$\left\|\sum_{i=1}^{n} (\xi_{t_i'} - \xi_{t_i})\varepsilon_i\right\| = \sqrt[r]{\sum_{i=1}^{n} |\delta_i|},$$

其中 $|\delta_i|$ 表示 δ_i 的长度. 因此由 (8)，

$$\sum_{i=1}^{n} |g(t_i') - g(t_i)| \leqslant |f| \sqrt[r]{\sum_{i=1}^{n} |\delta_i|},$$

这证明了 $g(t)$ 的绝对连续性.

确立了这一点后，令 $g'(t) = \alpha(t)$. 函数 $\alpha(t)$ 可积，且因 $\xi_0 = 0$，显然 $f(\xi_t) = \int_0^t \alpha(t)\,\mathrm{d}t$，从而

$$f(\xi_t) = \int_0^1 \xi_t(u)\alpha(u)\,\mathrm{d}u. \tag{9}$$

设 $c_1, c_2, \ldots, c_n$ 为任意数, $0 \leqslant t_0 < t_1 < \cdots < t_n = 1$ 且 $x(t) = c_i$ 对 $t_{i-1} \leqslant t < t_i$, $i = 1, 2, \ldots, n$. 显然 $x(t) = \sum_{i=1}^{n} c_i(\xi_{t_i} - \xi_{t_{i-1}})$，从而由 (9)

$$f(x) = \int_0^1 x(t)\alpha(t)\,\mathrm{d}t. \tag{10}$$

因此等式 (10) 对所有**阶梯函数** $\alpha(t)$ 成立.

若 $x = x(t)$ 为任意可测有界函数，则存在一致有界的阶梯函数序列 $\{x_n(t)\}$ 几乎处处收敛于 $x(t)$. 从而 $\lim_{n\to\infty}\int_0^1 |x_n(t)-x(t)|^r\,\mathrm{d}t = 0$，即 $\lim_{n\to\infty}\|x_n - x\| = 0$，且由 (10)，$f(x) = \lim_{n\to\infty}\int_0^1 x_n(t)\alpha(t)\,\mathrm{d}t = \int_0^1 x(t)\alpha(t)\,\mathrm{d}t$. 因此等式 (10) 对所有可测有界函数 $x(t)$ 成立.

确立了这一点后，先考虑 $r > 1$ 的情形.

令

$$x_n(t) = \begin{cases} |\alpha(t)|^{s-1}\cdot \operatorname{sign}\alpha(t) & \text{对} \quad |\alpha(t)|^{s-1} \leqslant n \\ n\cdot \operatorname{sign}\alpha(t) & \text{对} \quad |\alpha(t)|^{s-1} > n, \end{cases}$$

其中 $\frac{1}{r}+\frac{1}{s}=1$. 有 $|f(x_n)| = \left|\int_0^1 x_n(t)\alpha(t)\,\mathrm{d}t\right| \leqslant |f|\cdot\sqrt[r]{\int_0^1 |x_n(t)|^r\,\mathrm{d}t}$, 且因 $x_n(t)\alpha(t) = |x_n(t)|\cdot|\alpha(t)| \geqslant |x_n(t)|\cdot|x_n(t)|^{\frac{1}{s-1}}$，有

$$\int_0^1 |x_n(t)|^{\frac{s}{s-1}}\,\mathrm{d}t \leqslant |f|\cdot\sqrt[r]{\int_0^1 |x_n(t)|^r\,\mathrm{d}t},$$

从而，注意到 $\frac{s}{s-1} = r$，得 $\left(\int_0^1 |x_n(t)|^r\,\mathrm{d}t\right)^{1-\frac{1}{r}} \leqslant |f|$. 因此不等式对所有自然数 n 成立，且 $|x_n(t)|^r \leqslant |\alpha(t)|^{rs-r} = |\alpha(t)|^s$ 且几乎处处 $\lim_{n\to\infty}|x_n(t)|^r = |\alpha(t)|^s$，得

$$\sqrt[s]{\int_0^1 |\alpha(t)|^s\,\mathrm{d}t} \leqslant |f|, \tag{11}$$

从而 $\alpha(t)$ 是 s 次可积函数. 因此，若 $x(t)$ 为任意 r 次可积的可测函数，则乘积 $x(t)\alpha(t)$ 显然可积.

现在如下定义序列 $\{x_n(t)\}$：

$$x_n = x_n(t) = \begin{cases} x(t) & \text{对} \quad |x(t)| \leqslant n, \\ n\cdot\operatorname{sign}x(t) & \text{对} \quad |x(t)| > n. \end{cases} \tag{12}$$

则有

$$\|x - x_n\| = \sqrt[r]{\int_0^1 |x_n(t)-x(t)|^r\,\mathrm{d}t} \quad \text{且} \quad \lim_{n\to\infty}\|x - x_n\| = 0, \tag{13}$$

从而

$$\begin{aligned} \left|\int_0^1 x(t)\alpha(t)\,\mathrm{d}t - f(x_n)\right| &= \left|\int_0^1 [x(t)-x_n(t)]\alpha(t)\,\mathrm{d}t\right| \\ &\leqslant \sqrt[r]{\int_0^1 |x(t)-x_n(t)|^r\,\mathrm{d}t}\cdot\sqrt[s]{\int_0^1 |\alpha(t)|^s\,\mathrm{d}t}, \end{aligned}$$

因此由 (13)，$f(x)=\lim_{n\to\infty} f(x_n)=\int_0^1 x(t)\alpha(t)\,\mathrm{d}t$，且因

$$|f(x)|=\left|\int_0^1 x(t)\alpha(t)\,\mathrm{d}t\right|\leqslant\sqrt[s]{\int_0^1|\alpha(t)|^s\,\mathrm{d}t}\cdot\|x\|,$$

由 (11) 得等式

$$|f|=\sqrt[s]{\int_0^1|\alpha(t)|^s\,\mathrm{d}t}.$$

这样就证明了定理[1]：

定理. 定义在空间 $(L^{(r)})$ 上（其中 $r>1$）的每个线性泛函 $f(x)$ 形如

$$f(x)=\int_0^1 x(t)\alpha(t)\,\mathrm{d}t,$$

其中

$$\alpha(t)\in(L^{(s)})\quad\text{且}\quad|f|=\sqrt[s]{\int_0^1|\alpha(t)|^s\,\mathrm{d}t}.$$

现在转到 $r=1$ 的情形. 设 $0\leqslant u<u+h\leqslant 1$ 且

$$x(t)=\begin{cases}\frac{1}{h} & \text{对}\quad u\leqslant t\leqslant u+h\\ 0 & \text{对}\quad 0\leqslant t<u\ \text{且} u+h<t\leqslant 1.\end{cases}$$

由 (10)，$|f(x)|=\left|\int_0^1 x(t)\alpha(t)\,\mathrm{d}t\right|=\frac{1}{h}\left|\int_u^{u+h}\alpha(t)\,\mathrm{d}t\right|$，且因 $|f(x)|\leqslant|f|\cdot\|x\|=|f|\cdot 1$，得 $\left|\int_u^{u+h}\alpha(t)\,\mathrm{d}t\right|\leqslant|f|\cdot h$. 函数 $g(u)=\int_0^u\alpha(t)\,\mathrm{d}t$ 满足 Lipschitz 条件，且因几乎处处 $g'(t)=\alpha(t)$，得

$$(14)\quad |\alpha(t)|\leqslant|f|\quad\text{几乎处处}. \tag{14}$$

若现在 $x=x(t)$ 为任意可积函数且序列 $\{x_n(t)\}$ 由公式 (12) 定义，则 $\|x-x_n\|=\int_0^1|x(t)-x_n(t)|\,\mathrm{d}t\to 0$，从而

$$f(x)=\lim_{n\to\infty}f(x_n)=\lim_{n\to\infty}\int_0^1 x_n(t)\alpha(t)\,\mathrm{d}t=\int_0^1 x(t)\alpha(t)\,\mathrm{d}t,$$

因 $|x_n(t)\alpha(t)|\leqslant|x(t)\alpha(t)|$. 而由

$$\left|\int_0^1 x(t)\alpha(t)\,\mathrm{d}t\right|\leqslant\int_0^1|x(t)|\,\mathrm{d}t\cdot\max_{0\leqslant t\leqslant 1}|\alpha(t)|,$$

[1]这是 Riesz 表示定理在 L^p 空间的形式.

由 (14) 得等式

$$|f| = \operatorname{vrai}\max_{0 \leqslant t \leqslant 1} |\alpha(t)|.$$

这样就证明了定理[1]：

定理. 定义在空间 (L) 上的每个线性泛函 $f(x)$ 形如

$$f(x) = \int_0^1 x(t)\alpha(t)\,\mathrm{d}t,$$

其中 $\alpha(t)$ 是几乎处处有界的函数，且 $|f| = \operatorname{vrai}\max_{0 \leqslant t \leqslant 1} |\alpha(t)|$.

3. 空间 (c). 令

$$\xi_i^n = \begin{cases} 1 & \text{对} \quad n = i \\ 0 & \text{对} \quad n \neq i, \end{cases} \tag{15}$$

$$x_n = \{\xi_i^n\} \quad \text{且} \quad x' = \{\xi_i^1\}.$$

设 $f(x)$（其中 $x = \{\xi_n\} \in (c)$）为线性泛函. 令

$$f(x_n) = C_n \quad \text{且} \quad f(x') = C'. \tag{16}$$

令 $\alpha = \lim_{n\to\infty} \xi_n$，则有

$$\left\| x - \alpha x' - \sum_{n=1}^{r} (\xi_n - \alpha) x_n \right\| = \sup_{n>r} |\xi_n - \alpha|,$$

从而 $x = \alpha x' + \lim_{r\to\infty} \sum_{n=1}^{r} (\xi_n - \alpha) x_n$，因此 $x = \alpha x' + \sum_{n=1}^{\infty} (\xi_n - \alpha) x_n$. 于是

$$f(x) = \alpha \cdot f(x') + \sum_{n=1}^{\infty} (\xi_n - \alpha) \cdot f(x_n),$$

由 (16) 得

$$f(x) = \alpha C' + \sum_{n=1}^{\infty} (\xi_n - \alpha) \cdot C_n. \tag{17}$$

若 $x = \{\xi_n\}$ 为如下序列：

$$\xi_n = \begin{cases} \operatorname{sign} C_n & \text{对} \quad n \leqslant r, \\ 0 & \text{对} \quad n > r, \end{cases}$$

[1] 这是 L^1 空间上的 Riesz 表示定理.

则 $\|x\| = 1$，$\alpha = \lim_{n\to\infty} \xi_n = 0$ 且 $f(x) = \sum_{n=1}^{r} |C_n|$，而由 $|f(x)| \leqslant |f| \cdot \|x\|$ 得 $\sum_{n=1}^{r} |C_n| \leqslant |f|$. 因 r 任意，级数 $\sum_{n=1}^{\infty} |C_n|$ 收敛. 令

$$C' - \sum_{n=1}^{\infty} C_n = C,$$

则一般地由 (17) 得

$$f(x) = \alpha C + \sum_{n=1}^{\infty} C_n \xi_n \quad \text{其中} \quad \alpha = \lim_{n\to\infty} \xi_n. \tag{18}$$

现在令

$$\xi_n = \begin{cases} \operatorname{sign} C_n & \text{对} \quad n \leqslant r \\ \operatorname{sign} C & \text{对} \quad n > r. \end{cases}$$

则 $\|x\| = 1$，$\alpha = \lim_{n\to\infty} \xi_n = \operatorname{sign} C$ 且

$$f(x) = |C| + \sum_{n=1}^{r} |C_n| + \sum_{n=r+1}^{\infty} C_n \cdot \operatorname{sign} C \leqslant |f|,$$

且此不等式对所有自然数 r 成立，得 $|C| + \sum_{n=1}^{\infty} |C_n| \leqslant |f|$. 另一方面，由 $f(x) \leqslant [|C| + \sum_{n=1}^{\infty} |C_n|] \cdot |x|$，得等式

$$|C| + \sum_{n=1}^{\infty} |C_n| = |f|. \tag{19}$$

由公式 (18) 和 (19)，得下述定理:

定理. 定义在空间 (c) 上的每个线性泛函 $f(x)$（其中 $x = \{\xi_n\}$）形如

$$f(x) = C \lim_{n\to\infty} \xi_n + \sum_{n=1}^{\infty} C_n \xi_n,$$

且

$$|C| + \sum_{n=1}^{\infty} |C_n| = |f|.$$

4. 空间 $(l^{(r)})$，其中 $r \geqslant 1$. 设如前 $x_n = \{\xi_i^n\}$，其中 ξ_i^n 由公式 (15) 定义. 则对任意 $x = \{\xi_i\} \in (l^{(r)})$ 有

$$\left\| x - \sum_{i=1}^{n} \xi_i x_i \right\| = \sqrt[r]{\sum_{i=n+1}^{\infty} |\xi_i|^r} \to 0,$$

从而

$$x = \sum_{i=1}^{\infty} \xi_i x_i. \tag{20}$$

设 $f(x)$ 为定义在 $(l^{(r)})$ 上的线性泛函. 令 $f(x_i)=C_i$，由 (20) 得

$$f(x)=\sum_{i=1}^{\infty}\xi_i C_i. \tag{21}$$

先考虑 $r=1$ 的情形.

令 $\xi_n=\operatorname{sign}C_n$ 且对 $i\neq n$ 有 $\xi_i=0$. 则 $f(x)=|C_n|\leqslant|f|$. 另一方面, 对任意序列 $x=\{\xi_i\}\in(l)$ 有不等式 $|f(x)|\leqslant(\sum_{i=1}^{\infty}|\xi_i|)\sup_{1\leqslant i<\infty}|C_i|$，从而 $|f|=\sup_{1\leqslant i<\infty}|C_i|$.

因此证明了定理:

定理. 定义在空间 (l) 上的每个线性泛函 $f(x)$（其中 $x=\{\xi_i\}$）形如

$$f(x)=\sum_{i=1}^{\infty}C_i\xi_i,$$

其中 $|f|=\sup_{1\leqslant i<\infty}|C_i|$.

转到 $r>1$ 的情形. 设 $x^0=\{\xi_i^0\}$，其中

$$\xi_i^0=\begin{cases}|C_i|^{s-1}\cdot\operatorname{sign}C_i & 对\quad i\leqslant n,\\ 0 & 对\quad i>n\end{cases}$$

且 $\frac{1}{r}+\frac{1}{s}=1$. 则

$$\|x^0\|=\sqrt[r]{\sum_{i=1}^{n}|C_i|^{rs-r}}=\sqrt[r]{\sum_{i=1}^{n}|C_i|^{s}},$$

从而由 (21)，$f(x^0)=\sum_{i=1}^{n}|C_i|^s\leqslant|f|\cdot\sqrt[r]{\sum_{i=1}^{n}|C_i|^s}$，因此

$$\sqrt[s]{\sum_{i=1}^{n}|C_i|^s}\leqslant|f|.$$

因 n 任意，$\sqrt[s]{\sum_{i=1}^{\infty}|C_i|^s}\leqslant|f|$. 另一方面，对任意序列 $x=\{\xi_i\}\in(l^{(r)})$ 有 $f(x)=|\sum_{i=1}^{\infty}\xi_iC_i|\leqslant\sqrt[r]{\sum_{i=1}^{\infty}|\xi_i|^r}\cdot\sqrt[s]{\sum_{i=1}^{\infty}|C_i|^s}$，从而最终得等式

$$|f|=\sqrt[s]{\sum_{i=1}^{\infty}|C_i|^s}.$$

这样就证明了定理:

定理. 定义在空间 $(l^{(r)})$ 上（其中 $r>1$）的每个线性泛函 $f(x)$ 形如

$$f(x)=\sum_{i=1}^{\infty}C_i\xi_i \quad \text{其中} \quad x=\{\xi_i\},$$

且 $|f|=\sqrt[s]{\sum_{i=1}^{\infty}|C_i|^s}$，其中 $\frac{1}{r}+\frac{1}{s}=1$.

5. 空间 (m) 及其可分子空间. 设 E 为 (m) 中的可分子空间；E 的元素因此是有界数列. 在 E 中采用与 (m) 中相同的范数，即

$$|x|=\sup_{1\leqslant i<\infty}|\xi_i| \quad \text{其中} \quad x=\{\xi_i\}\subset E.$$

设 $\{x_n\}$（其中 $x_n=\{\xi_i^n\}$）为 E 中构成 E 的可数稠密集的元素序列. 先考虑 x_1 和 x_2. 下面证明：对任意 $\varepsilon_2>0$，存在自然数 k_2 使得对任意实数对 λ_1,λ_2 有

$$|\lambda_1x_1+\lambda_2x_2|\leqslant\max_{1\leqslant i\leqslant k_2}|\lambda_1\xi_i^1+\lambda_2\xi_i^2|\cdot(1+\varepsilon_2). \tag{22}$$

事实上，若数 ξ_i^1 和 ξ_i^2 成比例，则此情形平凡，故排除之，假设对每个自然数 k 都存在一对数 λ_1^k,λ_2^k 使得

$$|\lambda_1^kx_1+\lambda_2^kx_2|>\max_{1\leqslant i\leqslant k}|\lambda_1^k\xi_i^1+\lambda_2^k\xi_i^2|\cdot(1+\varepsilon_2).$$

以 m_k 记 $|\lambda_1^k|$ 和 $|\lambda_2^k|$ 中较大者，并令 $l_1^k=\frac{\lambda_1^k}{m_k}$，$l_2^k=\frac{\lambda_2^k}{m_k}$，则有

$$|l_1^kx_1+l_2^kx_2|>\max_{1\leqslant i\leqslant k}|l_1^k\xi_i^1+l_2^k\xi_i^2|\cdot(1+\varepsilon_2). \tag{23}$$

因对所有自然数 k 有 $1\leqslant|l_1^k|+|l_2^k|\leqslant 2$，可从序列 $\{l_1^k\}$ 和 $\{l_2^k\}$ 中抽取收敛子列. 因此存在序列 $\{k_j\}$ 使得 $\{l_1^{k_j}\}$ 和 $\{l_2^{k_j}\}$ 分别收敛于某数 l_1 和 l_2，其中 $1\leqslant|l_1|+|l_2|\leqslant 2$. 因 $\lim_{j\to\infty}k_j=+\infty$ 且 $\lim_{j\to\infty}|(l_1x_1+l_2x_2)-(l_1^{k_j}x_1+l_2^{k_j}x_2)|=0$，由 (23) 得

$$|l_1x_1+l_2x_2|\geqslant\max_{1\leqslant i<\infty}|l_1\xi_i^1+l_2\xi_i^2|\cdot(1+\varepsilon_2),$$

这是不可能的，因由定义 $|l_1x_1+l_2x_2|=\sup_{1\leqslant i<\infty}|l_1\xi_i^1+l_2\xi_i^2|$.

如此证明了满足 (22) 的自然数 k_2 的存在性，由此用归纳法易证：给定任意正数序列 $\{\varepsilon_n\}$，对每个 $n>1$ 存在自然数 k_n 使得对任意有限实数序列 $\lambda_1,\lambda_2,\ldots,\lambda_n$ 有

$$|\lambda_1x_1+\lambda_2x_2+\cdots+\lambda_nx_n|\leqslant\max_{1\leqslant i\leqslant k_n}|\lambda_1\xi_i^1+\lambda_2\xi_i^2+\cdots+\lambda_n\xi_i^n|\cdot(1+\varepsilon_n). \tag{24}$$

确立了这一点后，对每个给定自然数 n，以 x_i'（其中 $i=1,2,\ldots,n$）记序列

$$\xi_1^i,\xi_2^i,\ldots,\xi_{k_n}^i,0,0,0,\ldots; \tag{25}$$

则由 (24)，对任意 $\lambda_1,\lambda_2,\ldots,\lambda_n$ 有

$$|\lambda_1x_1+\lambda_2x_2+\cdots+\lambda_nx_n|\leqslant|\lambda_1x_1'+\lambda_2x_2'+\cdots+\lambda_nx_n'|\cdot(1+\varepsilon_n). \tag{26}$$

现设 $f(x)$ 为定义在 E 上的线性泛函. 则

$$|f(\lambda_1x_1+\lambda_2x_2+\cdots+\lambda_nx_n)|\leqslant|f|\cdot|\lambda_1x_1+\lambda_2x_2+\cdots+\lambda_nx_n|,$$

从而由 (26)，

$$|\lambda_1f(x_1)+\lambda_2f(x_2)+\cdots+\lambda_nf(x_n)|\leqslant|f|\cdot(1+\varepsilon_n)\cdot|\lambda_1x_1'+\lambda_2x_2'+\cdots+\lambda_nx_n'|.$$

因由 x_i' 的定义（见 (25)）有 $x_i'\in(c)$，由第 57 页的定理 5，存在定义在 (c) 上的线性泛函 $f_n(x)$ 满足：

$$f_n(x_i')=f(x_i)\quad 对所有\quad i=1,2,\ldots,n\quad 且\quad |f_n|\leqslant|f|\cdot(1+\varepsilon_n).$$

考虑到第 66 页建立的空间 (c) 上线性泛函的一般形式，且由 (25) 序列 x_i'（$i=1,2,\ldots,n$）的下标大于 k_n 的项均为零，可知存在有限数列 $a_{n1},a_{n2},\ldots,a_{nk_n}$ 满足：

$$\sum_{j=1}^{k_n}a_{nj}\xi_j^i=f_n(x_i')=f(x_i)\quad 对\quad i=1,2,\ldots,n$$

且

$$\sum_{j=1}^{k_n}|a_{nj}|=|f_n|\leqslant|f|\cdot(1+\varepsilon_n),$$

从而，令

$$\alpha_{nj}=\begin{cases}\frac{a_{nj}}{1+\varepsilon_n} & 对\quad j\leqslant k_n\\ 0 & 对\quad j>k_n,\end{cases} \tag{27}$$

得

$$\sum_{j=1}^{\infty}\alpha_{nj}\xi_j^i=\frac{1}{1+\varepsilon_n}f(x_i)\quad 对\quad i=1,2,\ldots,n \tag{28}$$

且

$$\sum_{j=1}^{\infty}|\alpha_{nj}|\leqslant|f|. \tag{29}$$

假设序列 $\{\varepsilon_n\}$ 的选择使得 $\lim_{n\to\infty}\varepsilon_n=0$. 由 (28) 得 $\lim_{n\to\infty}\sum_{j=1}^{\infty}\alpha_{nj}\xi_j^i=f(x_i)$ 对 $i=1,2,\ldots$, 且下面证明，不改变无穷双序列 $\{\alpha_{nj}\}$，这一形式可从 x_i 推广到所有 $x\in E$.

为此令 $x=\{\xi_i\}$. 因开头定义的形如 $x_n=\{\xi_i^n\}$ 的元素序列在 E 中稠密，对每个 $\varepsilon>0$ 存在 $x_i=\{\xi_j^i\}$ 使得 $|x-x_i|<\varepsilon$，从而

$$\left|\sum_{j=1}^{\infty}\alpha_{nj}\xi_j-f(x)\right|\leqslant\left|\sum_{j=1}^{\infty}\alpha_{nj}(\xi_j-\xi_j^i)\right|+\left|\sum_{j=1}^{\infty}\alpha_{nj}\xi_j^i-f(x_i)\right|+|f(x_i)-f(x)|$$

且因 $\left|\sum_{j=1}^{\infty}\alpha_{nj}(\xi_j-\xi_j^i)\right|\leqslant\left(\sum_{j=1}^{\infty}|\alpha_{nj}|\right)\cdot|x-x_i|\leqslant|f|\cdot\varepsilon$，对充分大的 n 有

$$\left|\sum_{j=1}^{\infty}\alpha_{nj}\xi_j-f(x)\right|\leqslant|f|\cdot\varepsilon+\varepsilon+|f|\cdot\varepsilon=(2|f|+1)\cdot\varepsilon,$$

从而推广形式为

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{j=1}^{\infty}\alpha_{nj}\xi_j=f(x)\quad 对所有\quad x=\{\xi_j\}\subset E. \tag{30}$$

最后，下面证明

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{j=1}^{\infty}|\alpha_{nj}|=|f|. \tag{31}$$

事实上，若令

$$M=\lim_{n\to\infty}\sum_{j=1}^{\infty}|\alpha_{nj}|, \tag{32}$$

则由 (30)，对所有 $x\in E$ 有 $|f(x)|\leqslant M\cdot\sup_j|\xi_j|=M\cdot|x|$，从而，因 $|f|$ 是满足对所有 $x\in E$ 有 $|f(x)|\leqslant|f|\cdot|x|$ 的最小数，得 $|f|\leqslant M$，由 (32) 和 (29) 得等式 (31).

综合公式 (27)、(29)、(30) 和 (31)：下述定理成立[1]：

定理. 定义在空间 (m) 的可分子空间 E 上的每个线性泛函 $f(x)$ 形如

$$f(x)=\lim_{n\to\infty}\sum_{j=1}^{\infty}\alpha_{nj}\xi_j,$$

其中 $x=\{\xi_j\}$ 且 $\{\alpha_{nj}\}$ 为满足下列条件的实数表：

[1]这是 Banach 对 (m) 空间可分子空间上线性泛函的刻画.

1° $\alpha_{nj}=0$ 对 $j>k_n$，其中 $\{k_n\}$ 为自然数序列；

2° $\sum_{j=1}^{\infty}|\alpha_{nj}|\leqslant|f|$ 对 $n=1,2,\dots$；

3° $\lim_{n\to\infty}\sum_{j=1}^{\infty}|\alpha_{nj}|=|f|$.

第 5 节　闭序列和完全序列

下面将前述结果应用于与刚讨论的具体空间的性质相关的若干概念和问题.

函数序列 $\{x_n(t)\}$（其中 $x_n(t)\in(C)$，$0\leqslant t\leqslant1$）称为在 (C) 中**闭**，若对任意函数 $x(t)\in(C)$，存在线性组合序列 $\left\{\sum_{i=1}^{k_n}\alpha_i^{(n)}x_i(t)\right\}$ 一致收敛于 $x(t)$.

序列 $\{x_n(t)\}$ 称为在 (C) 中**完全**，若对有界变差函数 $g(t)$，由 $\int_0^1 x_n(t)\,\mathrm{d}g=0$ 对所有 $n=1,2,\dots$ 可推出 $g(0)=g(t)=g(1)$ 最多除去 t 的一个可数集.

函数序列 $\{x_n(t)\}$（其中 $x_n(t)\in(L^{(r)})$，$0\leqslant t\leqslant1$）称为在 $(L^{(r)})$ 中**闭**，若对任意函数 $x(t)\in(L^{(r)})$，存在形如 $g_n(t)=\sum_{i=1}^{k_n}\alpha_i^{(n)}x_i(t)$ 的函数序列平均 r 次收敛于 $x(t)$，即满足 $\lim_{n\to\infty}\int_0^1|x(t)-g_n(t)|^r\,\mathrm{d}t=0$.

序列 $\{x_n(t)\}$ 称为在 $(L^{(r)})$ 中**完全**，若对任意可测有界函数（当 $r=1$ 时）或属于 $(L^{(s)})$（其中 $\frac{1}{r}+\frac{1}{s}=1$，当 $r>1$ 时）的函数 $g(t)$，由 $\int_0^1 x_n(t)g(t)\,\mathrm{d}t=0$ 对 $n=1,2,\dots$ 可推出几乎处处 $g(t)=0$.

这两个概念出现在正交级数理论中.

易见，函数序列在 (C) 中（分别在 $(L^{(r)})$ 中）闭的充要条件是它为**基本集**（按本章第 58 页定义的意义）. 同样，它为**完全**的充要条件是它为**全集**（按同页定义的意义）. 事实上，只需回顾第 61 页（分别第 64–65 页）建立的 (C)（分别 $(L^{(r)})$）上线性泛函的一般形式.

最后，第 58 页的定理 7 立即蕴含：函数序列在 (C) 中（分别在 $(L^{(r)})$ 中）完全的充要条件是它在此空间中闭.

用类似方法，可对空间 (c) 和 $(l^{(r)})$ 建立闭序列和完全序列的概念.

第 6 节　函数的线性组合逼近

第 58 页的定理 6 也可在各种具体赋范空间中解释. 下面举两例：

1. 空间 (C). 为使由序列 $\{x_n(t)\}$（其中 $x_n(t)\in(C)$，$0\leqslant t\leqslant1$）的项构成的多项式能一致逼近给定函数 $x(t)\in(C)$，必须且只需：对有界变差函数 $g(t)$，由 $\int_0^1 x_n(t)\,\mathrm{d}g=0$ 对 $n=1,2,\dots$ 可推出

$$\int_0^1 x(t)\,\mathrm{d}g=0.$$

2. 空间 $(L^{(r)})$. 为使由序列 $\{x_n(t)\}$（其中 $x_n(t)\in(L^{(r)})$，$0\leqslant t\leqslant1$）的项构成的线性组合能平均 r 次逼近给定函数 $x(t)\in(L^{(r)})$，必须且只需：对函数 $g(t)$（当 $r=1$ 时为任意可测有界函数，当 $r>1$ 时属于 $(L^{(s)})$，其中 $\frac{1}{r}+\frac{1}{s}=1$），由 $\int_0^1 g(t)x_n(t)\,\mathrm{d}t=0$ 对 $n=1,2,\dots$ 可推出 $\int_0^1 g(t)x(t)\,\mathrm{d}t=0$.

第 7 节 矩问题

现在转到第 57 页定理 5 的应用.

所谓**矩问题**，是指建立函数 f 满足无穷方程组

$$\int_a^b f\varphi_i \,\mathrm{d}t = c_i \quad 其中 \quad i = 1, 2, \ldots \tag{33}$$

的存在条件的问题，其中函数序列 $\{\varphi_i\}$ 和数序列 $\{c_i\}$ 预先给定.

这里在两个具体赋范空间情形给出此问题的解：通过适当解释第 57 页的定理 5 在这些空间中得到.

I. 空间 (C). 设 $x_i = x_i(t)$（$0 \leqslant t \leqslant 1$）为连续函数. 因 (C) 上的每个线性泛函 $f(x)$ 形如（见第 61 页）$f(x) = \int_0^1 x(t)\,\mathrm{d}g$，其中 variation $g(t) = |f|$，由第 57 页的定理 5 得定理[1]：

为使存在满足

$$\operatorname*{variation}_{0\leqslant t\leqslant 1} g(t) \leqslant M$$

且满足方程

$$\int_0^1 x_i(t)\,\mathrm{d}g = c_i \quad 对 \quad i = 1, 2, \ldots,$$

的函数 $g(t)$，必须且只需对任意有限实数序列 $h_1, h_2, \ldots, h_r$ 有

$$\left|\sum_{i=1}^r h_i c_i\right| \leqslant M \cdot \max_{0\leqslant t\leqslant 1}\left|\sum_{i=1}^r h_i x_i(t)\right|.$$

II. 空间 $(L^{(r)})$. 对 $r > 1$，用类似方法可得定理[2]：

为使存在满足

$$\int_0^1 |\alpha(t)|^s \,\mathrm{d}t \leqslant M^s \quad 其中 \quad \frac{1}{r} + \frac{1}{s} = 1$$

且满足方程

$$\int_0^1 x_i(t)\alpha(t)\,\mathrm{d}t = c_i \quad 其中 \quad x_i(t) \in (L^{(r)}) \text{ 且} i = 1, 2, \ldots,$$

的函数 $\alpha(t)$（$0 \leqslant t \leqslant 1$），必须且只需对任意有限实数序列 $h_1, h_2, \ldots, h_k$ 有

$$\left|\sum_{i=1}^k h_i c_i\right| \leqslant M \cdot \sqrt[r]{\int_0^1 \left|\sum_{i=1}^k h_i x_i(t)\right|^r \mathrm{d}t}.$$

[1]这是 Hausdorff 矩问题的解.

[2]这是 Riesz 对矩问题的解.

对 $r=1$，函数 $x_i(t)$ 可积且所求函数 $\alpha(t)$ 有界且满足

$$\operatorname*{vrai\,max}_{0\leqslant t\leqslant 1}|\alpha(t)|\leqslant M.$$

此时的充要条件如下：

$$\left|\sum_{i=1}^{k}h_ic_i\right|\leqslant M\cdot\int_0^1\left|\sum_{i=1}^{k}h_ix_i(t)\right|\mathrm{d}t.$$

第 8 节 无穷方程组解的存在性条件

现在考虑另一问题.

给定矩阵 $\{a_{ik}\}$ 和数列 $\{c_i\}$，下面建立数列 $\{z_i\}$ 满足无穷方程组

$$\sum_{k=1}^{\infty}a_{ik}z_k=c_i\quad 其中\quad i=1,2,\ldots \tag{34}$$

的存在条件.

这里也借助第 57 页的定理 5，在两个具体空间情形给出此问题的解：

III. 空间 (c). 设 $x_i=\{a_{ik}\}$ 且

$$\lim_{k\to\infty}a_{ik}=0\quad 对\quad i=1,2,\ldots \tag{35}$$

因空间 (c) 上的每个线性泛函形如 $f(x)=C\lim_{i\to\infty}\xi_i+\sum_{i=1}^{\infty}C_i\xi_i$，其中 $x=\{\xi_i\}$ 且 $|f|=|C|+\sum_{i=1}^{\infty}|C_i|$（见第 66 页），由 (35) 和第 57 页的定理 5 得如下结论：

为使存在满足方程组 (34) 且满足条件 $\sum_{k=1}^{\infty}|z_k|\leqslant M$ 的数列 $\{z_k\}$，必须且只需对任意有限实数序列 $h_1,h_2,\ldots,h_r$ 有不等式

$$\left|\sum_{i=1}^{r}h_ic_i\right|\leqslant M\cdot\sup_{1\leqslant k<\infty}\left|\sum_{i=1}^{r}h_ia_{ik}\right|.$$

IV. 空间 (l). 设 $x_i=\{a_{ik}\}$ 且 $\sum_{k=1}^{\infty}|a_{ik}|<\infty$ 对 $i=1,2,\ldots$. 因空间 (l) 上的每个线性泛函形如 $f(x)=\sum_{i=1}^{\infty}z_i\xi_i$，其中 $x=\{\xi_i\}$ 且 $|f|=\sup_{1\leqslant i<\infty}|z_i|$（见第 67 页），第 57 页的定理 5 立即给出如下结论：

为使存在满足方程组 (34) 且满足条件 $\sup_k|z_k|\leqslant M$ 的有界数列 $\{z_k\}$，必须且只需对任意有限实数序列 $h_1,h_2,\ldots,h_r$ 有等式

$$\left|\sum_{i=1}^{r}h_ic_i\right|\leqslant M\cdot\sum_{k=1}^{\infty}\left|\sum_{i=1}^{r}h_ia_{ik}\right|.$$

第五章
(B) 型空间

第 1 节　(B) 型空间中的线性算子

下面建立关于 (B) 型空间 E[1]的一些一般定理. 这些空间不仅具有范数，而且是完备的，这一性质起着本质性的作用.

定理 5.1. $F(x)$ 为 **Borel 可测算子**，$U(x)$ 为**加性算子**，二者均定义在 E 上，且对所有 $x \in E$ 满足 $|F(x)| \geqslant |U(x)|$，则 $U(x)$ 是**线性算子**.

证明. 根据引言第 17 页的定理 4，存在 E 的一个**第一纲的**子集 H，使得 $F(x)$ 在 $E - H$ 上连续. 因此，对 $x_0 \in E - H$，存在 $r > 0$ 和 $M > 0$ 使得

$$|x - x_0| \leqslant r \text{ 蕴含} |U(x)| \leqslant |F(x)| \leqslant M \quad \text{对所有} x \in E - H \text{ 成立}. \tag{1}$$

满足 $|x - x_0| \leqslant \dfrac{r}{2}$ 的点 $x \in E - H$ 构成的集合是**第二纲的**，因此形如 $x' + x$ 的所有点构成的集合 G 亦然，其中 $|x'| < \dfrac{r}{2}$，$x \in E - H$ 且 $|x - x_0| \leqslant \dfrac{r}{2}$. 故在 G 中存在元素 $x' + x_1 \in E - H$，其中 $x_1 \in E - H$. 由于 $|x_1 - x_0| \leqslant \dfrac{r}{2}$，有

$$|x' + x_1 - x_0| \leqslant r,$$

从而由 (1) 得

$$|U(x')| \leqslant |U(x' + x_1)| + |U(x_1)| \leqslant 2M.$$

因此 $U(x)$ 的范数在球 $|x| \leqslant \dfrac{r}{2}$ 上有界，进而在任何球上都有界. 由第四章 §2 第 54 页的定理 1，

[1]原文此处有误，应为脚注编号.

$U(x)$ 连续. □

定理 5.2. 若对加性算子 $U(x)$，由 $\lim_{n\to\infty} x_n = x$ 可推出 $\lim_{n\to\infty} |U(x_n)| \geqslant |U(x)|$ 对所有 $x \in E$ 成立，则 $U(x)$ 是线性算子[1].

证明. 对每个 $n = 1, 2, \ldots$，满足 $|U(x)| \leqslant n$ 的所有 $x \in E$ 构成的集合 G_n 是闭集. 由于 $E = \sum_{n=1}^{\infty} G_n$，至少有一个 G_n 包含一个球，在该球中 $U(x)$ 的范数有界，从而如定理 1 所述，$U(x)$ 连续. □

定理 5.3. 设定义在空间 E 上的线性算子列 $\{U_n(x)\}$ 在一个集合 G 上收敛，G 在某球 K 中稠密，且范数列 $\{|U_n|\}$ 有界，则算子列 $\{U_n(x)\}$ 在整个空间 E 上收敛[2].

证明. 给定 $x_0 \in K$，由假设存在序列 $\{x_n\}$ 使得 $x_n \in G$（$n = 1, 2, \ldots$）且 $\lim_{n\to\infty} x_n = x_0$.

现对任意三个自然数 n、p 和 q，有

$$|U_p(x_0) - U_q(x_0)| \leqslant |U_p(x_0 - x_n)| + |U_q(x_n - x_0)| + |U_p(x_n) - U_q(x_n)|,$$

从而

$$\varlimsup_{\substack{p\to\infty \\ q\to\infty}} |U_p(x_0) - U_q(x_0)| \leqslant 2M|x_0 - x_n|，\text{其中} M = \varlimsup_{n\to\infty} |U_n|,$$

由此，由于 $\lim_{n\to\infty} |x_0 - x_n| = 0$，得

$$\lim_{\substack{p\to\infty \\ q\to\infty}} |U_p(x_0) - U_q(x_0)| = 0,$$

这意味着序列 $U_n(x_0)$ 收敛.

给定任意元素 $x \in E$，特别地，以 x_0' 表示球 K 的中心，则存在 $\varepsilon > 0$ 使得 $x_0' + \varepsilon x \in K$，因此序列 $U_n(x_0' + \varepsilon x)$ 收敛. 由 $U_n(x_0')$ 和 $U_n(x_0' + \varepsilon x)$ 的收敛性即得 $U_n(x)$ 的收敛性. □

定理 5.4. 给定定义在 E 上的线性算子列 $\{U_n(x)\}$，满足

$$\varlimsup_{n\to\infty} |U_n(x)| < \infty$$

的所有 $x \in E$ 构成的集合 H 要么是第一纲的，要么等于 E[3].

该证明由第三章 §1 第 36 页的定理 1 得出，因为 H 是线性 **Borel 可测集**.

[1]参看 S. Mazur 和 W. Orlicz 的论文，Sur la théorie de la mesure dans les espaces linéaires et sur les fonctionnelles linéaires, *C. R. Acad. Sci. Paris* **195** (1932), p. 1309.

[2]当 $U_n(x)$ 为线性泛函时，该定理见 H. Hahn，Über Folgen linearer Operationen, *Monatshefte f. Math. u. Phys.* **32** (1922), p. 1–88.

[3]对线性泛函，该定理见 S. Banach 和 H. Steinhaus 的论文，Sur le principe de condensation des singularités, *Fundamenta Math.* **9** (1927), p. 50.

定理 5.5. 给定定义在 E 上的线性算子列 $\{U_n(x)\}$，若对所有 $x \in E$ 都有

$$\varlimsup_{n\to\infty} |U_n(x)| < \infty,$$

则范数列 $\{|U_n|\}$ 有界[1].

证明. 根据引言第 19 页的定理 11，存在球 $K \subset E$ 和数 N，使得对所有 $x \in K$ 和 $n = 1, 2, \ldots$ 都有 $|U_n(x)| \leqslant N$. 以 r 表示球 K 的半径，由此易得对所有 $n = 1, 2, \ldots$ 有 $|U_n| \leqslant \dfrac{2N}{r}$. □

定理 5.6. 设 $\{x_n\}$ 为 E 中的元素列，使得对所有定义在 E 上的线性泛函 $f(x)$ 都有

$$\lim_{n\to\infty} |f(x)| < \infty,$$

则范数列 $\{|x_n|\}$ 有界.

证明. 定义在 E 上的所有线性泛函构成的集合 $\overline{E}$，若保持对这些泛函所采用的范数定义，则构成一个 (B) 型空间. 在 $\overline{E}$ 中定义泛函列 $\{F_n\}$，令

$$F_n(f) = f(x_n) \quad 对所有 f \in \overline{E}.$$

假设 $\lim\limits_{n\to\infty} |f(x_n)| < \infty$ 蕴含对所有 $f \in \overline{E}$ 都有 $\lim\limits_{n\to\infty} |F_n(f)| < \infty$. 由前述定理 5，存在数 N 使得对所有 $n = 1, 2, \ldots$ 有 $|F_n(f)| \leqslant N \cdot |f|$. 另一方面，由于 $x_n \in E$，根据第四章 §2 第 55 页的定理 3，对每个 $n = 1, 2, \ldots$，存在定义在 E 上的线性泛函 $f_n(x)$ 使得 $|f_n(x_n)| = |x_n|$ 且 $|f_n| = 1$. 因此

$$|x_n| = |f_n(x_n)| = |F_n(f_n)| \leqslant N \cdot |f_n| = N$$

对任意 n 成立，证毕. □

第 2 节　奇点凝聚原理

定理 5.7. 给定定义在 E 上的线性算子**双重序列** $\{U_{pq}(x)\}$，满足

$$\varlimsup_{q\to\infty} |U_{pq}| = \infty \quad 对所有 p = 1, 2, \ldots \tag{2}$$

则存在 E 的子集 $G \subset E$（与 p 无关），它是 E 中第二纲的，且对所有 $x \in G$ 有

$$\lim_{q\to\infty} |U_{pq}(x)| = \infty \quad 对所有 p = 1, 2, \ldots ^2. \tag{3}$$

[1]对线性泛函，该定理见 H. Steinhaus，Quelques remarques sur la généralisation de la notion de limite, *Prace matematyczno-fizyczne* **22** (1911), p. 121–134.

[2]该定理是奇点凝聚原理的算子形式表述.

证明. 满足 $\overline{\lim\limits_{q\to\infty}}|U_{pq}(x)|<\infty$ 的所有元素 $x\in E$ 构成的集合 H_p 不可能与 E 重合，因为由第 80 页的定理 5，这将与假设 (2) 矛盾. 由此根据第 80 页的定理 4，H_p，从而满足条件 (3) 不成立的所有元素 $x\in E$ 构成的集合 $H=\sum\limits_{p=1}^{\infty}H_p$，在 E 中是第一纲的. 因此只需令 $G=E-H$. □

注释 5.8. 双重序列 $\{U_{pq}\}$ 的**陪域** E_p 可以随 $p=1,2,\dots$ 变化，而对每个给定的 p，它们显然必须对所有 q 值相同，因为在定理 7 的陈述中涉及当 q 趋于 ∞ 时序列 $\{U_{pq}(x)\}$ 的收敛性概念.

前述定理 7 与第一章 §4 第 24 页的定理 6 一起，构成了所谓的**奇点凝聚原理**的泛函分析形式. 下面用例子加以说明[1].

设 $\{g_k(t)\}$ 为 $[0,1]$ 上**平方可积函数**构成的**正交归一序列**. 给定任意在 $[0,1]$ 上可积的函数 $x(t)$，称级数

$$\sum_{k=1}^{\infty}g_k(t)\int_0^1 g_k(s)x(s)\,\mathrm{d}s$$

为函数 $x(t)$ 关于序列 $\{g_k(t)\}$ 的**展开式**（当然假设积分 $\int_0^1 g_k(s)x(s)\,\mathrm{d}s$ 对所有 $k=1,2,\dots$ 存在）.

例如在空间 (C) 和 (L) 中有如下定理:

在 (C) **中**. 给定 $[0,1]$ 中的点列 $\{t_p\}$，若对每个 $p=1,2,\dots$，存在连续函数 $x_p(t)$ 使其展开式在点 t_p 发散或无界，则存在连续函数 $x(t)$ 使其展开式在所有点 t_p（$p=1,2,\dots$）发散或无界.

该证明由第 81 页的定理 7 和第一章 §4 第 24 页的定理 6 得出，若令

$$U_{pq}(x)=\sum_{k=1}^{q}g_k(t_p)\int_0^1 g_k(s)x(s)\,\mathrm{d}s,$$

将 $U_{p,q}(x)$ 看作 (C) 中的线性泛函.

在 (L) **中**. 给定位于 $[0,1]$ 上的区间列 $\{[\alpha_p,\beta_p]\}$，若对每个 $p=1,2,\dots$，存在可积函数 $x_p(t)$ 使其展开式满足

$$\lim_{n\to\infty}\int_{\alpha_p}^{\beta_p}|s_n(t)|\,\mathrm{d}t=\infty,$$

其中

$$s_n(t)=\sum_{k=1}^{n}g_k(t)\int_0^1 g_k(t)x_p(t)\,\mathrm{d}t,$$

则存在可积函数 $x(t)$ 使其展开式同时在所有区间 $[\alpha_p,\beta_p]$ 上具有相同性质.

该证明由第 81 页的定理 7 得出，若令

$$U_{pq}(x)=\sum_{k=1}^{q}g_k(t)\int_0^1 g_k(t)x(t)\,\mathrm{d}t\quad 对\alpha_p\leqslant t\leqslant\beta_p,$$

[1] 关于第一个例子，参看 P. du Bois Reymond，*Münch. Ber.* (1876), p. 83; 参看 H. Hankel (1870) 和 H. Lebesgue 的类似定理，*Mathematica* 4 (1930), p. 60. 关于第二个例子，参看 F. Riesz，Über die Fourierkoeffizienten einer stetigen Funktion von beschränkter Schwankung, *Math. Zeitschr.* **2** (1918), p. 312-315.

将 $U_{pq}(x)$ 看作定义在 $[0,1]$ 上可积函数空间中、其陪域分别位于 $[\alpha_p,\beta_p]$ 上可积函数空间中的线性算子.

注释 5.9. 特别地，若坐标为 α_p,β_p 的点构成 $[0,1;0,1]$ 正方形中的稠密集，则所述 $x(t)$ 的性质出现在 $[0,1]$ 的任何区间 $[\alpha,\beta]$ 上.

基于这一注记，可以证明对于 **Fourier 级数**，存在可积函数 $x(t)$ 使得

$$\lim_{n\to\infty}\left|\int_\alpha^\beta s_n(t)\,\mathrm{d}t\right| = \infty$$

在任何区间 $[\alpha,\beta]\subset[0,2\pi]$ 上成立.

第 3 节　紧 (B) 型空间

引理 5.1. 设 G 为线性闭集，是线性集 $D\subset E$ 的**真子集**，则对每个数 $\varepsilon>0$，存在 $x_0\in D$ 满足

$$|x_0|=1 \text{ 且} |x_0-x|\geqslant 1-\varepsilon \text{ 对所有} x\in G \text{ 成立}.$$

证明. 设 $x'\in D-G$，d 为 x' 到 G 的距离，η 为任意正数. 则存在 $y'\in G$ 使得 $d\leqslant|x'-y'|\leqslant d+\eta$. 令

$$x_0=\frac{x'-y'}{|x'-y'|}.$$

对任意 $x\in G$，有

$$|x_0-x|=\frac{1}{|x'-y'|}\cdot|x'-y'-|x'-y'|\cdot x|,$$

由于关系 $x\in G$ 和 $y'\in G$ 蕴含 $y'+|x'-y'|\cdot x\in G$，得到

$$|x_0-x|\geqslant\frac{1}{|x'-y'|}\cdot d\geqslant\frac{d}{d+\eta},$$

令 $\eta=d\cdot\dfrac{\varepsilon}{1-\varepsilon}$，即得 $|x_0-x|\geqslant 1-\varepsilon$.

显然，也有 $|x_0|=\dfrac{|x'-y'|}{|x'-y'|}=1$ 且 $x_0\in D$，因为 $x'\in D$ 且 $y'\in G\subset D$. □

定理 5.10. 若 E 中范数构成有界集的元素集是**紧空间**，则存在 E 中有限元素列 $x_1,x_2,\ldots,x_r$ 使得任何 $x\in E$ 都可表示为

$$x=\alpha_1x_1+\alpha_2x_2+\cdots+\alpha_rx_r, \tag{4}$$

其中 $\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_r$ 是（依赖于 x 的）数.

证明. 设 x_1 为 E 中满足 $|x_1| = 1$ 的任意元素，且对 $r > 1$，x_{r+1} 为 E 中满足

$$|x_{r+1}| = 1 \text{ 且} |x_{r+1} - x_i| \geqslant \frac{1}{2} \text{ 对} i = 1, 2, \ldots, r \tag{5}$$

的任意元素.

对每个 $r \geqslant 1$，以 G_r 表示所有形如 (4) 的元素 $x \in E$ 构成的集合，并令 $D = E$. 假设定理不成立，则对所有 r 有 $G_r \subset D$ 且 $G_r \neq D$，由此由前述引理（取 $G = G_r$，$\varepsilon = \frac{1}{2}$，$x_0 = x_{r+1}$），对每个自然数 r 存在满足 (5) 的 $x_{r+1} \in E$，即存在满足 $|x_r| = 1$ 且对 $p \neq q$ 有 $|x_p - x_q| \geqslant \frac{1}{2}$ 的无限序列 $\{x_r\}$.

该序列因此不含任何收敛子序列；它构成一个非紧集，尽管相应的范数集是有界的. 这与定理的假设矛盾. □

第 4 节 $(\boldsymbol{L^{(r)}})$、$(\boldsymbol{c})$ 和 $(\boldsymbol{l^{(r)}})$ 空间的性质

将第一章 §3 第 23 页的定理 4 应用于这些空间中**线性泛函**的一般形式，得到如下定理：

对 $(L^{(r)})$ **其中** $r \geqslant 1$. 若 $\alpha(t)$ $(0 \leqslant t \leqslant 1)$ 为可测函数，且对任何 $x(t) \in (L^{(r)})$ 积分 $\int_0^1 x(t)\alpha(t)\,\mathrm{d}t$ 存在，则对 $r > 1$ 有 $\int_0^1 |\alpha(t)|^{\frac{r}{r-1}} < \infty$，而对 $r = 1$，$\alpha(t)$ 是有界函数[1].

证明. 对自然数 n 令

$$\alpha_n(t) = \begin{cases} \alpha(t) & \text{对} |\alpha(t)| \leqslant n, \\ n \operatorname{sign} \alpha(t) & \text{对} |\alpha(t)| > n. \end{cases}$$

则有 $|x(t)\alpha(t)| \geqslant |x(t)\alpha_n(t)|$，因此由 $\lim\limits_{n\to\infty} \alpha_n(t) = \alpha(t)$ 得

$$\lim_{n\to\infty} \int_0^1 x(t)\alpha_n(t)\,\mathrm{d}t = \int_0^1 x(t)\alpha(t)\,\mathrm{d}t.$$

表达式 $\int_0^1 x(t)\alpha_n(t)\,\mathrm{d}t$ 对任意 $n = 1, 2, \ldots$ 都是 $(L^{(r)})$ 中的线性泛函（因为 $\alpha_n(t)$ 是有界函数），根据第 23 页的定理 4，$\int_0^1 x(t)\alpha(t)\,\mathrm{d}t$ 也是线性泛函. 因此，根据 $r > 1$ 时 $(L^{(r)})$ 中线性泛函一般形式的定理（见第 64 页），存在函数 $\overline{\alpha}(t) \in (L^{(\frac{r}{r-1})})$ 使得对所有 $x(t) \in (L^{(r)})$ 有

$$\int_0^1 x(t)\overline{\alpha}(t)\,\mathrm{d}t = \int_0^1 x(t)\alpha(t)\,\mathrm{d}t.$$

[1]这是 $r > 1$ 时 Riesz、$r = 1$ 时 Lebesgue 的著名定理.

因此令

$$x(t)=\begin{cases}1 & 对 0\leqslant t\leqslant t_0,\\ 0 & 对 t_0<t\leqslant 1,\end{cases}$$

对所有 $0\leqslant t_0\leqslant 1$ 有 $\int_0^{t_0}\overline{\alpha}(t)\,\mathrm{d}t=\int_0^{t_0}\alpha(t)\,\mathrm{d}t$，从而 $\overline{\alpha}(t)=\alpha(t)$ 几乎处处成立.

对 $r=1$ 可类似处理. □

对 (c). 若对任何收敛序列 $x=\{\xi_i\}$ 级数 $\sum\limits_{i=1}^{\infty}\alpha_i\xi_i$ 收敛，则 $\sum\limits_{i=1}^{\infty}|\alpha_i|<\infty$.

证明. $\sum\limits_{i=1}^{n}\alpha_i\xi_i$ 对任意 $n=1,2,\ldots$ 都是空间 (c) 中的线性泛函，且由

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n}\alpha_i\xi_i=\sum_{i=1}^{\infty}\alpha_i\xi_i,$$

根据第 23 页的定理 4，$\sum\limits_{i=1}^{\infty}\alpha_i\xi_i$ 也是线性泛函. 因此存在 $M>0$ 使得

$$\left|\sum_{i=1}^{\infty}\alpha_i\xi_i\right|\leqslant M\cdot\|x\|=M\cdot\sup_i|\xi_i|.$$

令

$$\xi_i=\begin{cases}\operatorname{sign}\alpha_i & 对 i\leqslant n\ 且 \alpha_i\neq 0,\\ 0 & 对 i>n\ 或 \alpha_i=0,\end{cases}$$

则对所有 $n=1,2,\ldots$ 有 $\sum\limits_{i=1}^{n}|\alpha_i|\leqslant M$，从而 $\sum\limits_{i=1}^{\infty}|\alpha_i|\leqslant M$. □

对 $(l^{(r)})$ **其中** $r\geqslant 1$. 若级数 $\sum\limits_{i=1}^{\infty}\alpha_i\xi_i$ 对任何序列 $x=\{\xi_i\}\in(l^{(r)})$ 收敛, 则对 $r>1$ 有 $\sum\limits_{i=1}^{\infty}|\alpha_i|^{\frac{r}{r-1}}<\infty$，而对 $r=1$ 序列 $\{\alpha_i\}$ 有界[1].

该证明与前一定理类似.

第 5 节 由可测函数构成的 (B) 型空间

下面详细讨论满足更特殊条件的 (B) 型空间的一些性质. 为此假设 E 为定义在闭区间 $[0,1]$ 上的可测函数空间，且对任意 $x_n=x_n(t)\in E$（$0\leqslant t\leqslant 1$）满足：

(1) $\lim\limits_{n\to\infty}\|x_n\|=0$ 蕴含 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n(t)=0$;

[1] 关于与 Lusin 的联系，参看第 75 页的注记.

(2) $\lim\limits_{n\to\infty}\|x_n\| = 0$ 蕴含存在 E 中的**子序列** $\{x_{n_i}(t)\}$ 和 x 使得对所有 $i=1,2,\ldots$ 和几乎任意 $0\leqslant t\leqslant 1$ 有 $|x_{n_i}(t)|\leqslant |x(t)|$ ($|\cdot|$ 在此表示绝对值);

(3) $\lim\limits_{n\to\infty} x_n(t)=x(t)$ 蕴含 $\varliminf\limits_{n\to\infty}\|x_n\|\geqslant\|x\|$.

特别地，空间 (M)、(C) 和 $(L^{(r)})$ 都满足这些条件（参见第 10–12、59–64 和 72–76 页）；为验证条件 (2)，只需对满足 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\|x_{n_i}\|<\infty$ 的情况由等式 $x(t)=\sum\limits_{i=1}^{\infty}|x_{n_i}(t)|$ 定义函数 $x(t)$.

定理 5.11. 设 E 和 E_1 为满足条件 (1)、(2) 和 (3) 的两个 (B) 型空间, $K(s,t)$ 为定义在正方形 $[0,1;0,1]$ 上的函数. 若积分

$$u(s)=\int_0^1 K(s,t)x(t)\,\mathrm{d}t \tag{6}$$

对任何 $x\in E$ 和几乎任意 s 值存在，且 $u(s)\in E_1$，则它是线性算子[1].

证明. 设

$$\lim_{n\to\infty}|x_n-x|=0 \tag{7}$$

并以 $\{\overline{x_n}\}$ 表示从 $\{x_n\}$ 中任意抽取的序列. 由 (7) 和条件 (2), 存在 E 中的子序列 $\{x_{n_i}-x\}$ 和 $z\in E$ 使得对所有 $i=1,2,\ldots$ 几乎处处有 $|x_{n_i}(t)-x(t)|\leqslant z(t)$. 显然 $\lim\limits_{i\to\infty}K(s,t)\cdot[\overline{x}_{n_i}(t)-x(t)]=0$，且 $|K(s,t)\cdot(\overline{x}_{n_i}-x)|\leqslant|K(s,t)|\cdot z(t)$. 此外积分 $\int_0^1 K(s,t)z(t)\,\mathrm{d}t$ 在测度为 1 的集合 H 上存在，因为 $z\in E$. 因此

$$\lim_{i\to\infty}\int_0^1 K(s,t)[\overline{x}_{n_i}(t)-x(t)]\,\mathrm{d}t=0,$$

从而对 $s\in H$ 有

$$\lim_{i\to\infty}\int_0^1 K(s,t)\overline{x}_{n_i}(t)\,\mathrm{d}t=\int_0^1 K(s,t)x(t)\,\mathrm{d}t.$$

现任何从 $\{u_n(s)=\int_0^1 K(s,t)x_n(t)\,\mathrm{d}t\}$ 中抽取的序列都包含一个几乎处处收敛于 $u(s)$ 的子序列，故有 $\lim\limits_{n\to\infty}u_n(s)=u(s)$，由此根据条件 (3) 和第 79 页的定理 2，算子 (6) 是线性的. □

第 6 节 某些特殊 (B) 型空间中线性算子的例子

下面给出刚建立的定理 9 对空间 (M)、(C) 和 $(L^{(r)})$ 的一些应用.

空间 (M). 若 $K(s,t)$ $(0\leqslant s\leqslant 1, 0\leqslant t\leqslant 1)$ 是可测函数, 且对所有 s 有 $\int_0^1|K(s,t)|\,\mathrm{d}t<N<\infty$, 则表达式

$$U(x)=\int_0^1 K(s,t)x(t)\,\mathrm{d}t \tag{8}$$

是定义在 (M) 上的线性算子，其**陪域**位于 (M) 中.

[1]参看 A. Alexiewicz 的论文，Sur les opérations linéaires dans l'espace des fonctions continues (*C. R. Acad. Sci. Paris* **228** (1949), p. 108–109)，其中研究了作用于空间 (C) 的此类算子.

空间 (C). 若函数 $K(s,t)$ 对 $0 \leqslant s \leqslant 1$ 和 $0 \leqslant t \leqslant 1$ 连续，则表达式 (8) 是定义在空间 (C) 上的线性算子，其陪域也位于 (C) 中.

空间 (L). 若 $K(s,t)$ 为正方形 $0 \leqslant s \leqslant 1$，$0 \leqslant t \leqslant 1$ 上的可测函数，且 $\int_0^1 C(s)\,\mathrm{d}s < N < \infty$，其中 $C(s) = \operatorname*{vrai\,max}_{0\leqslant t\leqslant 1} |K(s,t)|$，则表达式 (8) 是定义域为 (L)、陪域 $\subset (L)$ 的线性算子.

空间 $(L^{(p)})$. 设 $K(s,t)$ 为正方形 $0 \leqslant s \leqslant 1$，$0 \leqslant t \leqslant 1$ 上的可测函数，且对任何函数对 $x(t) \in (L^{(p)})$ 和 $y(s) \in (L^{(\frac{q}{q-1})})$（其中 $p \geqslant 2$，$q \geqslant 2$），有

$$\int_0^1 \int_0^1 |K(s,t)x(t)y(s)|\,\mathrm{d}s\,\mathrm{d}t < \infty, \tag{9}$$

则表达式 (8) 是定义在 $(L^{(p)})$ 上的线性算子，其陪域位于 $(L^{(q)})$ 中.

事实上，给定任意 $x \in (L^{(p)})$，对任何 $y \in (L^{(\frac{q}{q-1})})$ 有

$$\int_0^1 \int_0^1 K(s,t)x(t)y(s)\,\mathrm{d}s\,\mathrm{d}t = \int_0^1 y(s)\left[\int_0^1 K(s,t)x(t)\,\mathrm{d}t\right]\mathrm{d}s,$$

由此（参看第 85 页）$\int_0^1 K(s,t)x(t)\,\mathrm{d}t \in (L^{(q)})$，从而根据 (8)，$U(x)$ 是线性算子.

为使条件 (9) 成立，只需假设

$$\int_0^1 \int_0^1 |K(s,t)|^{\frac{r}{r-1}}\,\mathrm{d}s\,\mathrm{d}t < \infty,$$

其中 r 是 p 和 $\dfrac{q}{q-1}$ 中的较小者（特别地，当 $r=1$ 时函数 $K(s,t)$ 有界，当 $p=q=+\infty$ 时函数可积）.

事实上，由 Riesz 不等式有

$$\left|\int_0^1 \int_0^1 K(s,t)x(t)y(s)\,\mathrm{d}s\,\mathrm{d}t\right| \leqslant \left\{\int_0^1 \int_0^1 |K(s,t)|^{\frac{r}{r-1}}\,\mathrm{d}s\,\mathrm{d}t\right\}^{\frac{r-1}{r}} \left\{\int_0^1 |x(s)|^r\,\mathrm{d}s\right\}^{\frac{1}{r}} \left\{\int_0^1 |y(t)|^r\,\mathrm{d}t\right\}^{\frac{1}{r}}.$$

特别地，对 $p=q=2$，条件 (9) 因此可用

$$\int_0^1 \int_0^1 |K(s,t)|^2\,\mathrm{d}s\,\mathrm{d}t < \infty$$

代替，这意味着算子 (8) 在 $(L^{(2)})$ 中是线性的，且其陪域也含于 $(L^{(2)})$ 中.

同样的注记适用于 $p=q=1$ 和 $p=q=\infty$ 的情形.

第 7 节 关于求和法的一些定理

给定无穷数表

$$\begin{matrix} a_{11}, & a_{12}, & \dots, & a_{1k}, & \dots \\ a_{21}, & a_{22}, & \dots, & a_{2k}, & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \end{matrix} \tag{A}$$

若对每个级数 $A_i(x) = \sum_{k=1}^{\infty} a_{ik}\xi_k$ 都收敛且序列 $\{A_i(x)\}$ 也收敛（于 $A(x)$），则称数列 $x = \{\xi_k\}$ 可由**求和法** A（对应于表 (A)）求和（于 $A(x)$）.

若任何收敛序列都可用该求和法求和于它的极限，则称求和法 A 是**保形的**. 若任何收敛序列 $\{\eta_i\}$ 都恰好对应一个序列 x（收敛或不收敛）使得对所有 $i = 1, 2, \dots$ 有 $A_i(x) = \eta_i$，则称它是**可逆的**. 若任何可用求和法 A 求和的序列也可用求和法 B 求和，则称求和法 B（对应于表 ($\mathbf{B}$) $= \{\{b_{ik}\}\}$）**不弱于** A.

最后，若求和法 A 同时是保形的、可逆的，且条件

$$\sum_{i=1}^{\infty} |\alpha_i| < \infty \text{ 且} \sum_{i=1}^{\infty} \alpha_i a_{ik} = 0 \text{ 对} k = 1, 2, \dots \tag{10}$$

蕴含

$$\alpha_i = 0 \text{ 对所有} i = 1, 2, \dots, \tag{11}$$

则称求和法 A 为**完善的**求和法.

定理 5.12. 求和法 A 为保形的**充要条件**是下列条件同时满足：

1° $\sum_{k=1}^{\infty} |a_{ik}| \leqslant M$ 对任意 $i = 1, 2, \dots$;

2° $\lim_{i\to\infty} a_{ik} = 0$ 对任意 $k = 1, 2, \dots$;

3° $\lim_{i\to\infty} \sum_{k=1}^{\infty} a_{ik} = 1$[1].

证明. 必要性. 级数 $\sum_{k=1}^{\infty} a_{ik}\xi_k$ 对任意收敛序列 $x = \{\xi_k\}$ 和任意 $i = 0, 1, 2, \dots$ 收敛，蕴含（参见第 86 页关于 (c) 的结论）级数 $\sum_{k=1}^{\infty} a_{ik}$ 绝对收敛. 因此定义在空间 (c) 中的泛函 $A_i(x)$ 是线性的，且因为它们构成收敛序列，根据第 80 页的定理 5，条件 1° 成立.

另一方面，令 $\xi_i^0 = 1$（$i = 1, 2, \dots$），$\xi_i^n = 0$（$i \neq n$）且对所有 $n = 1, 2, \dots$ 有 $\xi_n^n = 1$. 令 $x_n = \{\xi_i^n\}$（$n = 1, 2, \dots$）. 则 $A_i(x_0) = \sum_{k=1}^{\infty} a_{ik}$ 且 $A_i(x_n) = a_{in}$（i 和 n 为自然数），因此 $A(x_0) = 1$ 且对 $n > 0$ 有 $A(x_n) = 0$，所以条件 2° 和 3° 也满足.

[1]这就是著名的 Toeplitz 定理（"Über allgemeine lineare Mittelbildungen", *Prace matematyczno-fizyczne* **22** (1911), p. 113–119）. 另参看 H. Steinhaus，*loc. cit.*.

三个条件的**充分性**由第 79 页的定理 3 以及刚才定义的序列 $\{x_n\}$ 在空间 (c) 中是**基本集**这一事实得出. □

引理 5.2. 设 A 为保形求和法，$y_0 = \{\eta_i^0\}$ 为收敛序列. 若对任何数列 $\{\alpha_i\}$，条件 (10) 蕴含等式 $\sum\limits_{i=1}^{\infty} \alpha_i \eta_i^0 = 0$，则对任何数 $\varepsilon > 0$，存在收敛序列 x 使得

$$|A_i(x) - \eta_i^0| < \varepsilon \quad 对所有 i = 1, 2, \ldots \tag{12}$$

证明. 以 G 表示所有收敛序列 $\{\eta_i\}$ 构成的集合，对每个这样的序列存在收敛序列 x 使得对所有 $i = 1, 2, \ldots$ 有 $\eta_i = A_i(x)$. 在空间 (c) 中考虑，这样定义的集合 G 显然构成向量空间. 若 y_0 不是 G 的**聚点**，则根据第四章 §3 第 57 页的引理，存在定义在 (c) 中的线性泛函 $F(y)$ 使得 $F(y_0) = 1$ 且对所有 $y \in G$ 有 $F(y) = 0$. 鉴于空间 (c) 中线性泛函的一般形式（参见第四章 §4 第 66 页），因此存在数列 $\{\alpha_i\}$ 使得级数 $\sum\limits_{i=1}^{\infty} \alpha_i$ 绝对收敛且：

$$\sum_{i=1}^{\infty} \alpha_i \eta_i + \alpha \lim_{i \to \infty} \eta_i = 0 \quad 对 \{\eta_i\} \in G,$$
$$\sum_{i=1}^{\infty} \alpha_i \eta_i^0 + \alpha \lim_{i \to \infty} \eta_i^0 = 1.$$

由于求和法 A 是保形的，根据上式有

$$\sum_{i=1}^{\infty} \alpha_i A_i(x) + \alpha \lim_{k \to \infty} \xi_k = 0 \quad 对所有 x = \{\xi_k\} \in (c) \tag{15}$$

且前述定理 10 蕴含存在满足其陈述中条件 1° 的 M. 因此

$$\sum_{i=1}^{\infty} \sum_{k=1}^{\infty} |\alpha_i| \cdot |a_{ik}| \cdot |\xi_k| \leqslant M \cdot \sum_{i=1}^{\infty} |\alpha_i| \cdot \|x\|,$$

由此

$$\sum_{i=1}^{\infty} \alpha_i A_i(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \xi_k \sum_{i=1}^{\infty} \alpha_i a_{ik}. \tag{16}$$

对固定的自然数 k，令 $\xi_k = 1$ 且对 $n \neq k$ 有 $\xi_n = 0$，由 (15) 得

$$\sum_{i=1}^{\infty} \alpha_i a_{ik} = 0 \quad 对 k = 1, 2, \ldots \tag{17}$$

然后令对所有 $k = 1, 2, \ldots$ 有 $\xi_k = 1$，由 (15)、(16) 和 (17) 得 $\alpha = 0$，从而由 (14) 得 $\sum\limits_{i=1}^{\infty} \alpha_i \eta_i^0 = 1$，

这与 (17) 及假设矛盾. □

引理 5.3. 若求和法 A 是保形的且条件 (10) 蕴含条件 (11)，则对任何收敛序列 $\{\eta_i^0\}$ 和任何数 $\varepsilon > 0$，存在满足条件 (12) 的收敛序列 x.

该证明由前述引理 1 立即得出.

引理 5.4. 设 $x_0 = \{\xi_k^0\}$ 为由保形求和法 A 可求和的有界序列，则对任何 $\varepsilon > 0$，存在收敛序列 x 使得

$$|A_i(x) - A_i(x_0)| < \varepsilon \quad 对所有 i = 1, 2, \ldots \tag{18}$$

证明. 令

$$\eta_i^0 = A_i(x_0) \quad 对 i = 1, 2, \ldots \tag{19}$$

并以 $\{\alpha_i\}$ 表示满足第 90 页条件 (10) 的任意序列.

根据 (19) 有

$$\sum_{i=1}^{\infty} \alpha_i \eta_i^0 = \sum_{i=1}^{\infty} \alpha_i A_i(x_0) \tag{20}$$

且由于 A 是保形求和法，根据第 90 页的定理 10，存在满足 1° 的数 M；因此

$$\sum_{i=1}^{\infty} \sum_{k=1}^{\infty} |\alpha_i| \cdot |a_{ik}| \cdot |\xi_k^0| \leqslant M \cdot \sum_{i=1}^{\infty} |\alpha_i| \cdot \sup_k |\xi_k^0|$$

且根据 (20) 有

$$\sum_{i=1}^{\infty} \alpha_i \eta_i^0 = \sum_{k=1}^{\infty} \xi_k^0 \cdot \sum_{i=1}^{\infty} \alpha_i a_{ik},$$

因此根据 (10) 有 $\sum\limits_{i=1}^{\infty} \alpha_i \eta_i^0 = 0$. 由此，要证明的引理的结论立即由引理 1 得出. □

引理 5.5. 设 x_0 为由保形且可逆的求和法 A 可求和的序列. 若对任何 $\varepsilon > 0$，存在满足条件 (18) 的序列 x，则序列 x_0 由任何保形且不弱于 A 的求和法 B 可求和于同一数值.

证明. A 的可逆性蕴含（参见第三章 §6 第 47 页的定理 10 和第 50 页的注记）存在序列 $\{\alpha_i\}$ 和表 $\{\beta_{ik}\}$ 具有如下性质:

$$\sum_{i=1}^{\infty} |\beta_{ik}| < \infty \quad 对 k = 1, 2, \ldots, \tag{21}$$

(22) 若对收敛序列 $y = \{\eta_i\}$ 令

$$\xi_k = f_k(y) = \sum_{i=1}^{\infty} \beta_{ik} \eta_i + \alpha_k \lim_{i \to \infty} \eta_i \quad 对 k = 1, 2, \ldots,$$

则有

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_{ik}\xi_k = \eta_i \quad 对 i = 1, 2, \ldots$$

这样定义在空间 (c) 中的泛函 $f_k(y)$ 是线性的. 对任何收敛序列 y，相应的序列 $x = \{\xi_k\}$ 由假设可由保形求和法 B 求和，因此每个级数 $\sum\limits_{k=1}^{\infty} b_{ik}\xi_k$ 收敛且它们的和序列 $\{B_i(x)\}$ 也收敛.

令

$$F_i(y) = \sum_{k=1}^{\infty} b_{ik} f_k(y) \quad 对 i = 1, 2, \ldots \text{ 且} F(y) = \lim_{i\to\infty} F_i(y)$$

对所有 $y \in (c)$.

这样定义的泛函 $F_i(y)$ 是线性的；根据第一章 §3 第 23 页的定理 4，泛函 $F(y)$ 也是线性的.

由此，根据假设，设 x_0 为给定的序列，x 为满足 (18) 的收敛序列. 令 $y_0 = \{A_i(x_0)\}$，$y = \{A_i(x)\}$，则 $y_0 \in (c)$，$y \in (c)$ 且 $\|y - y_0\| \leqslant \varepsilon$，因此

$$|B(x) - B(x_0)| = |F(y) - F(y_0)| \leqslant |F| \cdot \varepsilon \tag{23}$$

且由于 $A(x) = B(x)$，有

$$|A(x_0) - B(x_0)| \leqslant |A(x_0) - A(x)| + |B(x) - B(x_0)|,$$

由此根据 (18) 和 (23)，

$$|A(x_0) - B(x_0)| \leqslant |F| \cdot \varepsilon + \varepsilon,$$

这蕴含等式 $A(x_0) = B(x_0)$，证毕. □

引理 3 和 4 给出

定理 5.13. 若保形求和法 B 不弱于保形且可逆的求和法 A，则任何由 A 可求和的有界序列也由 B 可求和于同一数值[1].

另一方面，引理 2 和 4 给出

定理 5.14. 若 A 为完善求和法，B 为不弱于 A 的保形求和法，则任何由 A 可求和的序列也由 B 可求和于同一数值[2].

---

[1]O. Toeplitz，Über die Auflösung unendlichvieler linearer Gleichungen mit unendlichvielen Unbekannten, *Rendiconti di Palermo* **28** (1909), p. 89–96.

[2]参看 S. Banach，*Sur les fonctionnelles linéaires II*, *Studia Math.* **1** (1929), p. 223–239.

第六章 全连续算子与相伴算子

第 1 节　全连续算子

若线性算子 $U(x)$ 把每个有界集都变换成紧集，则称其为**全连续**的.

例题 6.1. 若对 $i=1,2,\dots,n$，X_i 表示线性泛函而 x_i 表示元素，则算子 $U(x)=\sum_{i=1}^{n}X_i(x)\cdot x_i$ 是全连续的.

定理 6.2. 每个全连续算子的陪域都是可分的.

证明. 记 G_n 为满足 $|x|\leqslant n$ 的所有 $U(x)$ 构成的集合. G_n 是紧集，故可分[1]，从而集合 $\sum_{n=1}^{\infty}G_n$（即算子 U 的陪域）也是可分的. □

定理 6.3. 给定全连续线性算子列 $\{U_n(x)\}$，任何满足 $\lim_{n\to\infty}|U_n-U|=0$ 的线性算子 $U(x)$ 也是全连续的.

证明. 设 $\{x_i\}$ 为一有界序列. 用对角线法从 $\{x_i\}$ 中抽出子序列 $\{\overline{x_i}\}$，使得 $\lim_{i\to\infty}U_n(\overline{x_i})$ 对所有自然数 n 都存在. 于是对 $n=1,2,\dots$ 有

$$\begin{aligned}|U(\overline{x_p})-U(\overline{x_q})|\leqslant{}&|U(\overline{x_p})-U_n(\overline{x_p})|+|U_n(\overline{x_p})-U_n(\overline{x_q})|\\&+|U_n(\overline{x_q})-U(\overline{x_q})|,\end{aligned}$$

因此

$$|U(\overline{x_p})-U(\overline{x_q})|\leqslant|U-U_n|\cdot(|\overline{x_p}|+|\overline{x_q}|)+|U_n(\overline{x_p})-U_n(\overline{x_q})|,$$

由此显然 $\lim|U(\overline{x_p})-U(\overline{x_q})|=0$. 故序列 $\{U(\overline{x_i})\}$ 收敛，即算子 $U(x)$ 全连续. □

[1] 见引言，第 9 页，定理 3.

第 2 节 某些特殊空间中全连续算子的例子

设 $K(s,t)$ 是 $0 \leqslant s \leqslant 1$ 和 $0 \leqslant t \leqslant 1$ 上的连续函数，则函数（变量 s 的函数）

$$u(s) = \int_0^1 K(s,t)x(t)\,\mathrm{d}t \tag{1}$$

连续，无论 $x(t)$ 是怎样的可积函数. 将算子 (1) 看作定义在空间

$$(M), \quad (C), \quad (L) \quad 和 \quad (L^{(r)})\ 其中 r > 1 \tag{2}$$

之一中，且其陪域亦位于这些空间之一中时，该算子全连续.

证明基于如下 Arzelà 定理：

连续函数列 $\{u_n(s)\}$ 含有一致收敛子序列的充分条件是：对每个 $\varepsilon > 0$，存在 $\eta > 0$ 使得当 $|s_1 - s_2| < \eta$ 时，$|u_n(s_1) - u_n(s_2)| \leqslant \varepsilon$ 对所有 $n = 1, 2, \ldots$ 成立.

事实上，设 $\|x_n(t)\| \leqslant 1$ 且对 $0 \leqslant s \leqslant 1$ 和 $n = 1, 2, \ldots$ 有 $u_n(s) = \int_0^1 K(s,t)x_n(t)\,\mathrm{d}t$. 由 $K(s,t)$ 的连续性，对每个 $\varepsilon > 0$ 存在 $\eta > 0$ 使得当 $|s_1 - s_2| < \eta$ 时，$|K(s_1,t) - K(s_2,t)| \leqslant \varepsilon$ 对 $0 \leqslant t \leqslant 1$ 成立. 因此

$$|u_n(s_1) - u_n(s_2)| \leqslant \int_0^1 |K(s_1,t) - K(s_2,t)| \cdot |x_n(t)|\,\mathrm{d}t \leqslant \varepsilon \int_0^1 |x_n(t)|\,\mathrm{d}t,$$

由不等式 $\int_0^1 |x_n(t)|\,\mathrm{d}t \leqslant \|x_n\|$（在空间 (2) 中易验证）可得 $|u_n(s_1) - u_n(s_2)| \leqslant \varepsilon$. 于是根据 Arzelà 定理，可从 $\{u_n(s)\}$ 中抽出一致收敛的子序列. 由于一致收敛的函数列在空间 (2) 中也依范数（那里采用的范数）收敛，故算子 (1) 在其中全连续.

特别有如下定理：

空间 (C). 为使算子 (1) 在 (C) 中全连续，只需设对每个 s_0 有

$$\lim_{s \to s_0} \int_0^1 |K(s_0,t) - K(s,t)|\,\mathrm{d}t = 0. \tag{3}$$

事实上，对每个 $\varepsilon > 0$，由 (3) 易推出存在 $\eta > 0$ 使得 $|s_1 - s_2| \leqslant \eta$ 时 $\int_0^1 |K(s_1,t) - K(s_2,t)|\,\mathrm{d}t \leqslant \varepsilon$，这就如前面一样蕴含算子 (1) 在 (C) 中全连续.

条件 (3) 成立的一个例子是：$K(s,t)$ 为有界函数，且对每个 s_0 和所有 t 有 $\lim_{s \to s_0} K(s,t) = K(s_0,t)$ 几乎处处.

最后注意，若条件 (3) 满足，算子

$$v(s) = \int_0^s K(s,t)x(t)\,\mathrm{d}t$$

在 (C) 中也是全连续的.

空间 $(L^{(p)})$. 设 $K(s,t)$ 是 $0\leqslant s\leqslant 1$ 和 $0\leqslant t\leqslant 1$ 上的可测函数，r 表示 p 和 $\frac{q}{q-1}$ 中较小者，其中 $p>1$ 且 $q>1$. 若

$$\int_0^1\int_0^1 |K(s,t)|^{\frac{r}{r-1}}\,\mathrm{d}s\,\mathrm{d}t<\infty, \tag{4}$$

则算子 (1) 在 $(L^{(p)})$ 中全连续，且其陪域位于 $(L^{(q)})$ 中.

事实上，设 $\{K_n(s,t)\}$ 为连续函数列，满足

$$\lim_{n\to\infty}\int_0^1\int_0^1 |K_n(s,t)-K(s,t)|^{\frac{r}{r-1}}\,\mathrm{d}s\,\mathrm{d}t=0. \tag{5}$$

算子 $y=U_n(x)=\int_0^1 K_n(s,t)x(t)\,\mathrm{d}t$ 对 $x\in(L^{(p)})$ 和 $y\in(L^{(q)})$ 全连续. 我们有

$$\begin{aligned}\|U_n(x)-U(x)\|^q&\leqslant\int_0^1\left|\int_0^1(K_n-K)x(t)\,\mathrm{d}t\right|^q\mathrm{d}s\\&\leqslant\left\{\int_0^1\left[\int_0^1|K_n-K|^{\frac{r}{r-1}}\,\mathrm{d}t\right]^{\frac{r-1}{r}\cdot q}\mathrm{d}s\right\}\cdot\left(\int_0^1|x(t)|^r\,\mathrm{d}t\right)^{\frac{q}{r}}.\end{aligned}$$

由于 $r\leqslant p$，有 $\left(\int_0^1|x(t)|^r\,\mathrm{d}t\right)^{\frac{1}{r}}\leqslant\left(\int_0^1|x(t)|^p\,\mathrm{d}t\right)^{\frac{1}{p}}$；又由 $r\leqslant\frac{q}{q-1}$，即 $\frac{q(r-1)}{r}\leqslant 1$，有

$$\|U_n(x)-U(x)\|\leqslant\left\{\int_0^1\int_0^1|K_n-K|^{\frac{r}{r-1}}\,\mathrm{d}t\,\mathrm{d}s\right\}^{\frac{r-1}{r}}\|x\|,$$

因此

$$\|U_n-U\|\leqslant\left[\int_0^1\int_0^1|K_n-K|^{\frac{r}{r-1}}\,\mathrm{d}t\,\mathrm{d}s\right]^{\frac{r-1}{r}},$$

由此据 (5) 得 $\lim_{n\to\infty}\|U_n-U\|=0$. 再根据第 96 页定理 2，$U$ 全连续，即算子 (1) 全连续，其中 $u(s)=U(x)\in(L^{(q)})$.

注释 6.4. 特别地，当 $p=q=2$ 时，条件 $\int_0^1\int_0^1 K^2(s,t)\,\mathrm{d}s\,\mathrm{d}t<+\infty$ 蕴含算子 (1) 对 $x\in(L^{(2)})$ 和 $u(s)\in(L^{(2)})$ 全连续.

第 3 节　共轭算子（相伴算子）

设 E 和 E_1 如通常一样为两个 (B) 型空间，$y=U(x)$ 为定义在 E 上且陪域含于 E_1 中的线性算子.

约定用 X 和 Y 分别表示定义在 E 和 E_1 上的线性泛函.

考虑表达式 $Y[U(x)]$，其中 Y 是定义在 E_1 上的任意泛函. 此表达式显然可看作定义在 E 上的泛函. 特别地，令

$$X(x) = Y[U(x)]. \tag{6}$$

如此定义的泛函 X 可加且连续，因为

$$|X(x)| \leqslant |Y[U(x)]| \leqslant |Y| \cdot |U| \cdot |x|,$$

由此

$$|X| \leqslant |Y| \cdot |U|. \tag{7}$$

关系 (6) 构成了一个新的算子

$$X = \overline{U}(Y),$$

其定义域是定义在 E_1 上的线性泛函空间 $\overline{E}_1$，其陪域位于定义在 E 上的线性泛函空间 $\overline{E}$ 中.

算子 $\overline{U}(Y)$ 称为 $U(x)$ 的**相伴**算子（或与 $U(x)$ **共轭**）. 由 (7)，它可加且连续.

定理 6.5. 设 $\overline{U}(Y)$ 是与线性算子 $U(x)$ 相伴的算子，则 $|\overline{U}| = |U|$.

证明. 一方面，对每个 $x \in E$ 有 $|Y[U(x)]| \leqslant |Y| \cdot |U| \cdot |x|$，由此 $|\overline{U}(Y)| = |Y(U)| \leqslant |Y| \cdot |U|$，因此

$$|\overline{U}| \leqslant |U|. \tag{8}$$

另一方面，给定任意 $x_0 \in E$，根据第四章 §2 的定理 3（第 55 页），存在定义在 E_1 上的线性泛函 Y_0 使得 $|Y_0| = 1$ 且 $|Y_0[U(x_0)]| = |U(x_0)|$，因此

$$|U(x_0)| = |Y_0[U(x_0)]| \leqslant |\overline{U}| \cdot |Y_0| \cdot |x_0| = |\overline{U}| \cdot |x_0|,$$

由此 $|U(x_0)| \leqslant |\overline{U}| \cdot |x_0|$，因此

$$|U| \leqslant |\overline{U}|. \tag{9}$$

不等式 (8) 和 (9) 给出等式. 证毕. □

定理 6.6. 若线性算子 $U(x)$ 全连续，则相伴算子 $\overline{U}(Y)$ 亦全连续：换言之，若 $|Y_n| < M$，则存在子序列 $\{Y_{n_i}\}$ 和泛函 X 使得

$$\lim_{i\to\infty} |\overline{U}(Y_{n_i}) - X| = 0. \tag{10}$$

证明. 算子 $U(x)$ 的陪域 $G \subset E_1$ 根据第 96 页定理 1 含有可数稠密集，因此根据第五章 §1 的定理 3（第 79 页），可以从满足 $|Y_n| < M$ 的泛函序列 $\{Y_n\}$ 中抽出子序列 $\{Y_{n_i}\}$ 使其对所有 $y \in G$ 都收敛. 令

$$\lim_{i\to\infty} Y_{n_i}[U(x)] = \lim_{i\to\infty} X_{n_i}(x) = X(x)$$

并设 x_i 是 E 中满足

$$|x_i| = 1 \quad 且 \quad |X(x_i) - X_{n_i}(x_i)| \geqslant \frac{1}{2}|X - X_{n_i}|. \tag{11}$$

的元素.

现若定理不成立，即若存在 $\eta > 0$ 使得对所有 $i = 1, 2, \ldots$ 有 $|X - X_{n_i}| > \eta$，则由 (11)，记 $Y'_i = Y_{n_i}$ 为简写：

$$\left|Y'_i[U(x_i)] - \lim_{j\to\infty} Y'_j[U(x_i)]\right| \geqslant \frac{\eta}{2} \tag{12}$$

且（因 $|x_i| = 1$）存在指标序列 $\{k_i\}$ 使得 $\lim_{i\to\infty} U(x_{k_i}) = y_0$. 于是，无论 $\varepsilon > 0$ 如何，存在自然数 N 使得对所有 $i > N$ 有 $|y_0 - U(x_{k_i})| < \varepsilon$ 和 $|Y'_{k_i}(y_0) - \lim_{j\to\infty} Y'_{k_j}(y_0)| < \varepsilon$，由此

$$\begin{aligned}
&\left|Y'_{k_i}[U(x_{k_i})] - \lim_{j\to\infty} Y'_{k_j}[U(x_{k_i})]\right| \\
&\qquad \leqslant |Y'_{k_i}[U(x_{k_i}) - y_0]| + |Y'_{k_i}(y_0) - \lim_{j\to\infty} Y'_{k_j}(y_0)| + |\lim_{j\to\infty} Y'_{k_j}[U(x_{k_i}) - y_0]| \\
&\qquad \leqslant M \cdot \varepsilon + \varepsilon + M \cdot \varepsilon,
\end{aligned}$$

这与 (12) 矛盾，因为 ε 可任意小. □

第 4 节　应用：某些特殊空间中相伴算子的例子

空间 (C). 若 $K(s,t)$ 是 $0 \leqslant s \leqslant 1$ 和 $0 \leqslant t \leqslant 1$ 上的连续函数，则表达式

$$U(x) = \int_0^1 K(s,t)x(t)\,\mathrm{d}t$$

为连续算子.

设 $Y(y)$（其中 $y \in (C)$）为任意线性泛函. 如空间 (C) 的一般情形，它具有形式 $Y(y) = \int_0^1 y(t)\,\mathrm{d}Y(t)$，其中 $Y(t)$ 是有界变差函数（参见第四章 §4，第 61 页）. 泛函 $X(x) = Y[U(x)]$ 在 (C) 中也是线性的，故亦具有形式

$$X(x) = \int_0^1 x(t)\,\mathrm{d}X(t), \tag{13}$$

其中 $X(t)$ 亦为有界变差函数（可设 $X(0) = 0$）. 因此，令

$$y(s) = U(x) = \int_0^1 K(s,t)x(t)\,\mathrm{d}t, \tag{14}$$

对每个函数 $x(t) \in (C)$ 有

$$\int_0^1 x(s)\,\mathrm{d}X(s) = \int_0^1 y(s)\,\mathrm{d}Y(s). \tag{15}$$

考虑函数

$$x_{v,n}(s) = \begin{cases} 1 & 对 0 \leqslant s \leqslant v, \\ 0 & 对 v + \frac{1}{n} \leqslant s \leqslant 1, \end{cases}$$

且它在 $v \leqslant s \leqslant v + \frac{1}{n}$ 上是线性的. 在 (14) 和 (15) 中以 $x_{v,n}(s)$ 代替 $x(s)$ 得

$$\int_0^1 x_{v,n}(s)\,\mathrm{d}X(s) = \int_0^1 \left[\int_0^1 K(s,t)x_{v,n}(t)\,\mathrm{d}t\right] \mathrm{d}Y(s) = \int_0^1 x_{v,n}(t)\left[\int_0^1 K(s,t)\,\mathrm{d}Y(s)\right] \mathrm{d}t^{1},$$

由此，令 $n \to \infty$ 取极限，对 $s = 0,1$ 和对函数 $X(s)$ 连续的每个点 s（因而在 $[0,1]$ 的每一点，至多除去可数个点），有

$$X(s) = \int_0^s \left[\int_0^1 K(s,t)\,\mathrm{d}Y(s)\right] \mathrm{d}t; \tag{16}$$

而 Stieltjes 积分 (13) 的值在可数个点（除 0 和 1 外）改变函数 $X(t)$ 的值时保持不变，因此可设函数 $X(s)$ 在整个 $[0,1]$ 上由公式 (16) 定义，从而它在 $0 \leqslant s \leqslant 1$ 上连续.

因此表达式 (16) 可看作相伴算子 $\overline{U}(Y) = X$ 的表示. 应这样理解：$Y(s)$ 作为有界变差函数表示线性泛函 $\int_0^1 y(s)\,\mathrm{d}Y(s)$，对应的有界变差函数 $X(s)$ 表示线性泛函 $\int_0^1 x(t)\,\mathrm{d}X(t)$.

给定在正方形 $K = [0,1;0,1]$ 上连续的函数 $F(s,t)$ 和两个在 $[0,1]$ 上有界变差的函数 $g(t)$ 和 $h(t)$，有

$$\begin{aligned} \iint_K F(s,t)\,\mathrm{d}g(s)\,\mathrm{d}h(t) &= \int_0^1 \left[\int_0^1 F(s,t)\,\mathrm{d}g(s)\right] \mathrm{d}h(t) \\ &= \int_0^1 \left[\int_0^1 F(s,t)\,\mathrm{d}h(t)\right] \mathrm{d}g(s). \end{aligned}$$

这三个积分中的第一个（二重积分）应理解为形如

$$\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=0}^{n} F(s_i', t_j')[g(s_{i+1}) - g(s_i)][h(t_{j+1}) - h(t_j)]$$

的和的极限（其中 $0 = s_0 < s_1 < \ldots < s_i < \ldots < s_{m+1} = 1$ 和 $0 = t_0 < t_1 < \ldots < t_j < \ldots < t_{n+1} = 1$，点 $s_i' \in [s_i, s_{i+1}]$ 和 $t_j' \in [t_j, t_{j+1}]$ 任意)，当最大线段 $[s_i, s_{i+1}]$ 和 $[t_j, t_{j+1}]$ 的长度趋于 0 时.

所述定理的证明与 Riemann 积分的相应定理的证明相同.

[1]积分换序的合法性由所涉及函数的性质得出.

对线性算子

$$U(x) = x(s) - \int_0^1 K(s,t)x(t)\,\mathrm{d}t$$

(用同一个函数 $K(s,t)$)，有

$$\overline{U}(Y) = Y(t) - \int_0^t \mathrm{d}t \int_0^1 K(s,t)\,\mathrm{d}Y(s) = X(t).$$

空间 $(L^{(p)})$. 若 $K(s,t)$ 是 $0 \leqslant s \leqslant 1$ 和 $0 \leqslant t \leqslant 1$ 上的可测函数，且

$$\int_0^1 \int_0^1 |K(s,t)x(t)Y(s)|\,\mathrm{d}s\,\mathrm{d}t < \infty \tag{17}$$

对每对 $x(t) \in (L^{(p)})$ 和 $Y(s) \in (L^{(\frac{q}{q-1})})$（其中 $p > 1$ 和 $q > 1$）成立，则算子

$$U(x) = y(s) = \int_0^1 K(s,t)x(t)\,\mathrm{d}t$$

对 $x \in (L^{(p)})$ 和 $y \in (L^{(q)})$ 是线性的.

空间 $(L^{(q)})$ 中的线性泛函 Y 具有形式

$$Y(y) = \int_0^1 Y(s)y(s)\,\mathrm{d}s,$$

其中 $Y(s)$ 是属于 $(L^{(\frac{q}{q-1})})$ 的函数，且有

$$Y(y) = \int_0^1 Y(s)\,\mathrm{d}s \cdot \int_0^1 K(s,t)x(t)\,\mathrm{d}t = \int_0^1 x(t)\,\mathrm{d}t \cdot \int_0^1 K(s,t)Y(s)\,\mathrm{d}s.$$

令

$$X(t) = \int_0^1 K(s,t)Y(s)\,\mathrm{d}s, \tag{18}$$

则

$$\int_0^1 Y(s)y(s)\,\mathrm{d}s = \int_0^1 X(t)x(t)\,\mathrm{d}t.$$

表达式 (18) 可看作相伴算子 $\overline{U}(Y) = X$ 的表示.

在 $p = q > 1$ 的特殊情形，与线性算子

$$U(x) = x(s) - \int_0^1 K(s,t)x(t)\,\mathrm{d}t$$

相伴的算子具有形式

$$X=\overline{U}(Y)=Y(t)-\int_0^1 K(s,t)Y(s)\,\mathrm{d}s.$$

空间 (L). 前面的讨论也适用于空间 (L). 若公式 (17) 对 $x\in(L)$ 和 $Y\in(M)$ 成立，则表达式

$$y=U(x)=\int_0^1 K(s,t)x(t)\,\mathrm{d}t$$

对 $x\in(L)$ 和 $y\in(L)$ 是线性算子.

相伴算子具有形式

$$X=\overline{U}(Y)=\int_0^1 K(s,t)Y(s)\,\mathrm{d}s,$$

其中 $Y(s)\in(M)$ 表示 $y(s)\in(L)$ 的线性泛函 $\int_0^1 Y(s)y(s)\,\mathrm{d}s$，而 $X(t)\in(M)$ 表示 $x(t)\in(L)$ 的线性泛函 $\int_0^1 X(t)x(t)\,\mathrm{d}t$.

对相应的 X,Y 和 x,y 有

$$\int_0^1 X(t)x(t)\,\mathrm{d}t=\int_0^1 Y(s)y(s)\,\mathrm{d}s.$$

第七章
双正交序列

第 1 节　定义与一般性质

设 $\{x_i\}$ 为元素序列，$\{f_i\}$ 为线性泛函序列，若满足

$$f_i(x_j) = \begin{cases} 1 & \text{当} i = j, \\ 0 & \text{当} i \neq j, \end{cases} \tag{1}$$

则称这两个序列是**双正交**的.

对任意给定的 $x \in E$，级数

$$\sum_{i=1}^{\infty} x_i \cdot f_i(x) \tag{2}$$

称为 x 按双正交序列 $\{x_i\}, \{f_i\}$ 的**展开式**.

当 $\{f_i\}$ 构成泛函的全集（参见第三章 §3 第 42 页）且级数 (2) 对某个 x 收敛时，x 就是该级数的和. 事实上，此时对所有 $j = 1, 2, \dots$ 有

$$f_j\left[x - \sum_{i=1}^{\infty} x_i \cdot f_i(x)\right] = f_j(x) - f_j(x) = 0.$$

定理 7.1. 若级数 (2) 对所有 $x \in E$ 收敛，则级数

$$\sum_{i=1}^{\infty} f_i(x) \cdot F(x_i)$$

也对所有 $x \in E$ 收敛，无论 F 为何种线性泛函.

证明. 记

$$S_n = \sum_{i=1}^{n} f_i \cdot F(x_i), \tag{3}$$

则有 $S_n(x) = \sum_{i=1}^{n} f_i(x) \cdot F(x_i) = F\left[\sum_{i=1}^{n} x_i \cdot f_i(x)\right]$, 因此序列 $\{S_n(x)\}$ 对所有 x 收敛是显然的. □

定理 7.2. 若对任意线性泛函 F，级数

$$\sum_{i=1}^{\infty} f_i \cdot F(x_i) \tag{4}$$

的部分和 (3) 的范数一致有界，则级数 (2) 对所有 $x \in E$ 收敛，其中 x 是序列 $\{x_i\}$ 中元素的任意线性组合序列的极限.

证明. 记

$$s_n(x) = \sum_{i=1}^{n} x_i \cdot f_i(x), \tag{5}$$

则有 $F[s_n(x)] = \sum_{i=1}^{n} F(x_i) \cdot f_i(x) = S_n(x)$（见 (3)），且由假设 $|S_n| \leqslant M$（M 为不依赖于 n 的数），据第五章 §1 定理 6（第 80 页），对所有 $x \in E$ 有 $\lim_{n\to\infty} |s_n(x)| < \infty$. 因此据第五章 §1 定理 5（第 80 页），存在不依赖于 n 和 x 的数 N，使得 $|s_n(x)| \leqslant N \cdot |x|$.

由于对任意 $i = 1, 2, \ldots$ 都有 $\lim_{n\to\infty} s_n(x_i) = x_i$，通过简单的推理可建立 $\lim_{n\to\infty} s_n(x)$ 的存在性，对所有满足定理条件的元素 $x \in E$ 成立. □

定理 7.3. 若对任意 $x \in E$，级数 (2) 的部分和 (5) 的范数一致有界，则级数 (4) 对所有是序列 $\{f_i\}$ 中元素的任意线性组合序列的极限的泛函 F 收敛.

证明与前述定理 2 类似.

定理 7.4. 在相同假设下，若进一步 $\{x_i\}$ 是基本序列，则级数 (2) 对所有 $x \in E$ 收敛.

证明. 据 (5)，对所有 $x \in E$ 有 $\lim_{n\to\infty} |s_n(x)| < \infty$，且对所有 $i = 1, 2, \ldots$ 有 $\lim_{n\to\infty} s_n(x) = x_i$. 据第五章 §1 定理 5 和 3（第 80 和 79 页），级数 (2) 对所有 $x \in E$ 收敛. □

第 2 节　某些特殊空间中的双正交序列

下面讨论双正交序列在我们特别感兴趣的某些空间中的行为.

设

$$\int_0^1 x_i(t) y_j(t)\,\mathrm{d}t = \begin{cases} 1 & 当 i = j, \\ 0 & 当 i \neq j. \end{cases} \tag{6}$$

进一步假设 $\{x_i(t)\}$ 是 $(L^{(p)})$（$p > 1$）中的函数序列，$\{y_i(t)\}$ 是 $(L^{(\frac{p}{p-1})})$ 中的函数序列；最后假设这些序列在其中是完全的（或闭的）.

定理 7.5. 在这些假设下，若级数

$$\sum_{i=1}^{\infty} x_i(t) \int_0^1 y_i(t)x(t)\,\mathrm{d}t$$

对任意函数 $x(t) \in (L^{(p)})$ 按 p 次幂平均收敛，则级数

$$\sum_{i=1}^{\infty} y_i(t) \int_0^1 x_i(t)y(t)\,\mathrm{d}t \tag{7}$$

对任意函数 $y(t) \in (L^{(\frac{p}{p-1})})$ 按 $\frac{p}{p-1}$ 次幂平均收敛.

证明. 记

$$f_i(x) = \int_0^1 y_i(t)x(t)\,\mathrm{d}t \quad 对x(t) \in (L^{(p)}).$$

由假设，级数 $\sum_{i=1}^{\infty} x_i \cdot f_i(x)$ 对所有 $x \in (L^{(p)})$ 按 p 次幂平均（即依范数）收敛. 据第 107 页定理 3，级数 $\sum_{i=1}^{\infty} f_i \cdot F(x_i) = \sum_{i=1}^{\infty} y_i(t) \int_0^1 x_i(t)y(t)\,\mathrm{d}t$（其中 $y(t) \in (L^{(\frac{p}{p-1})})$）因此对定义在 $(L^{(p)})$ 上的任意线性泛函 F 按 $\frac{p}{p-1}$ 次幂依范数（即平均）收敛；从而级数 (7) 对任意函数 $y(t) \in (L^{(\frac{p}{p-1})})$ 亦然，证毕. □

特别地，当 $x_i(t) = y_i(t) \in (L^{(r)})$（$r$ 为 p 和 $\frac{p}{p-1}$ 中的较大者）时，刚建立的定理蕴含如下推论.

若级数

$$\sum_{i=1}^{\infty} x_i(t) \int_0^1 x_i(t)x(t)\,\mathrm{d}t \tag{8}$$

对所有 $x \in (L^{(p)})$ 按 p 次幂平均收敛，则它对所有 $x \in (L^{(\frac{p}{p-1})})$ 也按 $\frac{p}{p-1}$ 次幂平均收敛.

例如可假设 x_i（$i = 1, 2, \ldots$）是有界函数.

现在考虑假设 (6) 的情形，其中 $\{x_i(t)\}$ 是可积函数序列，$\{y_i(t)\}$ 是 $0 \leqslant t \leqslant 1$ 上的有界函数序列. 再假设序列 $\{x_i(t)\}$ 在 (L) 中是完全的.

定理 7.6. 在这些假设下，若级数 $\sum_{i=1}^{\infty} x_i(t) \int_0^1 y_i(t)x(t)\,\mathrm{d}t$ 对所有 $x(t) \in (L)$ 平均收敛，则级数 $\sum_{i=1}^{\infty} y_i(t) \int_0^1 x_i(t)y(t)\,\mathrm{d}t$ 对所有 $x(t) \in (M)$ 几乎处处有界，反之亦然.

证明与前述定理 5 类似：将 x_i 视为 (L) 中的元素，y_i 视为线性泛函的代表；最后利用第 107–108 页的定理 3 和 4.

特别地，当 $x_i(t) = y_i(t)$ 时，有如下推论：

1° 若级数 (8)（其中 $x_i(t) = y_i(t) \in (M)$）对所有 $x(t) \in (L)$ 平均收敛，则它对所有 $x(t) \in (M)$ 有界，反之亦然.

2° 若级数 (8)（其中 $x_i(t) = y_i(t) \in (C)$ 且 $\{x_i\}$ 是 (C) 中的完全序列）对所有 $x(t) \in (C)$ 一致收敛，则它对所有 $x(t) \in (L)$ 平均收敛，反之亦然.

证明如下：一方面，将 x_i 视为 (C) 中的元素，$y_i = x_i$ 视为泛函的代表；另一方面，将 $x_i(t)$ 视为 (L) 中的元素，$y_i = x_i$ 视为定义在 (L) 上的线性泛函的代表.

第 3 节 (B) 型空间中的基

E 中的元素序列 $\{x_i\}$ 称为**基**，若对每个 $x \in E$ 存在唯一的数列 $\{\eta_i\}$ 使得

$$x = \sum_{i=1}^{\infty} \eta_i x_i.$$

给定基 $\{x_i\}$，以 E_1 记所有使得级数 $\sum_{i=1}^{\infty} \eta_i x_i$ 收敛的序列 $y = \{\eta_i\}$ 的集合. 令

$$|y| = \sup_n \left| \sum_{i=1}^{n} \eta_i x_i \right|,$$

易证如此赋范的 E_1 构成一个 (B) 型空间.

再令

$$x = U(y) = \sum_{i=1}^{\infty} \eta_i x_i \quad \text{对所有序列} y = \{\eta_i\} \in E_1.$$

如此定义的算子 $U(y)$ 是线性的，因为 $|U(y)| \leqslant |y|$，且由于它将 E_1 一一地映成 E，逆算子 $y = U^{-1}(x)$ 也是线性的.

最后，泛函

$$f_i(x) = \eta_i \quad \text{其中} x = \sum_{i=1}^{\infty} \eta_i x_i$$

也是线性的，因为 $|\eta_i x_i| \leqslant 2 \cdot |y|$ 且 $|f_i(x)| = |\eta_i| \leqslant \frac{2}{|x_i|}|y| \leqslant \frac{2}{|x_i|}|U^{-1}| \cdot |x|$.

因此有

$$x = \sum_{i=1}^{\infty} x_i f_i(x) \quad \text{对所有} x \in E$$

且由于此展开式唯一，得到等式 (1)（见第 106 页），因此序列 $\{x_i\}, \{f_i\}$ 是双正交的.

注意对定义在 E 上的任意线性泛函 F, 级数 $\sum_{i=1}^{\infty} f_i(x) \cdot F(x_i)$ 收敛于 $F(x)$, 因为对所有 $x \in E$ 有：$\sum_{i=1}^{\infty} f_i(x) \cdot F(x_i) = \lim_{n\to\infty} F\left[\sum_{i=1}^{n} x_i \cdot f_i(x)\right] = F(x)$.

目前尚不清楚是否每个可分的 (B) 型空间都容许一个基.

此问题仅对某些特殊空间得到解决. 例如在 $(L^{(p)})$（$p \geqslant 1$）中，基由 Haar 正交系给出. 在 (C) 中，基由 J. Schauder 构造. 在 $(l^{(p)})$（$p \geqslant 1$）中，基由序列 $\{x_i\}$ 给出，其中 $x_i = \{\xi_n^{(i)}\}$ 且 $\xi_n^{(i)} = \begin{cases} 1 & \text{当} i = n, \\ 0 & \text{当} i \neq n; \end{cases}$ 此时 $f_i(x) = \xi_i$ 对 $x = \{\xi_i\}$. 最后在 (c) 中，基由同一序列加上元素 $x_0 = \{\xi_n^{(0)}\}$（其中 $\xi_n^{(0)} = 1$ 对 $n = 1, 2, \ldots$）构成. 此时 $f_0(x) = \lim_{i\to\infty} \xi_i$ 对 $x = \{\xi_i\} \in (c)$.

第 4 节 在正交展开理论中的一些应用

定理 7.7. 设 $\{x_i\},\{f_i\}$ 和 $\{y_i\},\{\varphi_i\}$ 是双正交序列，且方程 $f_i(x)=\varphi_i(y)$ $(i=1,2,\ldots)$ 对每个 x 恰有一解 $y=U(x)$，则级数 $\sum_{i=1}^{\infty} h_i x_i$ 的收敛蕴含级数 $\sum_{i=1}^{\infty} h_i y_i$ 的收敛，对任意数列 $\{h_i\}$ 成立.

证明. 易见等式 $\lim_{n\to\infty} x_n=x_0$ 和 $\lim_{n\to\infty} y_n=y_0$（其中 $y_n=U(x_n)$）蕴含等式 $y_0=U(x_0)$. 据第三章 §3 定理 7（第 41 页），算子 $y=U(x)$ 因此是线性的. 令 $|U|=M$，则有 $|U(x)|\leqslant M\cdot|x|$ 且由定义 $U(x_i)=y_i$ 对 $i=1,2,\ldots$，于是 $U\left(\sum_{i=1}^{n} h_i x_i\right)=\sum_{i=1}^{n} h_i y_i$ 对任意实数 h_i，这立即蕴含定理结论. □

推论 7.8. 设 $\{x_i(t)\}$ 和 $\{y_i(t)\}$ 是连续函数的规范正交序列，若对任意连续函数 $x(t)$ 存在唯一的连续函数 $y(t)$ 使得 $\int_0^1 x_i(t)x(t)\,\mathrm{d}t=\int_0^1 y_i(t)y(t)\,\mathrm{d}t$，则级数 $\sum_{i=1}^{\infty} h_i x_i(t)$ 的一致收敛蕴含级数 $\sum_{i=1}^{\infty} h_i y_i(t)$ 的一致收敛.

对其他函数空间也可得到类似的推论[1].

定理 7.9. 设 $\{x_i\},\{f_i\}$ 为双正交序列，其中 $\{f_i\}$ 是全序列，$\{h_i\}$ 为数列，使得当 $\{\alpha_i\}$ 为某元素 x 的系数序列（即 $\alpha_i=f_i(x)$ 对 $i=1,2,\ldots$）时，$\{h_i\alpha_i\}$ 为某元素 y 的系数序列.

在这些条件下，若 $\{\beta_i\}$ 为某线性泛函 F 的系数序列（即 $\beta_i=F(x_i)$ 对 $i=1,2,\ldots$），则 $\{h_i\beta_i\}$ 也是某线性泛函 $\varPhi$ 的系数序列.

证明. 方程组 $f_i(x)=h_i f_i(y)$ $(i=1,2,\ldots)$ 由假设对每个 x 恰有一解. 记为 $y=U(x)$.

等式 $\lim_{n\to\infty} x_n=x_0$ 和 $\lim_{n\to\infty} y_n=y_0$（其中 $y_n=U(x_n)$）显然蕴含等式 $y_0=U(x_0)$. 因此，据第三章 §3 定理 7（第 41 页），算子 $U(x)$ 是连续的. 特别地，易验证

$$U(x_i)=h_i x_i \quad \text{对所有} i=1,2,\ldots \tag{9}$$

现给定线性泛函 F 使得 $\beta_i=F(x_i)$ 对 $i=1,2,\ldots$，据 (9) 有 $F[U(x_i)]=h_iF(x_i)=h_i\beta_i$，即数 $h_i\beta_i$ 是算子 $\varPhi=\overline{U}(F)$ 的系数，证毕. □

注意若 $x=\lim_{i\to\infty} x_i$，则据 (9)，$U(x)$ 是序列 $\{x_i\}$ 中元素的某线性组合的极限.

作为此注记的简易应用，可得

定理 7.10. 设 $\{x_i(t)\}$ 为连续函数的规范正交序列，在 (C) 空间中是闭的.

若因子序列 $\{h_i\}$ 将任意有界函数的系数序列 $\{\alpha_i\}$ 变换为有界函数的系数序列 $\{h_i\alpha_i\}$，则它同时将任意连续函数的系数序列 $\{\beta_i\}$ 变换为连续函数的系数序列 $\{h_i\beta_i\}$.

逆定理也成立.

最后有

[1] 见：F. Riesz, *Untersuchungen über Systeme integrierbarer Funktionen*, Math. Ann. 69 (1910), p. 449–497.

定理 7.11. 设 $\{x_i(t)\}$ 为规范正交的函数有界序列，在 $(L^{(\frac{p}{p-1})})$（$p>1$）中是完全的.

若因子序列 $\{h_i\}$ 将任意函数 $x(t)\in(L^{(p)})$ 的系数序列 $\{\alpha_i\}$ 变换为某函数 $y(t)\in(L^{(p)})$ 的系数序列 $\{h_i\alpha_i\}$，则它也将任意函数 $\bar{x}(t)\in(L^{(\frac{p}{p-1})})$ 的系数序列 $\{\beta_i\}$ 变换为某函数 $\bar{y}(t)\in(L^{(\frac{p}{p-1})})$ 的系数序列 $\{h_i\beta_i\}$. 若 $p=\infty$，则 $(L^{(p)})=(M)$[1].

[1]关于本节内容, 进一步的结果见: W. Orlicz, *Beiträge zur Theorie der Orthogonalentwicklungen* II, Studia Math. 1 (1929), p. 241–255.

第八章

(B) 型空间中的线性泛函

第 1 节　预备知识

给定 E 中闭向量空间 $G \subset E$ 以及定义在 E 上的所有线性泛函构成的空间 $\overline{E}$，如前所述（参见第四章 §3，第 57 页，引理），对任意元素 $x_0 \in E - G$，存在线性泛函 $f \in \overline{E}$ 使得

$$f(x_0) = 1 \quad \text{且} \quad f(x) = 0 \quad \text{对所有} \quad x \in G.$$

自然产生的问题是：反之，对于 $\overline{E}$ 中线性泛函构成的空间 $\Gamma \subset \overline{E}$，类似的性质是否也在 E 的元素之间成立. 更准确地说，给定定义在 E 上的闭向量空间 $\Gamma \subset \overline{E}$，对任意泛函 $f_0 \in \overline{E} - \Gamma$，是否存在元素 $x \in E$ 使得

$$f_0(x) = 1 \quad \text{且} \quad f(x) = 0 \quad \text{对所有} \quad f \in \Gamma. \tag{1}$$

然而，在一般情况下，答案是否定的.

事实上，设 E 为收敛实数列构成的空间 (c)，因此 $\overline{E}$ 为定义在 (c) 上的所有线性泛函之集，Γ 为定义在 (c) 上形如

$$f(x) = \sum_{i=1}^{\infty} \alpha_i \xi_i \quad \text{其中} \quad x = \{\xi_i\} \in (c) \quad \text{且} \quad \sum_{i=1}^{\infty} |\alpha_i| < \infty. \tag{2}$$

的所有线性泛函之集.

如此定义，Γ 是一个向量空间且是闭的.

事实上，设

$$\lim_{n\to\infty}\|f_n - f\| = 0, \tag{3}$$

其中

$$f_n \in \Gamma \quad 且 \quad f_n(x) = \sum_{i=1}^{\infty} \alpha_i^{(n)}\xi_i \quad 对 \quad n = 1, 2, \ldots \tag{4}$$

需证 $f \in \Gamma$. 由 (3) 得 $\lim_{\substack{p\to\infty\\ q\to\infty}}\|f_p - f_q\| = 0$，因此，由定义 $f_p(x) - f_q(x) = \sum_{i=1}^{\infty}(\alpha_i^{(p)} - \alpha_i^{(q)})\xi_i$，根据第四章 §4，第 66 页的定理可得 $\lim_{\substack{p\to\infty\\ q\to\infty}}\sum_{i=1}^{\infty}|\alpha_i^{(p)} - \alpha_i^{(q)}| = 0$，从而存在序列 $\{\alpha_i\}$ 使得 $\lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{\infty}|\alpha_i^{(n)} - \alpha_i| = 0$ 且 $\sum_{i=1}^{\infty}|\alpha_i| < \infty$. 于是对所有 $x = \{\xi_i\} \in (c)$ 有等式

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{\infty}\alpha_i^{(n)}\xi_i = \sum_{i=1}^{\infty}\alpha_i\xi_i,$$

，因此由 (4) 得 $\lim_{n\to\infty} f_n(x) = \sum_{i=1}^{\infty}\alpha_i\xi_i$，又因由 (3) 得 $|f_n(x) - f(x)| \leqslant \|f_n - f\| \cdot |x| \to 0$，故对所有 $x \in (c)$ 有 $f(x) = \sum_{i=1}^{\infty}\alpha_i\xi_i$. 泛函 f 因而形如 (2)，故最终 $f \in \Gamma$.

由此，设

$$f_0(x) = \lim_{i\to\infty}\xi_i \quad 对 \quad x = \{\xi_i\} \in (c). \tag{5}$$

如此定义的泛函 f_0 显然不属于 Γ. 然而不存在满足条件 (1) 的 $x_0 = \{\xi_i^{(0)}\} \in (c)$，因为 (1) 和 (5) 蕴含 $\lim \xi_i^{(0)} = 1$，从而不可能对所有满足条件 (2) 的数列 $\{\alpha_i\}$ 都有等式 $\sum_{i=1}^{\infty}\alpha_i\xi_i^{(0)} = 0$（这是 (1) 所要求的）.

第 2 节　线性泛函的正则闭集

定义在 (B) 型空间 E 中的线性泛函构成的向量集 Γ 称为**正则闭的**，如果对定义在 E 中但不属于 Γ 的每个线性泛函，都存在满足条件 (1) 的元素 $x_0 \in E$.

上述例子表明，线性泛函的闭向量空间不总是正则闭的. 反之，下述结论成立：每个正则闭的线性泛函向量空间 Γ 同时也是通常意义下（见引言，第 13 页）的闭集.

事实上，设

$$f_n \in \Gamma \quad 对 \quad n = 1, 2, \ldots \tag{6}$$

且

$$\lim_{n\to\infty}\|f_n - f_0\| = 0. \tag{7}$$

在这些条件下，若 f_0 不属于向量且正则闭的集合 Γ，则依定义存在满足 (1) 的 $x_0 \in E$；由 (6) 特别地有 $f_n(x_0) = 0$（$n = 1, 2, \ldots$），因此由 (7) 得 $f_0(x_0) = \lim_{n\to\infty} f_n(x_0) = 0$，与 (1) 矛盾. 故必须承认 $f_0 \in \Gamma$，即集合 Γ 是闭的.

容易给出正则闭集的例子. 事实上，设 E 为 (B) 型空间，$G \subset E$ 为任意向量集. 满足

$$f(x) = 0 \quad \text{对所有} \quad x \in G$$

的 E 上定义的线性泛函 f 构成的集合 Γ 是正则闭的.

注释 8.1. 若所讨论的集合 Γ 不仅是向量和正则闭的，而且是全的，则它包含定义在 E 上的所有线性泛函.

事实上，全集的定义（见第三章 §3，第 42 页）蕴含：E 中使所有泛函 $f \in \Gamma$ 都取零值的唯一元素是零元 Θ.

本章将研究正则闭的线性泛函集所具有的性质[1].

第 3 节　线性泛函的超限闭集

给定任意序数 ϑ（其为极限数，即无直接前驱）以及有界实数超限序列 $\{C_\xi\}$（$1 \leqslant \xi < \vartheta$），称 $\{C_\xi\}$ 的**上超限极限**为 $\overline{\lim}_{\xi\to\vartheta} C_\xi$，它表示满足不等式 $C_\xi \leqslant t$ 从某个（依赖于 t 的）序数开始成立的所有实数 t 的下确界. $\{C_\xi\}$ 的**下超限极限**由下式定义：

$$\underline{\lim}_{\xi\to\vartheta} C_\xi = -\overline{\lim}_{\xi\to\vartheta}(-C_\xi).$$

引理 8.1. 若对超限序列 $\{f_\xi\}$ 有

$$|f_\xi| \leqslant M \quad \text{对} \quad 1 \leqslant \xi < \vartheta,$$

则存在满足下列条件的线性泛函 f：

$$|f| \leqslant M \quad \text{且} \quad \underline{\lim}_{\xi\to\vartheta} f_\xi(x) \leqslant f(x) \leqslant \overline{\lim}_{\xi\to\vartheta} f_\xi(x) \quad \text{对所有} \quad x \in E. \tag{8}$$

证明由第二章 §2，第 27 页的定理 1 得出，只需取 $p(x) = \overline{\lim}_{\xi\to\vartheta} f_\xi(x)$. 泛函 $p(x)$ 还满足不等式 $p(x) \leqslant M \cdot |x|$.

由此引理，将满足条件 (8) 的线性泛函 $f(x)$ 称为序列 $\{f_\xi(x)\}$ 的**超限极限**.

特别地，当 $\lim_{n\to\infty} \|f_n - f\| = 0$ 时，泛函 $f(x)$ 显然是序列 $\{f_n(x)\}$ 的超限极限，因为对所有 $x \in E$ 有 $\underline{\lim}_{n\to\infty} f_n(x) = f(x) = \overline{\lim}_{n\to\infty} f_n(x)$.

[1]线性泛函的正则闭集概念以及与下述引理 2 等价的定理，都是由 S. Mazurkiewicz 在我关于加性算子工作的影响下建立的.

线性泛函构成的向量空间 Γ 称为**超限闭的**，如果 Γ 中每个范数一致有界的超限序列 $\{f_\xi\}$ 都在 Γ 中有超限极限 f.

每个超限闭的空间 Γ 同时也是通常意义下的闭集.

事实上，公式 (6) 和 (7) 此时给出对所有 $x \in E$ 有 $\lim_{n\to\infty} f_n(x) = f_0(x)$，又因每个满足条件 $\underline{\lim}_{n\to\infty} f_n(x) \leqslant f(x) \leqslant \overline{\lim}_{n\to\infty} f_n(x)$ 的泛函 f 在此情形下与泛函 f_0 恒等，这后者作为序列 $\{f_n\}$ 唯一的超限极限，属于空间 Γ，因此该空间是闭的.

引理 8.2. 给定定义在 E 上的超限闭的线性泛函向量空间 Γ 以及不属于 Γ 的线性泛函 f_0，对每个满足条件

$$0 < M < |f - f_0| \quad 对所有 \quad f \in \Gamma \tag{9}$$

的数 M，存在元素 $x_0 \in E$ 使得

$$f_0(x_0) = 1, \quad f(x_0) = 0 \quad 对所有 \quad f \in \Gamma \quad 且 \quad |x_0| < \frac{1}{M}.$$

证明. 设 $\{M_i\}$（其中 $M_1 = M$）为任意无穷递增数列，以 $\mathfrak{m}$ 表示满足下述条件的最大基数：对任意给定的幂 $< \mathfrak{m}$ 的集 $G \subset E$，存在线性泛函 $f \in \Gamma$ 使得

$$|f| \leqslant M_2 \quad 且 \quad |f(x) - f_0(x)| \leqslant M_1 \cdot |x| \quad 对所有 \quad x \in G. \tag{10}$$

如此定义的数 $\mathfrak{m}$——立即指出——不超过 E 的幂，因为若存在 $f \in \Gamma$ 使得 $|f(x) - f_0(x)| \leqslant M_1 \cdot |x|$ 对所有 $x \in E$ 成立，则将有 $|f - f_0| \leqslant M_1 = M$，与假设 (9) 矛盾.

由此，将证明 $\mathfrak{m}$ 是有限数.

事实上，假设 $\mathfrak{m}$ 非有限，考虑任意幂为 $\mathfrak{m}$ 的集 $G \subset E$. 将 G 的元素排成超限序列 $\{x_\xi\}$（$1 \leqslant \xi < \vartheta$），其中 ϑ 表示幂为 $\mathfrak{m}$ 的最小序数；显然 ϑ 是极限数. 因此，对每个序数 $\eta < \vartheta$，序列 $\{x_\xi\}$（$1 \leqslant \xi < \eta$）的项集的幂 $< \mathfrak{m}$. 由 $\mathfrak{m}$ 的定义，对每个 $\eta < \vartheta$ 存在线性泛函 $f_\eta \in \Gamma$ 使得

$$|f_\eta| \leqslant M_2 \quad 且 \quad |f_\eta(x_\xi) - f_0(x_\xi)| \leqslant M_1 \cdot |x_\xi| \quad 对所有 \quad \xi \leqslant \eta, \tag{11}$$

且因 Γ 假设为超限闭的，存在线性泛函 $f \in \Gamma$ 是序列 $\{f_\eta\}$（$1 \leqslant \eta < \vartheta$）的超限极限，因此由 (11) 满足条件 $|f| \leqslant M_2$ 且 $|f(x_\xi) - f_0(x_\xi)| \leqslant M_1 \cdot |x_\xi|$（$1 \leqslant \xi < \vartheta$），即满足条件 (10). 于是，假设 $\mathfrak{m}$ 非有限，就会对任意幂为 $\mathfrak{m}$ 的集 $G \subset E$ 存在满足 (10) 的 $f \in \Gamma$，这与 $\mathfrak{m}$ 的定义矛盾.

既然 $\mathfrak{m}$ 有限，就存在有限集 $G_1 \subset E$ 使得任何满足条件

$$|f - f_0| \leqslant M_2 \quad 且 \quad |f(x) - f_0(x)| \leqslant M_1 \cdot |x| \quad 对所有 \quad x \in G_1$$

的泛函 f 都不属于 Γ.

由此通过归纳易得 E 中存在有限集序列 $\{G_i\}$ 使得任何对某个 k 满足条件

$$|f-f_0|\leqslant M_k \quad \text{且} \quad |f(x)-f_0(x)|\leqslant M_i\cdot|x|\,\text{对}x\in G_i\,\text{且}i<k$$

的泛函 f 都不属于 Γ. 因此，若对 f 有

$$|f(x)-f_0(x)|\leqslant M_i\cdot|x| \quad \text{对} \quad x\in G_i\,\text{且}i=1,2,\ldots, \tag{12}$$

则泛函 f 不属于 Γ.

可以假设集 G_i（$i=1,2,\ldots$）的元素范数都等于 $\frac{M_1}{M_i}$：为此只需将这些元素乘以适当的数. 若将这些集的元素排成序列 $\{x_n\}$，先写 G_1 的元素，然后写 G_2 的元素，依此类推，则得

$$\lim_{n\to\infty}x_n=\Theta \quad \text{且} \quad |x_n|\leqslant 1 \quad \text{对所有} \quad n=1,2,\ldots \tag{13}$$

且若

$$|f(x_n)-f_0(x_n)|\leqslant M_1 \quad \text{对所有} \quad n=1,2,\ldots, \tag{14}$$

则泛函 f 不属于 Γ.

以 G_0 表示所有序列 $\{f(x_n)\}$（其中 $f\in\Gamma$）构成的集. 显然 $G_0\subset(c)$ 且 $\{f_0(x_n)\}\in(c)$. 由 (14), $\{f_0(x_n)\}$ 到线性集 G_0 的距离 $\geqslant M_1$. 鉴于 (c) 空间中线性泛函的一般形式（参见第四章 §4，第 66 页），因此由引理（第四章 §3），第 57 页（取 $G=G_0$）得知，存在数列 $\{C_n\}$ 和数 C 使得

$$C\lim_{n\to\infty}f_0(x_n)+\sum_{n=1}^{\infty}C_nf_0(x_n)=1, \tag{15}$$

$$C\lim_{n\to\infty}f(x_n)+\sum_{n=1}^{\infty}C_nf(x_n)=0 \quad \text{对所有} \quad f\in\Gamma, \tag{16}$$

且

$$|C|+\sum_{n=1}^{\infty}|C_n|\leqslant\frac{1}{M_1}. \tag{17}$$

于是取 $x_0=\sum_{n=1}^{\infty}C_nx_n$，则由 (15)–(17)，依 (13) 最终得 $f_0(x_0)=1$，对所有 $f\in\Gamma$ 有 $f(x_0)=0$ 且 $|x_0|\leqslant\sum_{n=1}^{\infty}|C_n|\cdot|x_n|\leqslant\frac{1}{M_1}=\frac{1}{M}$，证毕. □

刚才建立的引理 2 蕴含以下引理：

引理 8.3. 线性泛函向量空间的正则闭与超限闭这两个概念是等价的.

证明. 若线性泛函向量空间 Γ 是超限闭的，则它在通常意义下是闭的，这立即由引理 2 推出 Γ 是正则闭空间.

反之，设 Γ 为正则闭的线性泛函向量空间，$\{f_\xi\}$ 为 Γ 中范数一致有界的任意型为 ϑ 的序列，f_0 为该序列的任意超限极限. 于是有

$$\underline{\lim}_{\xi\to\vartheta} f_\xi(x) \leqslant f_0(x) \leqslant \overline{\lim}_{\xi\to\vartheta} f_\xi(x) \quad 对所有 \quad x \in E. \tag{18}$$

因此若 f_0 不属于 Γ，则依 Γ 的定义存在满足条件 (1)（第 115 页）的元素 $x \in E$，由此特别地有 $f_\xi(x) = 0$，与 (18) 矛盾. 故 $f_0 \in \Gamma$，因此 Γ 是超限闭的. □

引理 2 和 3 给出

定理 8.2. 给定定义在 E 上的正则闭线性泛函向量空间 Γ 以及不属于 Γ 的线性泛函 f_0，对每个满足条件

$$0 < M < |f - f_0| \quad 对所有 \quad f \in \Gamma$$

的数 M，存在元素 $x_0 \in E$ 使得

$$f_0(x_0) = 1, \quad f(x_0) = 0 \quad 对所有 \quad f \in \Gamma \quad 且 \quad |x_0| < \frac{1}{M}.$$

第 4 节　线性泛函的弱收敛

称线性泛函序列 $\{f_n\}$ **弱收敛**于泛函 f，如果

$$\lim_{n\to\infty} f_n(x) = f(x) \quad 对所有 \quad x \in E.$$

此时称泛函 f 为序列 $\{f_n\}$ 的**弱极限**.

泛函 $f(x)$ 是加性的且 Borel 可测的；由第一章 §3 的定理 4（第 23 页），它是线性的. 另一方面，由第五章 §1 的定理 5（第 80 页），范数序列 $\{|f_n|\}$ 是有界的. 最后有

$$|f| \leqslant \underline{\lim}_{n\to\infty} |f_n|, \tag{19}$$

因为序列 $\{f_n\}$ 弱收敛于 f 蕴含对所有 x 有 $\lim_{n\to\infty} |f_n(x)| = |f(x)|$，又因 $|f_n(x)| \leqslant |f_n| \cdot |x|$ $(n = 1, 2, \ldots)$，故有 $|f(x)| \leqslant |x| \cdot \underline{\lim}_{n\to\infty} |f_n|$，由此得 (19) 式.

由此易得

定理 8.3. 线性泛函序列 $\{f_n(x)\}$ 弱收敛于泛函 $f(x)$ 的充要条件是同时满足

(20) 序列 $\{|f_n|\}$ 有界，且

(21) $\lim_{n\to\infty} f_n(x) = f(x)$ 对稠密集（或基本集）中的每个元素 x 成立.

定理 8.4. 若空间 E 可分，则每个范数集有界的线性泛函序列 $\{f_n\}$ 都含有弱收敛的子列.

证明. 事实上，只需从序列 $\{f_n\}$ 中抽取在可数稠密集上收敛的子列，这用对角线法容易做到. □

第 5 节　可分 (B) 型空间中线性泛函的弱闭集

给定两个线性泛函集 Δ 和 Γ（其中 $\Delta \subset \Gamma$），如果对每个 $f \in \Gamma$ 都存在 Δ 中弱收敛于 f 的序列 $\{f_n\}$，则称 Δ 在 Γ 中**弱稠密**.

线性泛函集 Γ 称为**弱闭的**，如果 Γ 包含作为其元素的所有属于 Γ 的泛函序列的弱极限.

定理 8.5. 若空间 E 可分，则定义在 E 上的每个线性泛函集 Γ 都含有在 Γ 中弱稠密的可数子集 Δ.

证明. 可以只限于讨论范数一致有界的泛函构成的 Γ 的情形，因为每个泛函集都是至多可数个具有此性质的集之和.

设 $\{x_n\}$ 为 E 中稠密集，Z_n（$n = 1, 2, \ldots$）为 n 维空间中以

$$f(x_1), f(x_2), \ldots, f(x_n) \tag{22}$$

为坐标的点集，其中 f 取遍 Γ. 显然对每个 n 存在可数集 $\Delta_n \subset \Gamma$ 使得 $f \in \Delta_n$ 时的坐标 (22) 构成的点在 Z_n 中稠密. 集 $\Delta = \sum_{n=1}^{\infty} \Delta_n$ 显然可数，且对每个 $f \in \Gamma$ 存在满足条件 $f_n \in \Delta_n \subset \Delta$ 且 $|f_n(x_i) - f(x_i)| < \frac{1}{n}$（$i = 1, 2, \ldots, n$）的序列 $\{f_n\}$，因此它弱收敛于 f，因为泛函 f_n 属于 $\Delta \subset \Gamma$，由假设其范数集有界. □

定理 8.6. 对可分 (B) 型空间 E，线性泛函集（定义在 E 上）的正则闭与弱闭这两个概念是等价的.

证明. 一方面，设 $\{f_n\}$ 为 Γ 中弱收敛于泛函 f_0 的线性泛函序列. 于是有

$$\lim_{n\to\infty} f_n(x) = f_0(x) \quad \text{对所有} \quad x \in E. \tag{23}$$

若 f_0 不属于假设为正则闭的集 Γ，则依此概念的定义存在满足条件

$$f_0(x_0) = 1 \quad \text{且} \quad f(x_0) = 0 \quad \text{对所有} \quad f \in \Gamma. \tag{24}$$

的元素 $x_0 \in E$. 因 $f_n \in \Gamma$，因此对所有 $n = 1, 2, \ldots$ 有 $f_n(x_0) = 0$，从而由 (23) 得 $f_0(x_0) = 0$，与 (24) 矛盾. 由此得 $f_0 \in \Gamma$；集 Γ 因此是弱闭的[1].

另一方面，由第 121 页的引理 3，只需证明假设为弱闭的集 Γ 是超限闭的.

设 $\{f_\xi\}$ 为满足

$$f_\xi \in \Gamma \quad \text{且} \quad |f_\xi| \leqslant M \quad \text{对} \quad 1 \leqslant \xi < \vartheta \tag{25}$$

[1]这一定理对任意 (B) 型空间都成立.

的型为 ϑ 的序列，$\{x_i\}$ 为 E 中稠密集. 由假设，对每个自然数 n 存在序数 ξ_n 使得

$$\varliminf_{\xi\to\vartheta} f_\xi(x_i)-\frac{1}{n}\leqslant f_{\xi_n}(x_i)\leqslant\varlimsup_{\xi\to\vartheta} f_\xi(x_i)+\frac{1}{n}\quad 对\quad 1\leqslant i\leqslant n. \tag{26}$$

既然空间 E 可分，由第 123 页的定理 3 可从序列 $\{f_{\xi_n}\}$ 中抽取弱收敛的子列. 以 f 表示序列 $\{f_{\xi_n}\}$ 的弱极限，由 (25) 有 $f\in\Gamma$，同时由 (26) 得 f 是序列 $\{f_\xi\}$ 的超限极限. □

第 122 页的定理 1 和刚才建立的定理 5 立即蕴含

定理 8.7. 若 (B) 型空间 E 可分，则给定定义在 E 上的弱闭线性泛函向量集 Γ 以及任意不属于 Γ 的线性泛函 f_0，对每个满足条件

$$0<M<|f-f_0|\quad 对所有\quad f\in\Gamma$$

的数 M，存在元素 $x_0\in E$ 使得

$$f_0(x_0)=1,\quad f(x_0)=0\quad 对所有\quad f\in\Gamma\quad 且\quad |x_0|<\frac{1}{M}.$$

由第 121 页的引理 3，定理 5 蕴含在可分 (B) 型空间 E 中线性泛函集的正则闭、超限闭与弱闭这三个概念是等价的.

由此，考虑到第 117 页的注释，得

定理 8.8. 若 (B) 型空间 E 可分且 Γ 为定义在 E 上的线性泛函集，它不仅是向量和弱闭的，而且是全的，则 Γ 包含定义在 E 上的所有线性泛函（即 $\Gamma=\overline{E}$）.

第 6 节　空间 (C), $(L^{(p)})$, (c), $(l^{(p)})$ 中线性泛函弱收敛的条件

下面依次研究某些特殊的可分 (B) 型空间中线性泛函的弱收敛. 这些空间是 (C), $(L^{(p)})$ $(p\geqslant 1)$, (c) 和 $(l^{(p)})$（$p\geqslant 1$）.

构成可数稠密集的是：在 (C) 和 $(L^{(p)})$ 中是有理系数多项式，在 (c) 中（相应地，在 $(l^{(p)})$ 中）是从某个充分大的指标开始保持常数（相应地，等于 0）的有理数列.

空间 $(L^{(p)})$（$p>1$）. 定义在 $(L^{(p)})$ 上的每个线性泛函 $f(x)$ 形如（参见第四章 §4，第 64 页）

$$\int_0^1 x(t)\alpha(t)\,\mathrm{d}t\quad 其中\quad \alpha(t)\in\left(L^{\left(\frac{p}{p-1}\right)}\right), \tag{27}$$

泛函序列

$$\{f_n(x)\}=\left\{\int_0^1 x(t)\alpha_n(t)\,\mathrm{d}t\right\}\quad 其中\quad \alpha_n(t)\in\left(L^{\left(\frac{p}{p-1}\right)}\right) \tag{28}$$

弱收敛于泛函 (27)，如果对 $(L^{(p)})$ 中的每个函数 $x(t)$ 有

$$\lim_{n\to\infty}\int_0^1 x(t)\alpha_n(t)\,\mathrm{d}t=\int_0^1 x(t)\alpha(t)\,\mathrm{d}t. \tag{29}$$

可以证明，序列 (28) 弱收敛于泛函 (27) 的充要条件是同时满足：

$$\text{序列}\left\{\int_0^1 |\alpha_n(t)|^{\frac{p}{p-1}}\,\mathrm{d}t\right\}\text{有界} \tag{30}$$

且

$$\lim_{n\to\infty}\int_0^u \alpha_n(t)\,\mathrm{d}t=\int_0^u \alpha(t)\,\mathrm{d}t \quad \text{对} \quad 0\leqslant u\leqslant 1^1. \tag{31}$$

证明由第 123 页的定理 2 得出，因为有 $\|f_n\|=\left[\int_0^1 |\alpha_n(t)|^{\frac{p}{p-1}}\,\mathrm{d}t\right]^{\frac{p-1}{p}}$，此外由条件

$$x_u(t)=\begin{cases}1 & \text{对}\quad 0\leqslant t\leqslant u,\\ 0 & \text{对}\quad u<t\leqslant 1\end{cases}$$

定义的函数 $x_u(t)$（$0\leqslant u\leqslant 1$）在 $(L^{(p)})$ 中构成全集，且最后有 $\int_0^1 x_u(t)\alpha_n(t)\,\mathrm{d}t=\int_0^u \alpha_n(t)\,\mathrm{d}t$（$n=1,2,\ldots$）.

空间 (L). 定义在 (L) 上的每个线性泛函 $f(x)$ 形如

$$f(x)=\int_0^1 x(t)\alpha(t)\,\mathrm{d}t \quad \text{其中} \quad \alpha(t)\in(M) \tag{32}$$

（参见第四章 §4，第 65 页），泛函序列

$$\{f_n(x)\}=\left\{\int_0^1 x(t)\alpha_n(t)\,\mathrm{d}t\right\} \quad \text{其中} \quad \alpha_n(t)\in(M) \tag{33}$$

弱收敛于泛函 (32)，如果对 (L) 中的每个函数 $x(t)$ 有

$$\lim_{n\to\infty}\int_0^1 x(t)\alpha_n(t)\,\mathrm{d}t=\int_0^1 x(t)\alpha(t)\,\mathrm{d}t. \tag{34}$$

与上类似可证，序列 (33) 弱收敛于泛函 (32) 的充要条件是同时满足：

(35) 序列 $\{\alpha_n(t)\}$ 的函数一致有界，至多除去一个 Lebesgue 测度为零的 t 值集，

(36) $\lim\limits_{n\to\infty}\int_0^u \alpha_n(t)\,\mathrm{d}t=\int_0^u \alpha(t)\,\mathrm{d}t \quad$ 对 $\quad 0\leqslant u\leqslant 1^2$.

空间 $(l^{(p)})$（$p\geqslant 1$）. 定义在 $(l^{(p)})$ 上的每个线性泛函 $f(x)$ 形如

---

[1]条件 (30) 和 (31) 显然是 (29) 成立的充要条件.

[2]条件 (30) 和 (31) 是 (29) 成立的充要条件，条件 (35) 和 (36) 对性质 (34) 同样如此.

$$f(x)=\sum_{i=1}^{\infty}\alpha_i\xi_i \quad \text{其中} \quad x=\{\xi_i\}\in(l^{(p)})\ \text{且}\{\alpha_i\}\in\begin{cases}\left(l^{\left(\frac{p}{p-1}\right)}\right) & \text{对}p>1,\\ (M) & \text{对}p=1,\end{cases} \tag{37}$$

（参见第四章 §4，第 67–68 页），泛函序列

$$\{f_n(x)\}=\left\{\sum_{i=1}^{\infty}\alpha_{in}\xi_i\right\} \quad \text{其中} \quad \{\alpha_{in}\}\in\begin{cases}\left(l^{\left(\frac{p}{p-1}\right)}\right) & \text{对}p>1,\\ (M) & \text{对}p=1,\end{cases} \tag{38}$$

弱收敛于泛函 (37)，如果对 $(l^{(p)})$ 中的每个 $x=\{\xi_i\}$ 有

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{\infty}\alpha_{in}\xi_i=\sum_{i=1}^{\infty}\alpha_i\xi_i. \tag{39}$$

序列 (38) 弱收敛于泛函 (37) 的充要条件是同时满足：

$$\text{序列}\begin{cases}\left\{\sum_{i=1}^{\infty}|\alpha_{in}|^{\frac{p}{p-1}}\right\} & \text{对}p>1,\\ \left\{\sup\limits_{1\leqslant i<\infty}|\alpha_{in}|\right\} & \text{对}p=1\end{cases}\ \text{有界} \tag{40}$$

且

$$\lim_{n\to\infty}\alpha_{in}=\alpha_i \quad \text{对} \quad i=1,2,\dots \tag{41}$$

证明由 §4 第 123 页的定理 2 得出，基于如下事实：元素

$$x_j=\{\xi_{ij}\} \quad \text{其中} \quad \xi_{ij}=\begin{cases}1 & \text{对} \quad i=j,\\ 0 & \text{对} \quad i\neq j\end{cases}$$

在 $(l^{(p)})$ 中构成全序列，且对所有自然数 j 和 n 有 $f_n(x_j)=\alpha_{jn}$；最后还要考虑第 68 页给出的 $(l^{(p)})$ 空间中线性泛函范数的表示.

注释 8.9. 条件 (40) 和 (41) 同时也是 (39) 成立的充要条件.

空间 (c). 鉴于定义在 (c) 上的线性泛函的一般形式

$$f(x)=A\lim_{i\to\infty}\xi_i+\sum_{i=1}^{\infty}\alpha_i\xi_i \quad \text{其中} \quad x=\{\xi_i\}\in(c)\ \text{且}\{\alpha_i\}\in(l) \tag{42}$$

（参见第四章 §4，第 66 页），线性泛函序列

$$\{f_n(x)\} = \left\{ A_n \lim_{i\to\infty} \xi_i + \sum_{i=1}^{\infty} \alpha_{in}\xi_i \right\} \quad \text{其中} \quad \{\alpha_{in}\} \in (l)\ \text{对} n = 1, 2, \ldots \tag{43}$$

弱收敛于泛函 (42)，如果对 (c) 中的每个 $x = \{\xi_i\}$ 有

$$\lim_{n\to\infty} \left[A_n \lim_{i\to\infty} \xi_i + \sum_{i=1}^{\infty} \alpha_{in}\xi_i \right] = A \lim_{i\to\infty} \xi_i + \sum_{i=1}^{\infty} \alpha_i\xi_i. \tag{44}$$

容易证明，序列 (43) 弱收敛于泛函 (42) 的充要条件是同时满足：

(45) 序列 $\left\{ \sum_{i=1}^{\infty} |\alpha_{in}| \right\}$ 有界，

(46) $\lim_{n\to\infty} A_n = A$ 且 $\lim_{n\to\infty} \alpha_{in} = \alpha_i$ $(i = 1, 2, \ldots)$.

第 7 节 某些空间中有界集的弱紧性

前述结果允许通过第 123 页的定理 3 推出以下定理.

对 $(L^{(p)})$ $(p > 1)$. 满足条件

$$\int_0^1 |\alpha_n(t)|^p \, \mathrm{d}t < M$$

的每个函数序列 $\{\alpha_n(t)\}$（其中 $\alpha_n(t) \in (L^{(p)})$），其中 M 是不依赖于 n 的数，都含有子列 $\{\alpha_{n_i}(t)\}$ 使得对某函数 $\alpha_0(t) \in (L^{(p)})$ 有

$$\lim_{i\to\infty} \int_0^1 \alpha_{n_i}(t)x(t) \, \mathrm{d}t = \int_0^1 \alpha_0(t)x(t) \, \mathrm{d}t \quad \text{对所有} \quad x(t) \in \left(L^{\left(\frac{p}{p-1}\right)}\right)$$[1].

事实上，表达式 $\int_0^1 \alpha_n(t)x(t)\,\mathrm{d}t$ $(n = 1, 2, \ldots)$ 可视为定义在 $(L^{(\frac{p}{p-1})})$ 上的线性泛函. 其范数集有界且空间 $(L^{(\frac{p}{p-1})})$ 可分，因此由第 123 页的定理 3 可从序列 $\{\alpha_n(t)\}$ 中抽取弱收敛子列；然后只需将 §6 中对 $(L^{(p)})$ 空间建立的结论应用于 p 换为 $\frac{p}{p-1}$ 的情形.

对 (M). 满足范数一致有界的每个函数序列 $\{\alpha_n(t)\}$（其中 $\alpha_n(t) \in (M)$）都含有子列 $\{\alpha_{n_i}(t)\}$ 使得对某函数 $\alpha_0(t) \in (M)$ 有

$$\lim_{i\to\infty} \int_0^1 \alpha_{n_i}(t)x(t) \, \mathrm{d}t = \int_0^1 \alpha_0(t)x(t) \, \mathrm{d}t \quad \text{对所有} \quad x(t) \in (L).$$

证明与前述类似.

对 $(l^{(p)})$ $(p > 1)$ 和 (m) 有类似的定理.

[1]这就是泛函分析意义下的弱紧性定理.

第 8 节　定义在线性泛函空间中的弱连续线性泛函

以 $F(f)$（其中 $f \in \overline{E}$）表示定义于 E（假设为 (B) 型空间）上所有线性泛函之集 $\overline{E}$ 上的泛函，如果对每个弱收敛于 f 的线性泛函序列 $\{f_n\}$ 都有 $\lim_{n\to\infty} F(f_n) = F(f)$，则称泛函 $F(f)$ 是**弱连续的**.

定理 8.10. 若 (B) 型空间 E 可分且定义于 $f \in \overline{E}$ 上的线性泛函 $F(f)$ 是弱连续的，则存在元素 $x_0 \in E$ 使得

$$F(f) = f(x_0) \quad \text{对所有} \quad f \in \overline{E}. \tag{47}$$

证明. 以 Γ 表示满足方程 $F(f) = 0$ 的所有泛函 $f \in \overline{E}$ 之集，F 的弱连续性容易推出 Γ 是弱闭集. 显然可以假设 $\Gamma \neq \overline{E}$. 设 f_0 为满足方程

$$F(f_0) = 1 \tag{48}$$

的线性泛函.

由此由第 125 页的定理 6 推出存在 $x_0 \in E$ 使得

$$f_0(x_0) = 1 \quad \text{且} \quad f(x_0) = 0 \quad \text{对所有} \quad f \in \Gamma. \tag{49}$$

而恒等式

$$f = f_0 \cdot F(f) + \varphi \quad \text{对所有} \quad f \in \overline{E}, \quad \text{其中} \quad \varphi = f - f_0 \cdot F(f), \tag{50}$$

依 (48) 给出 $F(\varphi) = 0$，因此 $\varphi \in \Gamma$ 从而由 (49) 得 $\varphi(x_0) = 0$，这由 (50) 推出性质 (47)，证毕. □

注释 8.11. 若空间 E 不可分，定理 8 仍然成立，只要泛函 $F(f)$ 是线性的且以 Γ 表示的集是正则闭的（这允许在推理中引用第 122 页的定理 1 代替第 125 页的定理 6）.

第九章

元素的弱收敛序列

第 1 节　定义. 元素序列弱收敛的条件

E 中元素序列 $\{x_n\}$ 称为**弱收敛**于元素 $x \in E$，若对所有 $f \in \overline{E}$ 都有

$$\lim_{n\to\infty} f(x_n) = f(x) \tag{1}$$

即在给定空间 E 中定义的每个线性泛函 f.

定理 9.1. 序列 $\{x_n\}$ 弱收敛于 x 的充要条件是同时满足

(1) 序列 $\{|x_n|\}$ 有界，且

(2) $\lim\limits_{n\to\infty} \varphi(x_n) = \varphi(x)$ 对所有 $\varphi \in \Delta$ 成立，其中 Δ 是 $\overline{E}$ 中稠密集.

证明. (1) 的必要性由第五章 §1 定理 6（第 80 页）得出，(2) 的必要性显然.

为证明充分性，考虑任意泛函 $f \in \overline{E}$. 由 (2)，对任意 $\varepsilon > 0$，存在泛函 $\varphi \in \Delta$ 使得 $|\varphi - f| < \dfrac{\varepsilon}{2M}$，其中 M 表示 $|x_n|$ 和 $|x|$ 的上确界，由 (1) 知其存在. 因此

$$|f(x - x_n)| \leqslant |\varphi(x - x_n)| + \frac{\varepsilon}{2M} \cdot |x - x_n| \leqslant |\varphi(x - x_n)| + \varepsilon;$$

因 $\lim\limits_{n\to\infty} \varphi(x_n) = \varphi(x)$ 且 ε 任意，故 $\lim\limits_{n\to\infty} f(x_n) = f(x)$，即序列 $\{x_n\}$ 弱收敛于 x. □

注释 9.2. 实际上，只需假设由 Δ 中泛函构成的线性组合在 $\overline{E}$ 中稠密即可.

定理 9.3. 若序列 $\{x_n\}$ 弱收敛于 x，则存在由 $\{x_n\}$ 中元素的线性组合构成的序列 $\{g_n\}$ 使得 $\lim\limits_{n\to\infty} g_n = x$.

此定理的证明由第四章 §3 定理 6（第 58 页）及元素序列弱收敛的定义得出.

第 2 节 空间 (C), $(L^{(p)})$, (c), $(l^{(p)})$ 中元素序列的弱收敛

下面讨论在最重要的具体空间中元素序列的弱收敛.

空间 (C). 鉴于 (C) 中线性泛函的一般形式（见第 61 页），连续函数序列 $\{x_n(t)\}$ 弱收敛于连续函数 $x(t)$ 的充要条件是：对所有有界变差函数 $g(t)$ 都有

$$\lim_{n\to\infty}\int_0^1 x_n(t)\,\mathrm{d}g(t)=\int_0^1 x(t)\,\mathrm{d}g(t). \tag{3}$$

由此可得，$x_n(t)\in(C)$ 的函数序列弱收敛于 $x(t)\in(C)$ 的充要条件是同时满足

(4) 函数 $x_n(t)$（$n=1,2,\ldots$）整体有界，

(5) $\lim\limits_{n\to\infty} x_n(t)=x(t)$ 对所有 $t\in[0,1]$ 成立.

事实上, (4) 的必要性由第 133 页定理 1 得出, (5) 的必要性则由如下事实推出：对任意 $t_0\in[0,1]$，泛函 $f(x)=x(t_0)$ 是线性的，故 $\lim\limits_{n\to\infty} f(x_n)=f(x)$，从而 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n(t_0)=x(t_0)$.

充分性在于条件 (4) 和 (5) 蕴含等式 (3) 对所有有界变差函数 $g(t)$ 成立（参见引言 §5，第 7 页）.

由此及第 134 页定理 2 可得如下定理：

若连续函数序列 $\{x_n(t)\}$（$0\leqslant t\leqslant 1$）有界且处处收敛于连续函数 $x(t)$，则存在由序列 $\{x_n(t)\}$ 的项构成的多项式序列一致收敛于 $x(t)$.

这是连续函数空间的一个值得注意的性质，但对 Baire 第一类函数等已不成立.

空间 $(L^{(p)})$ **其中** $p>1$. 序列 $\{x_n(t)\}$（$x_n(t)\in(L^{(p)})$）弱收敛于 $x(t)\in(L^{(p)})$ 是指：对所有 $\alpha(t)\in(L^{(\frac{p}{p-1})})$ 都有

$$\lim_{n\to\infty}\int_0^1 x_n(t)\alpha(t)\,\mathrm{d}t=\int_0^1 x(t)\alpha(t)\,\mathrm{d}t.$$

由此及第 128 页的注记得如下定理：

$x_n(t)\in(L^{(p)})$ 的函数序列弱收敛于 $x(t)\in(L^{(p)})$ 的充要条件是同时满足

(6) 序列 $\left\{\int_0^1 |x_n(t)|^p\,\mathrm{d}t\right\}$ 有界，且

(7) $\lim\limits_{n\to\infty}\int_0^u x_n(t)\,\mathrm{d}t=\int_0^u x(t)\,\mathrm{d}t$ 对 $0\leqslant u\leqslant 1$ 成立.[1]

空间 (L). 序列 $\{x_n(t)\}$ 弱收敛于 $x_0(t)$（$x_n\in(L)$，$x_0\in(L)$，$0\leqslant t\leqslant 1$）是指：对所有有界函数 $\alpha(t)$ 都有

$$\lim_{n\to\infty}\int_0^1 x_n(t)\alpha(t)\,\mathrm{d}t=\int_0^1 x_0(t)\alpha(t)\,\mathrm{d}t. \tag{8}$$

由此可得如下定理：

$x_n(t)\in(L)$ 的函数序列弱收敛于 $x(t)\in(L)$ 的充要条件是同时满足下列条件：

[1]条件 (7) 可用如下条件代替：$\lim\limits_{n\to\infty}\int_H x_n(t)\,\mathrm{d}t=\int_H x(t)\,\mathrm{d}t$ 对所有 $[0,1]$ 中具有正测度的可测集 H 成立.

(9) 序列 $\left\{\int_0^1 |x_n(t)|\,\mathrm{d}t\right\}$ 有界，

(10) 对每个 $\varepsilon>0$，存在 $\eta>0$ 使得

$$\left|\int_H x_n(t)\,\mathrm{d}t\right| \leqslant \varepsilon \quad (n=1,2,\ldots)$$

对所有测度 $<\eta$ 的 t 值集合 H 成立，[1]

(11) $\lim\limits_{n\to\infty}\int_0^u x_n(t)\,\mathrm{d}t=\int_0^u x_0(t)\,\mathrm{d}t$ 对 $0\leqslant u\leqslant 1$ 成立.

事实上，(8) 等价于等式 $\lim\limits_{n\to\infty}\int_0^1[x_n(t)-x_0(t)]\alpha(t)\,\mathrm{d}t=0$ 对 $\alpha(t)\in(M)$ 成立；利用第 7 页所述的 Lebesgue 定理（参见引言 §6），该定理容易得出.

空间 (c). 序列 $\{x_n\}$（$x_n=\{\xi_i^n\}\in(c)$）弱收敛于 $x=\{\xi_i\}\in(c)$ 的充要条件是同时满足：

(12) 序列 $\{|x_n|\}$ 有界，

(13) $\lim\limits_{n\to\infty}\xi_i^n=\xi_i$ 且 $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\lim\limits_{i\to\infty}\xi_i^n\right)=\lim\limits_{i\to\infty}\xi_i$.

证明是直接的，因为 (c) 中每个线性泛函形如 $f(x)=C\lim\limits_{i\to\infty}\xi_i+\sum\limits_{i=1}^{\infty}C_i\xi_i$（$x=\{\xi_i\}$）且 $|f|=|C|+\sum\limits_{i=1}^{\infty}|C_i|$（见第 66 页），并注意若令

$$f_i(x)=\begin{cases}\lim\limits_{i\to\infty}\xi_i & 对 i=0,\\ \xi_i & 对 i\geqslant 1,\end{cases}$$

则由序列 $\{f_i(x)\}$（$i=0,1,2,\ldots$）的项构成的线性组合在 (c) 中所有线性泛函构成的集合中稠密.

空间 $(l^{(p)})$ **其中** $p>1$. 序列 $\{x_n\}$（$x_n=\{\xi_i^{(n)}\}\in(l^{(p)})$）弱收敛于 $x=\{\xi_i\}\in(l^{(p)})$ 的充要条件是同时满足

(14) 序列 $\left\{\sum\limits_{i=1}^{\infty}|\xi_i^{(n)}|^p\right\}$ 有界，且

(15) $\lim\limits_{n\to\infty}\xi_i^{(n)}=\xi_i$ 对所有 $i=1,2,\ldots$ 成立.

证明由第 129 页的注记得出.

空间 (l). 序列 $\{x_n\}$ ($x_n=\{\xi_i^{(n)}\}\in(l)$) 弱收敛于 $x=\{\xi_i\}\in(l)$ 的充要条件是 $\lim\limits_{n\to\infty}|x_n-x|=0$，即

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{\infty}|\xi_i^{(n)}-\xi_i|=0.$$

由此可得：

[1]此条件也可表述为：函数族 $\int_0^u x_n(t)\,\mathrm{d}t$ 等度绝对连续（参见引言 §6，第 7 页）.

在 (l) 空间中弱收敛等价于依范数收敛.

证明. 设 $\{x_n\}$ 弱收敛于 x. 记 $\eta_i^{(n)}=\xi_i^{(n)}-\xi_i$，则序列 $\{y_n\}$（$y_n=\{\eta_i^{(n)}\}$）当 $n\to\infty$ 时弱收敛于 Θ. 因此对所有有界数列 $\{c_i\}$ 都有

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{\infty}c_i\eta_i^{(n)}=0. \tag{16}$$

令

$$c_i=\begin{cases}1 & 对 j=i,\\ 0 & 对 j\neq i,\end{cases}$$

得

$$\lim_{n\to\infty}\eta_j^{(n)}=0\quad 对所有 j=1,2,\dots \tag{17}$$

需证明

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{\infty}|\eta_i^{(n)}|=\lim_{n\to\infty}|y_n|=0. \tag{18}$$

反之假设

$$\overline{\lim_{n\to\infty}}\sum_{i=1}^{\infty}|\eta_i^{(n)}|>\varepsilon>0. \tag{19}$$

如下归纳定义两个递增自然数序列 $\{n_k\}$ 和 $\{r_k\}$：

1° n_1 是满足 $\sum_{i=1}^{\infty}|\eta_i^{(n)}|>\varepsilon$ 的最小 n,

2° r_1 是满足 $\sum_{i=1}^{r}|\eta_i^{(n_1)}|>\frac{\varepsilon}{2}$ 且 $\sum_{i=r+1}^{\infty}|\eta_i^{(n_1)}|<\frac{\varepsilon}{5}$ 的最小 r,

3° n_k 是超过 n_{k-1} 且满足 $\sum_{i=1}^{\infty}|\eta_i^{(n_k)}|>\varepsilon$ 和 $\sum_{i=1}^{r_{k-1}}|\eta_i^{(n_k)}|<\frac{\varepsilon}{5}$ 的最小自然数,

4° r_k 是超过 r_{k-1} 且满足 $\sum_{i=r_{k-1}+1}^{r_k}|\eta_i^{(n_k)}|>\frac{\varepsilon}{2}$ 和 $\sum_{i=r_k+1}^{\infty}|\eta_i^{(n_k)}|<\frac{\varepsilon}{5}$ 的最小自然数.

如此定义的序列 $\{n_k\}$ 和 $\{r_k\}$ 存在，由 (17) 和 (19). 现令

$$c_i=\begin{cases}\operatorname{sign}\eta_i^{(n_1)} & 对 1\leqslant i\leqslant r_1,\\ \operatorname{sign}\eta_i^{(n_{k+1})} & 对 r_k<i\leqslant r_{k+1}.\end{cases} \tag{20}$$

于是 $|c_i|=1$ 对所有 $i=1,2,\dots$，故由 (16)

$$\lim_{k\to\infty}\sum_{i=1}^{\infty}c_i\eta_i^{(n_k)}=0. \tag{21}$$

但由 (20), $\left|\sum_{i=1}^{\infty} c_i\eta_i^{(n_k)}\right| \geqslant \sum_{i=r_{k-1}+1}^{r_k} |\eta_i^{(n_k)}| - \sum_{i=1}^{r_{k-1}} |\eta_i^{(n_k)}| - \sum_{i=r_k+1}^{\infty} |\eta_i^{(n_k)}|$, 故由 3° 和 4°, $\left|\sum_{i=1}^{\infty} c_i\eta_i^{(n_k)}\right| \geqslant \frac{\varepsilon}{2} - \frac{\varepsilon}{5} - \frac{\varepsilon}{5} = \frac{\varepsilon}{10}$ 对所有 $k = 1, 2, \ldots$, 这与 (21) 矛盾. 故 (18) 成立. □

第 3 节　空间 $(L^{(p)})$ 和 $(l^{(p)})$ 中弱收敛与强收敛的关系（$p > 1$）

关于元素弱收敛与依范数收敛的关系，对空间 $(L^{(p)})$ 和 $(l^{(p)})$（$p > 1$）可建立如下更一般的定理:

若序列 $\{x_n(t)\}$（$x_n(t) \in (L^{(p)})$，$p > 1$）弱收敛于 $x(t) \in (L^{(p)})$，且

$$\lim_{n\to\infty} \int_0^1 |x_n(t)|^p \,\mathrm{d}t = \int_0^1 |x(t)|^p \,\mathrm{d}t,$$

则序列 $\{x_n(t)\}$ 依范数收敛于 $x(t)$，即

$$\lim_{n\to\infty} \int_0^1 |x_n(t) - x(t)|^p \,\mathrm{d}t = 0.$$[1]

下面证明空间 $(l^{(p)})$（$p > 1$）的类似定理（$p = 1$ 的情形已在 §2 讨论）.

若序列 $\{x_n\}$（$x_n = \{\xi_i^{(n)}\} \in (l^{(p)})$，$p \geqslant 1$）弱收敛于 $x = \{\xi_i\} \in (l^{(p)})$，且

$$\lim_{n\to\infty} |x_n| = |x|,$$

则

$$\lim_{n\to\infty} |x_n - x| = 0. \tag{22}$$

证明. 由第 137 页 (15),

$$\lim_{n\to\infty} \xi_i^{(n)} = \xi_i \tag{23}$$

且

$$\sqrt[p]{\sum_{i=1}^{\infty} |\xi_i^{(n)} - \xi_i|^p} \leqslant \sqrt[p]{\sum_{i=1}^{N-1} |\xi_i^{(n)} - \xi_i|^p} + \sqrt[p]{\sum_{i=N}^{\infty} |\xi_i^{(n)} - \xi_i|^p} \tag{24}$$

其中 N 为任意自然数. 而

$$\sqrt[p]{\sum_{i=N}^{\infty} |\xi_i^{(n)} - \xi_i|^p} \leqslant \sqrt[p]{\sum_{i=N}^{\infty} |\xi_i^{(n)}|^p} + \sqrt[p]{\sum_{i=N}^{\infty} |\xi_i|^p}$$

[1]这是 H. Riesz 对 Fréchet 关于空间 $(L^{(2)})$ 的定理的推广.

故由假设及 (23) 和 (24)

$$\overline{\lim_{n\to\infty}}\sum_{i=1}^{\infty}|\xi_i^{(n)}-\xi_i|^p \leqslant \left[2\sqrt[p]{\sum_{i=N}^{\infty}|\xi_i|^p}\right]^p = 2^p\sum_{i=N}^{\infty}|\xi_i|^p.$$

因 $\lim\limits_{N\to\infty}\sum\limits_{i=N}^{\infty}|\xi_i|^p = 0$ 且 N 任意，故得 (22). □

第 4 节 弱完备空间

在 (B) 型空间 E 中给定序列 $\{x_n\}$，使得对所有定义在 E 中的线性泛函 $f(x)$，$\lim\limits_{n\to\infty} f(x_n)$ 都存在，但可能不存在任何元素 $x_0 \in E$ 使得序列 $\{x_n\}$ 弱收敛于 x_0，即对所有线性泛函 $f \in \overline{E}$ 同时有 $\lim\limits_{n\to\infty} f(x_n) = f(x_0)$.

在空间 (C) 中可举例如下. 设 $\{x_n(t)\}$（$0 \leqslant t \leqslant 1$）为一列整体有界且处处收敛于不连续函数 $z(t)$ 的连续函数. 则对所有有界变差函数 $g(t)$，$\lim\limits_{n\to\infty}\int_0^1 x_n(t)\,\mathrm{d}g$ 都存在（参见引言 §5，第 7 页），但序列 $\{x_n(t)\}$ 不弱收敛于任何连续函数.

然而有如下定理：

在 $(L^{(p)})$ 和 $(l^{(p)})$ 空间（$p \geqslant 1$）中，对序列 $\{x_n\}$，若对所有线性泛函 f，$\lim\limits_{n\to\infty} f(x_n)$ 都存在，则蕴含序列 $\{x_n\}$ 弱收敛于某元素 x_0.

对 (L) 的证明. 若 $\lim\limits_{n\to\infty}\int_0^1 x_n(t)\alpha(t)\,\mathrm{d}t$（$x_n(t) \in (L)$）对所有 $\alpha(t) \in (M)$ 都存在，则显然

$$\lim_{\substack{p\to\infty\\ q\to\infty}}\int_0^1 [x_p(t)-x_q(t)]\alpha(t)\,\mathrm{d}t = 0 \quad 对所有\alpha(t)\in(M).$$

下面证明：对每个 $\varepsilon > 0$，存在 $\eta > 0$ 和自然数 N 使得

$$\int_H |x_N(t)-x_n(t)|\,\mathrm{d}t < \varepsilon \tag{25}$$

对所有 $n \geqslant N$ 和所有测度 $< \eta$ 的集合 H 成立.

事实上，否则存在两列无限递增的自然数 $\{p_k\}$ 和 $\{n_k\}$ 及一列测度趋于 0 的集合 $\{H_k\}$ 使得 $\int_{H_k}|x_{p_k}(t)-x_{n_k}(t)|\,\mathrm{d}t \geqslant \varepsilon$，故对所有 $\alpha(t) \in (M)$ 有 $\lim\limits_{k\to\infty}\int_0^1 [x_{p_k}(t)-x_{n_k}(t)]\alpha(t)\,\mathrm{d}t = 0$，这与 Lebesgue 定理矛盾（参见引言 §6，第 7 页）.

由此，特别地，若 η 足够小，对所有 $n = 1, 2, \ldots$ 有 $\int_H |x_n(t)|\,\mathrm{d}t < \frac{1}{2}\varepsilon$，故由 (25)，

$$\int_H |x_n(t)|\,\mathrm{d}t < \frac{3}{2}\varepsilon \quad 对所有n = 1, 2, \ldots \tag{26}$$

只要 H 的测度 $\leqslant \eta$.

记

$$\lim_{n\to\infty}\int_0^t x_n(u)\,\mathrm{d}u=\beta(t). \tag{27}$$

下面证明函数 $\beta(t)$ 是绝对连续的.

事实上，由 (26)，对每个 $\varepsilon>0$，存在 $\eta>0$ 使得对所有 $n=1,2,\ldots$ 和所有测度 $<\eta$ 的集合 H 有 $\displaystyle\int_H |x_n(t)|\,\mathrm{d}t<\varepsilon$. 特别地，若 H 由有限个端点为 t_i 和 t_i' 的互不相交的线段组成，则有 $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\int_H x_n(t)\,\mathrm{d}t=\lim_{n\to\infty}\sum_i\int_{t_i}^{t_i'}x_n(t)\,\mathrm{d}t=\sum_i[\beta(t_i')-\beta(t_i)]$，故 $\displaystyle\left|\sum_i[\beta(t_i')-\beta(t_i)]\right|\leqslant\varepsilon$，这表达了函数 $\beta(t)$ 的绝对连续性.

由此，只需令 $\beta'(t)=x_0(t)$，即可由 (27) 及第 128 页建立的弱收敛条件得出序列 $\{x_n(t)\}$ 弱收敛于 $x_0(t)$.

对 $(L^{(p)})$ $(p>1)$ **的证明**. 设 $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\int_0^1 x_n(t)y(t)\,\mathrm{d}t$ （$x_n(t)\in(L^{(p)})$ 对所有 $n=1,2,\ldots$）对所有 $y(t)\in(L^{(\frac{p}{p-1})})$ 都存在. 泛函 $f_n(y)=\displaystyle\int_0^1 x_n(t)y(t)\,\mathrm{d}t$ 在 $(L^{(\frac{p}{p-1})})$ 中显然是线性的，且因由假设，$\lim\limits_{n\to\infty}f_n(y)$ 对所有 $y(t)\in(L^{(\frac{p}{p-1})})$ 都存在，故泛函 $f(y)=\lim\limits_{n\to\infty}f_n(y)$ 据第一章 §3 定理 4（第 23 页）在 $(L^{(\frac{p}{p-1})})$ 中也是线性的；因此（参见第四章 §4，第 64 页）形如 $f(y)=\displaystyle\int_0^1 x_0(t)y(t)\,\mathrm{d}t$ （$y\in(L^{(\frac{p}{p-1})})$，$x_0\in(L^{(p)})$）.

由此

$$\lim_{n\to\infty}\int_0^1 x_n(t)y(t)\,\mathrm{d}t=\int_0^1 x_0(t)y(t)\,\mathrm{d}t\quad \text{对所有}y\in(L^{(\frac{p}{p-1})}),$$

即 $\{x_n\}$ 弱收敛于 x_0.

对 (l) **的证明**类似于 §2 第 137–139 页建立的定理的证明，在于证明序列 $\{x_n\}$ 依范数收敛于某元素 x_0.

对 $(l^{(p)})$ $(p>1)$ **的证明**类似于对 $(L^{(p)})$ 的证明.

第 5 节　关于元素弱收敛的一个定理

以下面的一般定理结束本章.

定理 9.4. 设 $y=U(x)$ 为定义在 (B) 型空间 E 中、取值于同样为 (B) 型空间 E_1 的线性算子，若序列 $\{x_n\}$ 在 E 中弱收敛于 x_0，则序列 $\{U(x_n)\}$ 在 E_1 中弱收敛于 $U(x_0)$.

证明. 设 Y 为定义在 E_1 中的任意线性泛函，则泛函 $Y[U(x)]=X(x)$ 在 E 中显然是可加的且连续的，因为

$$|X(x)|=|Y[U(x)]|\leqslant|Y|\cdot|U(x)|\leqslant|Y|\cdot|U|\cdot|x|.$$

$\{x_n\}$ 弱收敛于 x_0 蕴含

$$\lim_{n\to\infty} Y[U(x_n)] = \lim_{n\to\infty} X(x_n) = X(x_0) = Y[U(x_0)],$$

即 $\{U(x_n)\}$ 弱收敛于 $U(x_0)$. □

注释 9.5. 在附加假设算子 $y = U(x)$ 全连续的情况下，$\{x_n\}$ 弱收敛于 x_0 蕴含 $\{U(x_n)\}$ 依范数收敛于 $U(x_0)$，即

$$\lim_{n\to\infty} |U(x_n) - U(x_0)| = 0.$$

事实上，否则存在 $\varepsilon > 0$ 和子序列 $\{x_{n_i}\}$ 使得

$$|U(x_{n_i}) - U(x_0)| > \varepsilon \quad 对 i = 1, 2, \ldots \tag{28}$$

而序列 $\{U(x_{n_i})\}$ 同时又依范数收敛于某 $y' \in E_1$. 但 $\{x_{n_i}\}$ 弱收敛于 x_0，另一方面由前述定理 3 蕴含 $\{U(x_{n_i})\}$ 弱收敛于 $U(x_0)$，故 $y' = U(x_0)$，这与 (28) 矛盾.

第十章

线性泛函方程

第 1 节　线性算子与其相伴算子之间的关系

本章讨论形如 $y = U(x)$ 的方程，其中 U 是线性算子，x 的定义域为 (B) 型空间 E，y 的陪域为空间 E' 中的子空间 E_1，而 E' 亦为 (B) 型空间.

定义在 E 上的泛函记为 X，定义在 E' 上的泛函记为 Y.

若由线性算子 $y = U(x)$ 确定的从 E 到 E_1 的变换是一一的，则逆算子 $x = U^{-1}(y)$ 显然是加性的. 容易看出，逆算子存在的充要条件是

$$U(x) = \Theta \quad \text{蕴含} \quad x = \Theta.$$

若逆算子连续，则存在 $M > 0$ 使得 $\|x\| \leqslant M \cdot \|y\|$.

反之，若存在数 $m > 0$ 使得 $m \cdot \|x\| \leqslant \|U(x)\|$，则存在连续的逆算子.

若逆算子连续，则陪域 E_1 是闭的.

事实上，设 $\lim_{n\to\infty} y_n = y$，其中 $y_n = U(x_n)$，则有

$$\lim_{\substack{p\to\infty \\ q\to\infty}} \|x_p - x_q\| \leqslant M \cdot \lim_{\substack{p\to\infty \\ q\to\infty}} \|y_p - y_q\| = 0,$$

于是 $\lim_{n\to\infty} x_n = x$，即得 $U(x) = y$.

若泛函 Y_0 是超限序列 $\{Y_\xi\}$ 的序型为 ϑ 的超限极限，则相伴泛函 $X_0 = \overline{U}(Y_0)$ 是序列 $\{X_\xi\} = \{\overline{U}(Y_\xi)\}$ 的序型为 ϑ 的超限极限.

事实上，对任意 x 和 $1 \leqslant \xi < \vartheta$，都有等式 $X_\xi(x) = Y_\xi[U(x)]$.

引理 10.1. 设相伴算子 $X = \overline{U}(Y)$ 具有连续的逆算子，Γ_1 为 Y 的任意向量的、正则闭的子集，则

对应的集合 $\Gamma = \overline{U}(\Gamma_1)$ 也是正则闭的.

证明. 由假设，存在数 $M > 0$ 使得对所有 Y 都有 $\|\overline{U}(Y)\| \geqslant M \cdot \|Y\|$. 因此，若 $X_\xi \in \overline{U}(\Gamma_1)$ 且对所有 $1 \leqslant \xi < \vartheta$ 都有 $\|X_\xi\| \leqslant C$，其中 $X_\xi = \overline{U}(Y_\xi)$，则也有 $Y_\xi \in \Gamma_1$ 且对所有 $1 \leqslant \xi < \vartheta$ 都有 $\|Y_\xi\| \leqslant \frac{1}{M}C$. 由于 Γ_1 按假设是正则闭的，根据第八章 §3 引理 3（第 121 页），序列 $\{Y_\xi\}$ 存在超限极限 $Y_0 \in \Gamma_1$. 显然泛函 $X_0 = \overline{U}(Y_0)$ 属于 $\overline{U}(\Gamma_1)$ 且是序列 $\{X_\xi\}$ 的超限极限. 因此集合 $\Gamma = \overline{U}(\Gamma_1)$ 是超限闭的，从而由同一引理知它是正则闭的. □

定理 10.1. 若相伴算子 $X = \overline{U}(Y)$ 具有连续的逆算子，则方程 $y = U(x)$ 对任意 y 都有解.

证明. 任给 $y_0 \in E'$，记所有满足 $Y(y_0) = 0$ 的线性泛函 Y 的集合为 Γ_1，记所有形如 $X = \overline{U}(Y)$（其中 $Y \in \Gamma_1$）的泛函 X 的集合为 Γ.

集合 Γ_1 是正则闭的; 由上述引理可知集合 Γ 也是正则闭的. 另一方面，设 Y_0 为满足

$$Y_0(y_0) = 1$$

的线性泛函，则泛函 $X_0 = \overline{U}(Y_0)$ 不属于 Γ. 因此，根据第八章 §3 定理 1（第 122 页），存在元素 $x_0 \in E$ 使得

$$X_0(x_0) = 1 \quad \text{且} \quad X(x_0) = 0 \quad \text{对所有} \quad X \in \Gamma. \tag{1}$$

记

$$y_1 = U(x_0), \tag{2}$$

则有 $Y_0(y_1) = X_0(x_0)$ 且 $Y(y_1) = X(x_0)$，于是由 (1) 得

$$Y_0(y_1) = 1 \quad \text{且} \quad Y(y_1) = 0 \quad \text{对所有} \quad Y \in \Gamma_1. \tag{3}$$

现在，对任意线性泛函 Y，泛函 $\overline{Y} = Y - [Y(y_0)] \cdot Y_0$ 显然属于 Γ_1，因为 $\overline{Y}(y_0) = Y(y_0) - [Y(y_0)] \cdot Y_0(y_0) = 0$. 因此，由 (3) 得

$$\overline{Y}(y_1) = Y(y_1) - [Y(y_0)] \cdot Y_0(y_1) = Y(y_1) - Y(y_0) = 0,$$

于是对所有 Y 都有 $Y(y_1 - y_0) = 0$. 由此得等式 $y_1 - y_0 = 0$，于是由 (2)，对任意预先给定的元素 $y_0 \in E'$ 都有解 $y_0 = U(x_0)$. □

反之，有

定理 10.2. 若方程 $X = \overline{U}(Y)$ 对任意 X 都有解，则

$1°$ 算子 $y = U(x)$ 具有连续的逆算子;

2° $U(x)$ 的陪域是所有满足下列条件的 y 的集合：

$$Y(y) = 0, \quad 若 \quad \overline{U}(Y) = 0. \tag{4}$$

证明. 1°. 若算子 $y = U(x)$ 没有连续的逆算子，则存在 E 中的元素序列 $\{x_n\}$ 使得

$$\lim_{n\to\infty} \|x_n\| = \infty \tag{5}$$

且 $\lim_{n\to\infty} \|y_n\| = 0$，其中 $y_n = U(x_n)$.

然而，由假设方程 $X = \overline{U}(Y)$ 对任意 X 都有解，于是对所有定义在 E 上的泛函 X 都有 $\lim_{n\to\infty} X(x_n) = \lim_{n\to\infty} Y(y_n) = 0$，根据第五章 §1 定理 6（第 80 页）这意味着范数序列 $\{\|x_n\|\}$ 有界，与 (5) 矛盾.

2°. 假设对某个元素 $y_0 \in E'$ 有

$$\overline{U}(Y) = 0 \quad 蕴含 \quad Y(y_0) = 0. \tag{6}$$

算子 $U(x)$ 的陪域 E_1 由 1° 是闭的（参见本章 §1，第 145 页）. 若 y_0 不属于 E_1，则存在（参见第四章 §3 第 57 页的引理）线性泛函 Y_0 使得

$$Y_0(y_0) = 1 \tag{7}$$

且对所有 $y \in E_1$ 都有 $Y_0(y) = 0$. 令 $X_0 = \overline{U}(Y_0)$，则对所有 $y = U(x) \in E_1$ 有 $X_0(x) = Y_0(y) = 0$，于是 $\overline{U}(Y_0) = 0$，由 (6) 这蕴含 $Y_0(y_0) = 0$，与 (7) 矛盾. 因此 $y_0 \in E_1$.

反之，若 $\overline{U}(Y) = X = 0$，则对所有 $y \in E_1$ 都有 $Y(y) = X(x) = 0$. □

在上述定理 1 和 2 中，将 x, y, X, Y, U 和 $\overline{U}$ 分别替换为 $Y, X, y, x, \overline{U}$ 和 U，并在推理中把关于元素的定理替换为相应的关于泛函的定理，就得到下面两个定理.

定理 10.3. 若算子 $y = U(x)$ 具有连续的逆算子，则方程 $X = \overline{U}(Y)$ 对任意定义在 E 上的线性泛函 X 都有解.

定理 10.4. 若方程 $y = U(x)$ 对任意 y 都有解，则

1° 算子 $X = \overline{U}(Y)$ 具有连续的逆算子;

2° 它的陪域是所有满足下列条件的 X 的集合：

$$X(x) = 0, \quad 若 \quad U(x) = 0. \tag{8}$$

由定理 1–4 容易得到以下定理.

定理 10.5. 若方程 $y=U(x)$ 对任意 y 恰有一个解，则方程 $X=\overline{U}(Y)$ 对任意 X 也恰有一个解，反之亦然.

定理 10.6. 若算子 $y=U(x)$ 和 $X=\overline{U}(Y)$ 都具有连续的逆算子，则对任意 y 和任意 X 都存在唯一的 x 和唯一的 Y 使得 $y=U(x)$ 且 $X=\overline{U}(Y)$.

定理 10.7. 若算子 $y=U(x)$ 和 $X=\overline{U}(Y)$ 对任意 y 和任意 X 都有解，则解是唯一的.

下面再证明以下三个定理.

定理 10.8. 若线性算子 $U(x)$ 的陪域是闭的, 则相伴算子 $\overline{U}(Y)$ 的陪域是所有满足条件 (8): $X(x)=0$（若 $U(x)=0$）的 X 的集合.

证明. 算子 $U(x)$ 的陪域 $E_1\subset E'$ 的导集 E_1' 构成一个 (B) 型空间（作为线性闭集）.

设 Z 为定义在 E_1' 上的任意线性泛函，$\overline{U}_1(Z)$ 为满足方程

$$Z[U(x)]=X(x)\quad \text{对所有}\quad x\in E$$

的线性泛函 X. 容易验证算子 $\overline{U}_1(Z)$ 和 $\overline{U}(Y)$ 的陪域相同. 事实上，对任意定义在 E' 上且满足条件

$$Z(y)=Y(y)\quad \text{对所有}\quad y\in E_1', \tag{9}$$

的泛函 Y，对所有 $x\in E$ 都有 $Z[U(x)]=Y[U(x)]$，于是

$$\overline{U}_1(Z)=\overline{U}(Y). \tag{10}$$

由 Z 的定义，根据第四章 §2 定理 2（第 55 页），存在定义在 E' 上且满足条件 (9) 的线性泛函 Y，从而也满足 (10). 条件 (8) 由定理 4，2°（第 148 页）得出，只需将 E' 替换为 E_1. □

定理 10.9. 若线性算子 $\overline{U}(Y)$ 的陪域是闭的, 则算子 $U(x)$ 的陪域是所有满足条件 (4): $Y(y)=0$（若 $\overline{U}(Y)=0$）的 y 的集合.

证明. 设 Z 和 $\overline{U}_1(Z)$ 如在上述定理 8 的证明中所定义，注意 $\overline{U}_1(Z)=\Theta$ 蕴含对所有 $y\in E_1'$ 都有 $Z(y)=0$; 于是 $Z=\Theta$.

Z 和 X 的集合都是 (B) 型空间，根据第三章 §3 定理 5（第 41 页），算子 $X=\overline{U}_1(Z)$ 具有连续的逆算子. 由此根据定理 1（第 146 页），方程 $y=U(x)$ 对所有 $y\in E_1'$ 都有解. 因此算子 $y=U(x)$ 的陪域 $E_1=E_1'$ 是闭的.

当 $y\in E_1$ 时条件 (4) 显然满足，因此只需证明逆命题，即证明满足 (4) 的任意 $y_0\in E'$ 都属于 E_1.

事实上，E_1 是线性闭集，在相反的情形下（参见第四章 §3 第 57 页的引理）存在线性泛函 Y_0 使得 $Y_0(y_0) = 1$ 且对所有 $y \in E_1$ 都有 $Y_0(y) = 0$. 令 $X_0 = \overline{U}(Y_0)$，则对所有 $x \in E$ 有 $X_0(x) = Y_0(y) = 0$，于是 $X_0 = 0$，从而 $\overline{U}(Y_0) = 0$，这与对 y_0 假设的条件 (4) 矛盾. □

定理 10.10. 若线性算子 $y = U(x)$ 的陪域 E_1 是闭的，则存在数 $m > 0$ 使得对任意 $y \in E_1$ 都可找到 $x \in E$ 满足条件

$$y = U(x) \quad \text{且} \quad |x| \leqslant m \cdot |y|.$$

证明. 在定理 3（第三章 §3，第 38 页）的证明过程中已建立了命题 (1)，在当前定理的假设下，它表示：对任意 $\varepsilon > 0$，存在 $\eta > 0$ 使得，给定满足 $|y| < \eta$ 的任意 y，都可找到满足 $y = U(x)$ 和 $|x| < \varepsilon$ 的 x.

由此容易推出：对任意 y，存在满足定理结论的 x，其中 $m = \frac{\varepsilon}{\eta}$. □

第 2 节 Riesz 关于全连续线性方程的理论

下面讨论形如 $y = x - U(x)$ 的方程，其中 U 是全连续线性算子，且其陪域包含于定义域（即 x 所在的空间 E）中.

引理 10.2. 若线性算子 $U(x)$ 是全连续的，则算子 $T(x) = x - U(x)$ 把任意有界闭集 $G \subset E$ 变换为闭集.

证明. 设

$$x_n \in G \quad (n = 1, 2, \ldots) \quad \text{且} \quad \lim_{n\to\infty} T(x_n) = y_0. \tag{11}$$

序列 $\{U(x_n)\}$ 为紧集，故存在子序列 $\{U(x_{n_i})\}$ 收敛于某元素 $x_0 \in G$. 由于 $x_{n_i} = U(x_{n_i}) + T(x_{n_i})$，由 (11) 得 $\lim_{i\to\infty} x_{n_i} = x_0 + y_0$，于是 $T(y_0 + x_0) = y_0$. □

定理 10.11. 若线性算子 $U(x)$ 是全连续的，则算子

$$T(x) = x - U(x) \quad \text{和} \quad \overline{T}(X) = X - \overline{U}(X)$$

的陪域都是闭的.

证明. 以 G 记方程 $T(x) = \Theta$ 的解集，设 $y_0 \neq \Theta$ 是算子 T 的陪域的一个聚点. 于是存在 E 中的元素序列 $\{x_n\}$ 使得 $y_0 = \lim_{n\to\infty} T(x_n)$.

若序列 $\{|x_n|\}$ 有界，则由上述引理知元素 y_0 属于陪域.

以 d_n 记 x_n 与集合 G 的距离，则存在 $w_n \in G$ 使得

$$d_n \leqslant |x_n - w_n| \leqslant \left(1 + \frac{1}{n}\right) d_n. \tag{12}$$

有

$$\lim_{n\to\infty} T(x_n - w_n) = y_0. \tag{13}$$

若序列 $\{|x_n - w_n|\}$ 有界，则由前述引理即得结论.

现设 $\lim_{n\to\infty} |x_n - w_n| = \infty$，记 $z_n = \frac{x_n - w_n}{|x_n - w_n|}$，则由 (13) 得 $\lim_{n\to\infty} T(z_n) = 0$ 且 $|z_n| = 1$. 根据引理，可从序列 $\{z_n\}$ 中取出子序列 $\{z_{n_i}\}$ 收敛于某元素 w_0 使得 $T(w_0) = 0$，于是 $w_0 \in G$. 记 $z_n - w_0 = \varepsilon_n$，则

$$\lim_{i\to\infty} |\varepsilon_{n_i}| = 0, \tag{14}$$

$$z_n - w_0 = \frac{x_n - w_n}{|x_n - w_n|} - w_0 = \varepsilon_n, \text{ 从而}$$

$$x_n - w_n - w_0 \cdot |x_n - w_n| = \varepsilon_n \cdot |x_n - w_n|, \text{ 由 (12)}$$

$$|x_{n_i} - w_{n_i} - w_0 \cdot |x_{n_i} - w_{n_i}|| \leqslant |\varepsilon_{n_i}| \left(1 + \frac{1}{n_i}\right) d_{n_i}. \tag{15}$$

由 (14) 和 (15) 知存在 n_i 使得 $|x_{n_i} - w_{n_i} - w_0 \cdot |x_{n_i} - w_{n_i}|| \leqslant \frac{d_{n_i}}{2}$; 但这是不可能的，因为 $w_{n_i} + w_0 \cdot |x_{n_i} - w_{n_i}| \in G$ 而 d_{n_i} 是 x_{n_i} 与 G 的距离.

因此 T 的陪域是闭的. 对 $\overline{T}(X)$ 的推理是类似的. □

定理 10.12. 若线性算子 $U(x)$ 是全连续的，则方程

$$x - U(x) = \Theta \quad \text{和} \quad X - \overline{U}(X) = \Theta$$

都至多有有限多个线性无关的解.

证明. 假设相反，存在 E 中线性无关的元素无穷序列 $\{x_n\}$ 满足方程 $x_n - U(x_n) = \Theta$（$n = 1, 2, \ldots$）. 以 E_n 记形如 $\sum_{i=1}^{n} h_i x_i$（其中 h_i 为任意实数）的元素集合. 显然

$$x \in E_n \quad \text{蕴含} \quad x - U(x) = \Theta, \tag{16}$$

且易见对每个 $n = 1, 2, \ldots$，集合 E_n 是线性闭集，不包含 x_{n+1}，因而是 E_{n+1} 的真子集.

根据引理（第五章 §3，第 83 页），存在序列 $\{y_n\}$ 使得

$$y_n \in E_n, \quad |y_n| = 1 \quad \text{且} \quad |y_n - x| > \frac{1}{2} \quad \text{对所有} \quad x \in E_{n-1}, \tag{17}$$

由 (16)，$y_n - U(y_n) = \Theta$ 从而 $y_n = U(y_n)$. 因此序列 $\{y_n\}$ 为紧集，与 (17) 矛盾.

对方程 $X - \overline{U}(X) = \Theta$ 的推理类似，因为可把 X 的集合看作 (B) 型空间. □

定理 10.13. 若对全连续线性算子 $U(x)$，方程 $y = x - U(x)$（相应地，$Y = X - \overline{U}(X)$）对任意 y（相应地，任意 Y）都有解，则方程 $x - U(x) = \Theta$（相应地，$X - \overline{U}(X) = \Theta$）恰有一个解，即 $x = \Theta$（相应地，$X = \Theta$）.

证明. 令

$$T^{(1)}(x) = x - U(x) = T(x) \quad \text{且} \quad T^{(n)}(x) = T[T^{(n-1)}(x)].$$

以 E_n 记所有满足方程 $T^{(n)}(x) = \Theta$ 的 $x \in E$ 的集合，假设存在 $x_1 \neq \Theta$ 使得 $T(x_1) = \Theta$. 以 x_n 记满足方程 $x_{n-1} = T(x_n)$ 的元素，则有

$$T^{(n)}(x_{n+1}) = x_1 \neq \Theta \quad \text{且} \quad T^{(n+1)}(x_{n+1}) = T(x_1) = \Theta,$$

于是

$$x_{n+1} \in E_{n+1} - E_n.$$

集合 E_n 显然是线性闭集; 它是 E_{n+1} 的真子集. 由引理（第 83 页）知存在满足条件 (17) 的序列 $\{y_n\}$.

现因 $y_n \in E_n$，由 T 和 E_n 的定义有 $T(y_n) = y_n - U(y_n)$，于是

$$U(y_p) - U(y_q) = y_p - [y_q + T(y_p) - T(y_q)] = y_p - x \tag{18}$$

且 $p > q$ 蕴含 $T^{(p-1)}(x) = T^{(p-1)}(y_q) + T^{(p)}(y_p) - T^{(p)}(y_q) = \Theta$.

因此 $x \in E_{p-1}$，于是由 (17) 得 $|y_p - x| > \frac{1}{2}$，从而由 (18) 知对 $p > q$ 有 $|U(y_p) - U(y_q)| > \frac{1}{2}$，这是不可能的，因为序列 $\{U(y_n)\}$ 含有收敛子序列. 故必 $x = \Theta$.

对方程 $X - \overline{U}(X) = \Theta$ 的证明类似，因为可把 X 的集合看作 (B) 型空间. □

定理 10.14. 若对全连续线性算子 $U(x)$，方程 $x - U(x) = \Theta$（相应地，$X - \overline{U}(X) = \Theta$）的唯一解是 $x = \Theta$（相应地，$X = \Theta$），则方程 $y = x - U(x)$（相应地，$Y = X - \overline{U}(X)$）对任意 y（相应地，任意 Y）都有解.

证明. 算子 $x - U(x)$ 的陪域由定理 11（第 151 页）是闭的，由假设根据定理 3（第 148 页）知方程 $Y = X - \overline{U}(X)$ 对任意 Y 都有解，于是由上述定理 13 知方程 $X - \overline{U}(X) = \Theta$ 的唯一解是 $X = \Theta$，从而由定理 5（第 149 页）知方程 $y = x - U(x)$ 对任意 y 都可解.

对 $Y = X - \overline{U}(X)$ 的证明是对称的. □

定理 10.15. 若 $U(x)$ 是全连续线性算子，则方程

$$x - U(x) = \Theta \quad \text{和} \quad X - \overline{U}(X) = \Theta$$

有相同个数的线性无关解.

证明. 如前记
$$T(x)=x-U(x) \quad 和 \quad \overline{T}(X)=X-\overline{U}(X). \tag{19}$$

设
$$T(x_i)=\Theta\ (i=1,2,\dots,n) \quad 且 \quad \overline{T}(X_i)=\Theta\ (i=1,2,\dots,\nu),$$

其中序列 $\{x_i\}$ 的元素和序列 $\{X_i\}$ 的泛函均假设线性无关，而数 n 和 ν 分别表示方程 $T(x)=\Theta$ 和 $\overline{T}(X)=\Theta$ 的线性无关解的最大个数.

对 $i=1,2,\dots,\nu$，记满足
$$X_j(z_i)=\begin{cases}1 & (i=j)\\ 0 & (i\neq j)\end{cases} \tag{21}$$

的任意元素为 z_i. 这样的 z_i 存在，因为形如 $\sum_{j=1}^{i-1}\alpha_j X_j+\sum_{j=i+1}^{\nu}\beta_j X_j$ 的线性集合是弱闭的且不包含 X_i.

类似地，对 $i=1,2,\dots,n$，记满足
$$Z_j(x_i)=\begin{cases}1 & (i=j)\\ 0 & (i\neq j)\end{cases} \tag{22}$$

的线性泛函为 Z_i. 这样的泛函 Z_i 存在，因为 x_i 不属于形如 $\sum_{j=1}^{i-1}\alpha_j x_j+\sum_{j=i+1}^{n}\beta_j x_j$ 的线性闭集.

至此，首先假设 $\nu>n$. 令
$$R(x)=U(x)+\sum_{i=1}^{n}Z_i(x)\cdot z_i \quad 且 \quad W(x)=x-R(x). \tag{23}$$

易见这样定义的算子 $R(x)$ 是全连续的. 下面证明方程 $W(x)=\Theta$ 恰有一个解，即 $x=\Theta$.

事实上，假设 $W(x_0)=\Theta$. 需证 $x_0=\Theta$. 由 (19) 和 (23) 有：
$$W(x_0)=x_0-R(x_0)=T(x_0)-\sum_{i=1}^{n}Z_i(x_0)\cdot z_i=0, \tag{24}$$

且由 (20)
$$X_iT(x)=\Theta \quad 对所有 \quad x\ 及 i=1,2,\dots,\nu, \tag{25}$$

由 (21) 和 (24) 得
$$X_iW(x_0)=Z_i(x_0)=0 \quad (i=1,2,\dots,n), \tag{26}$$

于是 $T(x_0)=\Theta$，由 (20) 和 n 的定义这蕴含 $x_0=\sum_{i=1}^{n}\alpha_i x_i$（其中 α_i 为相应实数）. 由 (26) 和 (22) 知对所有 $i=1,2,\dots,n$ 都有 $Z_i(x_0)=\alpha_i=0$，于是最终 $x_0=\Theta$.

由此根据定理 14（第 154 页）知方程 $x-R(x)=T(x)-\sum_{i=1}^{n}Z_i(x)\cdot z_i=z_{n+1}$ 有解. 但由 (21)

和 (25) 立即看出 $X_{n+1}[x-R(x)]=0$，而另一方面由 (21) 知 $X_{n+1}(z_{n+1})=1$. 因此假设 $\nu>n$ 是不可能的.

现设 $\nu<n$. 令 $\overline{R}(X)=\sum_{i=1}^{\nu} Z_i(x)\cdot z_i$（注意：此处原文有误，应为 $\overline{R}(X)=\sum_{i=1}^{\nu} X(z_i)\cdot Z_i$）. 按上述方法可证方程 $\overline{T}(X)-\sum_{i=1}^{\nu} X(z_i)\cdot Z_i=\Theta$（与方程 $T(x)-\sum_{i=1}^{n} Z_i(x)\cdot z_i=0$ 共轭）恰有一个解，即 $X=\Theta$. 于是根据定理 14（第 154 页），方程 $\overline{T}(X)-\sum_{i=1}^{\nu} X(z_i)\cdot Z_i=Z_{\nu+1}$ 应有解，但这是不可能的，因为对所有 X 都有 $\overline{T}(X)\cdot x_{\nu+1}=X[T(x_{\nu+1})]=0$，于是由 (22) 知对 $i=1,2,\ldots,n$ 都有 $Z_i(x_{\nu+1})=0$，而另一方面 $Z_{\nu+1}(x_{\nu+1})=1$. 因此假设 $\nu<n$ 亦导致矛盾. □

第 3 节 线性方程中的正则值与特征值

现假设算子 $U(x)$ 仅为线性算子，但仍保持其陪域包含于定义域 E 中的假设.

则对所有实数 h，算子 $x-hU(x)$ 是线性的，其相伴算子形如 $X-h\overline{U}(X)$，其中 $\overline{U}$ 为 U 的相伴算子.

下面研究相伴方程

$$x-hU(x)=y \quad \text{和} \quad X-h\overline{U}(X)=Y. \tag{27}$$

若对给定的 h_0，第一个方程（相应地，第二个方程）对任意 y（相应地，任意 Y）都恰有一个解，则称 h_0 为该方程的**正则值**; 否则称 h_0 为其**特征值**. 特征值的全体构成所谓**谱**.

若 x（相应地，X）满足第一个（相应地，第二个）方程

$$x-hU(x)=\Theta \quad \text{和} \quad X-h\overline{U}(X)=\Theta, \tag{28}$$

则称之为**特征元**（相应地，**特征泛函**）.

由定理 5（第 149 页）知，方程组 (27) 有相同的正则值集合，因而也有相同的特征值集合.

易将第 146–150 页建立的定理 1–9 叙述为方程 (27) 的形式. 这些定理使人们能够根据一个方程的行为来判断另一个方程的行为，反之亦然.

定理 10.16. 正则值的集合是开集.

证明. 设 h_0 为正则值，则存在数 $m>0$ 使得

$$|x-h_0U(x)|\geqslant m\cdot|x| \quad \text{且} \quad |X-h_0\overline{U}(X)|\geqslant m\cdot|X|.$$

因此对任意 ε 有

$$|x-(h_0+\varepsilon)U(x)|\geqslant|x-h_0U(x)|-|\varepsilon|\cdot|U(x)|\geqslant(m-|\varepsilon|\cdot|U|)\cdot|x|$$

且类似地

$$|X-(h_0+\varepsilon)\overline{U}(X)| \geqslant (m-|\varepsilon|\cdot|\overline{U}|)\cdot|X|.$$

由此可知，对足够小的 $|\varepsilon|$，算子

$$x-(h_0+\varepsilon)U(x) \quad 和 \quad X-(h_0+\varepsilon)\overline{U}(X)$$

都具有连续的逆算子，于是由定理 6（第 149 页）知 $h_0+\varepsilon$ 也是正则值. □

定理 10.17. 若 $|h|<\frac{1}{|U|}$，则 h 是正则值.

证明. 若 $|h|<\frac{1}{|U|}$，则解可表为

$$x=y+\sum_{n=1}^{\infty}h^nU^{(n)}(y) \quad 和 \quad X=Y+\sum_{n=1}^{\infty}h^n\overline{U}^{(n)}(Y), \tag{29}$$

其中

$$U^{(1)}(y)=U(y) \quad 且 \quad \overline{U}^{(1)}(Y)=\overline{U}(Y),$$

$$U^{(n)}(y)=U[U^{(n-1)}(y)] \quad 且 \quad \overline{U}^{(n)}(Y)=\overline{U}[\overline{U}^{(n-1)}(Y)].$$

级数 (29) 收敛，因为有

$$\sum_{n=1}^{\infty}|h^nU^{(n)}(y)| \leqslant \sum_{n=1}^{\infty}[|h|\cdot|U|]^n|y|$$

且

$$\sum_{n=1}^{\infty}|h^n\overline{U}^{(n)}(Y)| \leqslant \sum_{n=1}^{\infty}[|h|\cdot|\overline{U}|]^n|Y|.$$

由 (29) 得

$$U(x)=U(y)+\sum_{n=1}^{\infty}h^nU^{(n+1)}(y)=\frac{1}{h}\sum_{n=1}^{\infty}h^nU^{(n)}(y)=\frac{1}{h}(x-y),$$

于是 $x-hU(x)=y$. 类似地有 $X-h\overline{U}(X)=Y$. 因此方程 (27) 对任意 y（相应地，任意 Y）都有解. 由定理 7（第 149 页）知这些解是唯一的，因此 h 是正则值. □

定理 10.18. 若对 $h\neq h'$ 有

$$x-hU(x)=\Theta \quad 和 \quad X-h'\overline{U}(X)=\Theta,$$

则 $X(x)=0$.

换言之：对应于值 h 的特征元正交于任意异于 h 的值 h' 的特征泛函.

证明. 有 $X(x) = hX[U(x)] = h\overline{U}(X) \cdot x$ 且因 $\overline{U}(X) = \frac{1}{h'}X$，得 $X(x) = \frac{h}{h'}X(x)$. 若 $h \neq h'$，则 $X(x) = 0$. □

第 4 节 Fredholm 在全连续线性方程理论中的定理

若在上一节的假设下再设算子 $U(x)$ 是全连续的，则可对方程 (28) 叙述以下定理，这些定理构成 Fredholm 关于积分方程的定理的推广.

定理 10.19. 方程 (28) 有相同个数的有限个线性无关解 $d(h)$.

这不过是定理 15（第 154 页）的另一种表述.

定理 10.20. 若 $d(h) = 0$，则 h 为正则值.

这是定理 14（第 154 页）和上述定理 19 的推论.

定理 10.21. 若 $d(h) > 0$，记方程 (28) 的解为

$$\{x_i\}\ (i = 1, 2, \ldots, d(h)) \quad 和 \quad \{X_i\}\ (i = 1, 2, \ldots, d(h)),$$

则方程 (27) 对所有满足 $X_i(y) = 0$ 的 y（相应地，对所有满足 $Y(x_i) = 0$ 的 Y）都有解.

这是定理 8（第 149 页）（相应地，定理 9，第 150 页）和定理 11（第 151 页）的推论.

下面证明

定理 10.22. 若线性算子 $U(x)$ 是全连续的，则第一个方程 (27)

$$y = x - hU(x)$$

的特征值构成孤立集.

证明. 设 $\{h_n\}$ 为无穷特征值序列，其中 $h_i \neq h_j$（当 $i \neq j$）. 记

$$x_n = h_nU(x_n) \quad 且 \quad x_n \neq \Theta.$$

首先用归纳法证明元素 x_n 线性无关.

事实上，若 $x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}$ 线性无关，但 $x_n = \sum_{i=1}^{n-1} \alpha_i x_i$，则有

$$x_n = h_nU(x_n) = \sum_{i=1}^{n-1} h_n\alpha_iU(x_i),$$

于是 $x_n = \sum_{i=1}^{n-1} h_n \frac{\alpha_i}{h_i} x_i$，从而 $\sum_{i=1}^{n-1} \alpha_i \left(1 - \frac{h_n}{h_i}\right) x_i = 0$. 因由假设对 $n > i$ 有 $\frac{h_n}{h_i} \neq 1$，可见 $x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}$ 并非线性无关.

由此，对每个 $n = 1, 2, \ldots$，以 E_n 记形如 $y = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i x_i$ 的元素 y 的线性集合; 它是闭集且构成 E_{n+1} 的真子集. 由 (30) 知对所有 $y \in E_n$ 有 $y - h_n U(y) = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i x_i - \sum_{i=1}^{n} h_n \alpha_i \frac{x_i}{h_i} = \sum_{i=1}^{n-1} \alpha_i \left(1 - \frac{h_n}{h_i}\right) x_i$，于是 $y - h_n U(y) \in E_{n-1}$. 由引理（第 83 页）知存在满足条件 (17)（第 153 页）的元素序列 $\{y_n\}$.

现设序列 $\{h_n\}$ 收敛. 因算子 U 是全连续的，序列 $\{U(h_n y_n)\}$ 将构成紧集. 另一方面，对 $p > q$ 有

$$|U(h_p y_p) - U(h_q y_q)| = |y_p - [y_p - h_p U(y_p) + U(h_q y_q)]|, \tag{31}$$

且由 (17) 知 $y_p \in E_p$，这蕴含（如我们所见）$y_p - h_p U(y_p) \in E_{p-1}$; 类似地 $h_q U(y_q) \in E_q \subset E_{q-1}$，于是由 (17) 和 (31) 知对所有 $p > q$ 都有 $|U(h_p y_p) - U(h_q y_q)| > \frac{1}{2}$，因此序列 $\{U(h_n y_n)\}$ 不构成紧集.

由于这一矛盾，所讨论的特征值序列 $\{h_n\}$ 不可能收敛. 故它们构成孤立集. □

第 5 节 Fredholm 积分方程

下面考虑刚才建立的定理的若干应用.

在 $L^{(p)}$ 空间中，形如 $x - hU(x) = y$ 的方程归结为所谓 Fredholm 积分方程，其一般形式为:

$$x(s) - h \int_0^1 K(s,t) x(t) dt = y(s), \tag{32}$$

其中 $K(s,t)$ 满足某些条件.

相伴方程 $X - h\overline{U}(X) = Y$ 形如:

$$X(t) - h \int_0^1 K(s,t) X(s) ds = Y(t). \tag{33}$$

容易给出前述定理对这些积分方程情形的解释.

若 $K(s,t)$ 满足适当条件，则线性算子 $\int_0^1 K(s,t) x(t) dt$ 是全连续的，因此本章 §§2, 3, 4 的定理可应用于方程 (32) 和 (33). 特别地，定理 19–21 此时取所谓 Fredholm 定理的形式（但当然，它们也适用于积分方程之外的情形）.

第 6 节 Volterra 积分方程

形如

$$x(s) - \int_0^s K(s,t) x(t) dt = y(s) \tag{34}$$

（其中 $K(s,t)$ 为连续函数）的方程称为 Volterra 方程.

算子 $\int_0^s K(s,t)x(t)dt$ 在空间 (C) 和 $(L^{(p)})$（其中 $p>1$）中是全连续的.

下面证明方程

$$x(s)-\int_0^s K(s,t)x(t)dt=0 \tag{35}$$

仅有唯一解 $x(s)=0$.

事实上，假设 $x(s)$ 满足该方程; 显然 $x(s)$ 是连续函数. 记

$$m=\max_{0\leqslant s\leqslant 1}|x(s)| \quad 且 \quad M=\max_{\substack{0\leqslant s\leqslant 1\\ 0\leqslant t\leqslant 1}}|K(s,t)|.$$

由 (35) 有

$$|x(s)|\leqslant M\cdot\int_0^s|x(t)|dt, \tag{36}$$

于是 $|x(s)|\leqslant M\cdot m\cdot s$（当 $0\leqslant s\leqslant 1$），代入 (36) 以 $M\cdot m\cdot s$ 替代 $x(t)$ 得 $|x(s)|\leqslant M^2\cdot m\cdot\frac{s^2}{2}$. 如此继续下去，对所有 $n=1,2,\ldots$ 都有 $|x(s)|\leqslant\frac{(M\cdot s)^n}{n!}\cdot m$，于是显然 $x(s)=0$.

由此回到方程 (34). 因对 $x\in(C)$ 和 $y\in(C)$，以及对 $x\in(L^{(p)})$ 和 $y\in(L^{(p)})$，算子 $\int_0^s K(s,t)x(t)dt$ 是全连续的, 根据定理 14 (第 154 页), 方程 (34) 对任意 $y\in(C)$ (相应地, $y\in(L^{(p)})$) 都恰有一个解 $x\in(C)$（相应地，$x\in(L^{(p)})$）.

第 7 节　对称积分方程

若算子 $y=U(x)$ 对 x 和 y 属于 $(L^{(2)})$ 是线性的，则相伴算子 $X=\overline{U}(Y)$ 亦可视为对 X 和 Y 属于 $(L^{(2)})$ 是线性的.

事实上，$(L^{(2)})$ 中的每个线性泛函（参见第四章 §4，第 64 页）形如 $\int_0^1 X(t)x(t)dt$（其中 $Y(t)\in(L^{(2)})$），于是可把 $Y(t)$ 看作该泛函的代表.

若

$$\int_0^1 yU(x)dt=\int_0^1 xU(y)dt \quad 对 \quad x,y\in(L^{(2)}), \tag{37}$$

则称算子 $U(x)$ 为**对称**的.

因 $\int_0^1 yU(x)dt=\int_0^1 x\overline{U}(y)dt$，每个对称算子与其相伴算子重合.

当函数 $K(s,t)$ 对称（即处处有 $K(s,t)=K(t,s)$）且二重积分 $\int_0^1\int_0^1 K(s,t)x(t)y(s)dsdt$ 对所有 $x,y\in(L^{(2)})$ 存在时，算子

$$\begin{aligned} U(x)&=\int_0^1 K(s,t)x(t)dt=y(s),\\ V(x)&=x(s)-h\int_0^1 K(s,t)x(t)dt=y(s) \end{aligned} \tag{38}$$

是线性对称算子，因为它们满足条件 (37).

形如 (38) 的方程称为**对称积分方程**.

定理 10.23. 若算子 $U(x)$ 对称，则当算子 $x - hU(x) = y$ 具有连续逆算子，或该方程对任意 y 都可解时，参数 h 为正则值.

证明. 该结论由定理 3 和 4（第 148 页）得出，因为在这些条件下所论方程与其相伴方程相同. $\square$

第十一章 等距、等价、同构

第 1 节 等距

设 E 和 E_1 为度量空间（见引言 §7，第 8 页），$y = U(x)$（其中 $x \in E$，$y \in E_1$）为一一运算，将 E 变换到整个 E_1 上. 若该变换保持距离不变，即对 E 中任意一对元素 x_1, x_2 都有

$$(x_1, x_2) = (y_1, y_2) \quad \text{其中} \quad y_1 = U(x_1),\, y_2 = U(x_2),$$

则称该变换为**等距**的.

若 E 和 E_1 为赋范向量空间，则当运算 $U(x)$ 为线性时，称由运算 $y = U(x)$ 给出的 E 到 E_1 的变换为线性的.

赋范向量空间作为度量空间（参见第四章 §1，第 53 页），也可以考虑这些空间之间的等距变换.

第 2 节 空间 (L^2) 和 (l^2)

定理 11.1. 空间 (L^2) 和 (l^2) 是等距的.

证明. 事实上，设 $\{x_i(t)\}$（其中 $0 \leqslant t \leqslant 1$）为任意完备规范正交序列. 若 $x \in (L^2)$，则熟知

$$\sum_{i=1}^{\infty} \left[\int_0^1 x_i(t) x(t) \, \mathrm{d}t \right]^2 = \int_0^1 x^2(t) \, \mathrm{d}t. \tag{1}$$

因此，若用 $U(x)$ 表示序列 $y = \{\eta_i\}$，其中 $\eta_i = \int_0^1 x_i(t) x(t) \, \mathrm{d}t$，则由 (1) 可知 $y \in (l^2)$ 且 $|U(x)| = |x|$. 由于运算 $y = U(x)$ 为加性的且保持范数不变，故为线性的. 又由正交级数理论可知，

对每个 $y \in (l^2)$，存在唯一的函数 $x(t) \in (L^2)$ 使得 $y = U(x)$.

于是线性运算 $y = U(x)$ 一一地将 (L^2) 变换到 (l^2) 上且不改变范数，从而不改变距离. 因此空间 (L^2) 和 (l^2) 是等距的. □

注释 11.2. 后文将证明，空间 $(L^{(p)})$ 和 $(l^{(q)})$ 仅在 $p = q = 2$ 时等距. 这是第十二章 §3 推论（第 206 页）的结果.

第 3 节 赋范向量空间的等距变换

定理 11.3. 设 $U(x)$ 为赋范向量空间到另一空间的等距变换，且满足 $U(\Theta) = \Theta$，则 $U(x)$ 为线性[1].

证明. 首先设 E 为任意 (D) 型空间，x_1, x_2 为 E 中任意一对点.

用 H_1 表示满足

$$(x, x_1) = (x, x_2) = \frac{1}{2}(x_1, x_2) \tag{2}$$

的点 $x \in E$ 的集合，而对 $n = 2, 3, \ldots$，用 H_n 表示满足：对所有 $z \in H_{n-1}$ 都有

$$(x, z) \leqslant \frac{1}{2}\delta(H_{n-1}) \tag{3}$$

的点 $x \in H_{n-1}$ 的集合，其中 $\delta(H_{n-1})$ 表示集合 H_{n-1} 的直径，即其上确界距离.

如此定义序列 $\{H_n\}$，有

$$\lim_{n\to\infty} \delta(H_n) = 0. \tag{4}$$

事实上，若集合 H_n 非空，则对 H_n 中任意一对点 x', x''，有 $x'' \in H_{n-1}$（因为由定义 $H_1 \supset H_2 \supset \ldots \supset H_n \supset \ldots$），因此由 (3) 得 $(x', x'') \leqslant \frac{1}{2}\delta(H_{n-1})$，从而 $\delta(H_n) \leqslant \frac{1}{2}\delta(H_{n-1})$，于是 $\delta(H_n) \leqslant \frac{1}{2^{n-1}}\delta(H_1)$. 另一方面，由 (2) 对 H_1 中任意一对点 x', x'' 都有不等式 $(x', x'') \leqslant (x', x_1) + (x'', x_1) = (x_1, x_2)$，故 $\delta(H_1) \leqslant (x_1, x_2)$，从而 $\delta(H_n) \leqslant \frac{1}{2^{n-1}}(x_1, x_2)$，由此得 (4).

由此可知，集合 H_n 的公共部分（若非空）退化为一点. 该点称为点对 x_1, x_2 的**中心**.

现设 E 为赋范向量空间. 对 E 中任意两点 x' 和 x'' 有

$$(x', x'') = |x' - x''|.$$

令 $\overline{x} = x_1 + x_2 - x$（对 $x \in E$）. 可用归纳法证明

$$x \in H_n \text{ 蕴含} \overline{x} \in H_n \text{ 对所有} n = 1, 2, \ldots \text{ 成立.} \tag{5}$$

事实上，若 $x \in H_1$，则 $|\overline{x} - x_1| = |x - x_2|$ 且 $|\overline{x} - x_2| = |x - x_1|$，故 $|\overline{x} - x_1| = |\overline{x} - x_2| = \frac{1}{2}|x_1 - x_2|$，

[1]该定理属于 S. Mazur 和 S. Ulam，见 *Comptes Rendus* Acad. Sci. Paris 194（1932），第 946–948 页.

从而由 (2) 得 $\overline{x} \in H_1$; 假设 (5) 对 $n-1$ 成立，则对 $x' \in H_{n-1}$ 有 $x_1+x_2-x' \in H_{n-1}$. 若 $x \in H_n$，则由 (3) 得 $|\overline{x}-x'| = |(x_1+x_2-x')-x| \leqslant \frac{1}{2}\delta(H_{n-1})$，故 $\overline{x} \in H_n$.

下面证明点 $\xi = \frac{1}{2}(x_1+x_2)$ 是点对 x_1, x_2 的中心. 事实上，由 $|x_1-\xi| = |x_2-\xi| = \frac{1}{2}|x_1-x_2|$ 知 $\xi \in H_1$. 假设 $\xi \in H_{n-1}$. 对任意 $x \in H_{n-1}$，由 (5) 有 $x_1+x_2-x = \overline{x} \in H_{n-1}$，且因 $2|\xi-x| = |x_1+x_2-2x| = |x-\overline{x}| \leqslant \delta(H_{n-1})$，故 $|\xi-x| \leqslant \frac{1}{2}\delta(H_{n-1})$，从而 $\xi \in H_n$. 由于 ξ 属于所有自然数 n 对应的 H_n，故 ξ 是 x_1, x_2 的中心.

现设 E_1 亦为赋范向量空间，$y = U(x)$（其中 $x \in E$，$y \in E_1$）为等距运算，将 E 变换到整个 E_1 上且满足 $U(\Theta) = \Theta$. 由于中心的定义仅依赖于度量，易见 E 中任意点对 x_1, x_2 的中心被变换为 E_1 中点对 $U(x_1), U(x_2)$ 的中心. 因此

$$U\left[\frac{1}{2}(x_1+x_2)\right] = \frac{1}{2}[U(x_1)+U(x_2)] \quad \text{对} x_1 \in E \text{ 和} x_2 \in E,$$

由此令 $x_1 = x$，$x_2 = \Theta$，并利用假设 $U(\Theta) = \Theta$，得

$$U\left(\frac{1}{2}x\right) = \frac{1}{2}U(x) \quad \text{对所有} x \in E.$$

因此对 E 中任意点 x_1 和 x_2 有：

$$\begin{aligned} U(x_1+x_2) &= U\left[\frac{1}{2}(2x_1+2x_2)\right] = \frac{1}{2}U(2x_1) + \frac{1}{2}U(2x_2) \\ &= U(x_1)+U(x_2). \end{aligned}$$

于是运算 $U(x)$ 为加性的，且因其连续，故为线性的. 从而变换 $y = U(x)$ 亦然. 证毕. □

第 4 节 实连续函数空间

设 Q 为任意紧完备度量空间（参见引言 §7，第 9 页），考虑定义在 $q \in Q$ 上的实连续函数 $x(q)$ 的集合 E，若按通常方式定义 E 中的加法和数乘，并取函数绝对值的最大值作为范数，则 E 构成一个 (B) 型空间.

引理 11.1. 设 $x(q) \in E$（其中 $q \in Q$）. 对给定的 $q_0 \in Q$，不等式

$$|x(q_0)| > |x(q)| \quad \text{对所有} q \neq q_0 \text{ 成立} \tag{6}$$

成立的充要条件是极限

$$\lim_{h \to 0} \frac{\|x+hz\| - \|x\|}{h} \tag{7}$$

对所有 $z(q) \in E$ 都存在.

此外，若函数 $x(q)$ 满足不等式 (6)，则

$$\lim_{h\to 0}\frac{\|x+hz\|-\|x\|}{h}=z(q_0)\cdot\operatorname{sign}x(q_0)\quad 对所有z(q)\in E.$$

证明. 条件的必要性. 事实上，$\|x\|=|x(q_0)|$，且因连续函数 $|x+hz|$ 在某点达到其最大值，故得

$$\begin{aligned}|x(q_0)+hz(q_0)|-|x(q_0)|&\leqslant\|x+hz\|-\|x\|\\&=|x(q_h)+hz(q_h)|-|x(q_0)|,\end{aligned}\tag{8}$$

其中 q_h 为依赖于 h 且属于 Q 的点. 由 (8) 得 $|x(q_0)+hz(q_0)|\leqslant|x(q_h)+hz(q_h)|$，从而 $0\leqslant|x(q_0)|-|x(q_h)|\leqslant|h|\cdot|z(q_0)|+|h|\cdot|z(q_h)|\leqslant 2|h|\cdot\|z\|$，故 $\lim_{h\to 0}|x(q_h)|=|x(q_0)|$. 由此及 Q 的紧性得

$$\lim_{h\to 0}q_h=q_0.\tag{9}$$

由此，先考察 $x(q_0)>0$ 的情形. 此时存在 $\varepsilon>0$ 使得当 $|h|<\varepsilon$ 时等式

$$|x(q_0)+hz(q_0)|-|x(q_0)|=x(q_0)+hz(q_0)-x(q_0)=hz(q_0)$$

成立，且由 (9) 得

$$|x(q_h)+hz(q_h)|-|x(q_0)|=x(q_h)+hz(q_h)-x(q_0)\leqslant hz(q_h),$$

从而由 (8) 得 $hz(q_0)\leqslant\|x+hz\|-\|x\|\leqslant hz(q_h)$，因此仍由 (9) 及 $z(q)$ 的连续性得

$$\lim_{h\to 0}\frac{\|x+hz\|-\|x\|}{h}=z(q_0).$$

当 $x(q_0)<0$ 时，类似地可得

$$\lim_{h\to 0}\frac{\|x+hz\|-\|x\|}{h}=-z(q_0).$$

如此证明了条件的必要性（极限 (7) 的存在性），同时也证明了引理的第二部分.

为证明条件的充分性，假设函数 $x(q)$ 的模在 Q 的两个不同点 q_0 和 q_1 处达到最大值，即

$$|x(q_0)|=|x(q_1)|\geqslant|x(q)|\quad 对所有q\in Q.$$

当 $x(q_0)>0$ 时，令 $z(q)=(q,q_1)$. 则有 $\|x+hz\|-\|x\|\geqslant x(q_0)+h(q_0,q_1)-x(q_0)$，故

$$\varliminf_{h\to+0}\frac{\|x+hz\|-\|x\|}{h}\geqslant(q_0,q_1)>0. \tag{10}$$

同时有 $\|x+hz\|-\|x\|\geqslant|x(q_1)+h(q_1,q_1)|-|x(q_1)|=0$，故

$$\varlimsup_{h\to-0}\frac{\|x+hz\|-\|x\|}{h}\leqslant 0. \tag{11}$$

不等式 (10) 和 (11) 表明极限 (7) 不可能存在.

当 $x(q_0)<0$ 时，令 $z=-(q,q_1)$，同样可得此结论. 证毕. □

若存在一一且双连续的变换将其中一个变换为另一个，则称两个集合为**同胚**的.

定理 11.4. 两个紧完备度量空间 Q 和 Q_1 同胚的充要条件为，分别定义在这些空间上的实连续函数空间 E 和 E_1 等距.

证明. 必要性. 易验证，若 $q'=f(q)$（其中 $q\in Q$，$q'\in Q_1$）表示 Q 到整个 Q_1 的一一且双连续变换，则使每个函数 $y(q')\in E_1$ 对应于函数 $x(q)=y[f(q)]\in E$ 的 E_1 到 E 的变换为等距的.

充分性. 假设空间 E 和 E_1 是等距的, 设 $y=V(x)$ 为一一运算, 将 E 变换到整个 E_1 上, 使每个函数 $x(q)\in E$ 对应于函数 $y(q')\in E_1$，且满足对所有 $x_1,x_2\in E$ 都有 $\|V(x_1)-V(x_2)\|=\|x_1-x_2\|$.

令 $U(x)=V(x)-V(\Theta)$，容易看出运算 $U(x)$ 具有完全相同的性质，且还有 $U(\Theta)=\Theta$. 由第 166 页的定理 2，运算 $y=U(x)$ 是线性的.

设 q_0 为 Q 的给定点，$x(q)\in E$（其中 $q\in Q$）为满足引理中不等式 (6) 的函数. 由于运算 $y=U(x)$ 不改变范数，令 $U(z)=t$（其中 $z\in E$），对任意数 h 有

$$\frac{\|x+hz\|-\|x\|}{h}=\frac{\|y+ht\|-\|y\|}{h},$$

从而由前述引理得

$$z(q_0)\cdot\operatorname{sign}x(q_0)=\lim_{h\to0}\frac{\|y+ht\|-\|y\|}{h}. \tag{12}$$

由于运算 $U(z)$ 将 E 变换到整个 E_1 上，极限 (12) 对所有 $t\in E_1$ 都存在. 因此由引理可知，存在 $q_0'\in Q_1$ 使得对所有 $q'\neq q_0'$ 的点都有 $|y(q_0')|>|y(q')|$，且

$$\lim_{h\to0}\frac{\|y+ht\|-\|y\|}{h}=t(q_0')\cdot\operatorname{sign}y(q_0')\quad 对所有t\in E_1.$$

由此及 (12) 得 $z(q_0)\cdot\operatorname{sign}x(q_0)=t(q_0')\cdot\operatorname{sign}y(q_0')$，令 $\varepsilon(q_0')=\operatorname{sign}x(q_0)\cdot\operatorname{sign}y(q_0')$，则得 $q_0\in Q$

与 $q_0' \in Q_1$ 之间的如下关系：

$$t(q_0') = z(q_0) \cdot \varepsilon(q_0') \quad \text{其中} \quad |\varepsilon(q_0')| = 1 \tag{13}$$

且该关系对所有 $z \in E$ 及 $t = U(z)$ 都成立.

现考虑函数

$$q_0' = f(q_0),$$

它将 Q 变换到 Q_1.

该变换是一一的. 事实上，由等式 $q_1' = q_2'$（其中 $q_1' = f(q_1)$，$q_2' = f(q_2)$）及 (13) 得，对任意函数 $z \in E$ 都有 $|z(q_1)| = |z(q_2)|$，这蕴含 $q_1 = q_2$，因为对函数 $z(q) = (q, q_1)$ 就发生这种情况.

函数 f 还将 Q 变换到整个 Q_1 上. 事实上，对任意 $\overline{q'} \in Q_1$，由 (13) 令 $t(q') = \frac{1}{1+(q', \overline{q'})}$ 得

$$|z(q_0)| = \frac{1}{1 + (q_0', \overline{q'})} \quad \text{对所有} q_0 \in Q. \tag{14}$$

由于 $\|z\| = \|t\| = 1$，存在 $q_0 \in Q$ 使得 $|z(q_0)| = 1$. 对点 $q_0' = f(q_0)$，由 (14) 得 $\frac{1}{1+(q_0', \overline{q'})} = 1$，故 $(q_0', \overline{q'}) = 0$，从而 $\overline{q'} = q_0'$.

最后，变换 f 是连续的. 事实上，设 $q_0 = \lim_{n\to\infty} q_n$ 且 $q_n' = f(q_n)$ $(n = 1, 2, \ldots)$. 由 (13) 得，对所有 $t \in E_1$ 都有 $\lim_{n\to\infty} |t(q_n')| = |t(q_0')|$，从而特别对 $t(q') = (q', q_0')$ 有 $\lim_{n\to\infty} (q_n', q_0') = (q_0', q_0') = 0$，故 $\lim_{n\to\infty} q_n' = q_0'$.

由此及 Q 和 Q_1 的紧性可知，这两个集合是同胚的. 证毕. □

注释 11.5. 由上述证明可见，若运算 $y = U(x)$ 等距地将空间 E 变换到空间 E_1 上且 $U(\Theta) = \Theta$，则存在将集合 Q 同胚地变换到 Q_1 上的函数 $q' = f(q)$ 及连续函数 $\varepsilon(q')$ 使得

$$y(q') = x\left[f^{-1}(q')\right] \cdot \varepsilon(q') \quad \text{其中} y = U(x) \text{ 且} |\varepsilon(q')| = 1.$$

应用. 前述定理 3 特别蕴含，定义在 $0 \leqslant t \leqslant 1$ 上的连续函数空间 (C) 与定义在正方形 $0 \leqslant u \leqslant 1$，$0 \leqslant v \leqslant 1$ 上的二元连续函数 $x(u, v)$ 的空间不是等距的.

然而，定义在区间 $0 \leqslant t \leqslant 1$ 上的 p 次可积函数空间 $(L^{(p)})$ 与定义在正方形 $0 \leqslant u \leqslant 1$，$0 \leqslant v \leqslant 1$ 上的 p 次可积函数空间是等距的. 事实上，存在一一函数 $t = \varphi(u, v)$，它将该正方形（除一个零测集外）变换为区间 $[0, 1]$（同样除一个零测集外），使得可测集被变换为等测度的集.

因此，使每个函数 $x(t) \in (L^{(p)})$ 对应于函数 $y(u, v) = x[\varphi(u, v)]$，就得到两个函数空间之间的变换，容易看出它不改变距离.

第 5 节 旋转

称 (B) 型空间 E 绕点 $x_0 \in E$ 的**旋转**为 E 到自身的一一等距变换，它将点 x_0 变换为 x_0.

由第 166 页的定理 2，绕 Θ 的任意旋转都是线性变换.

下面研究 (B) 型空间某些特殊情形中的旋转.

空间 (C). (C) 中绕 Θ 最一般的旋转由形如

$$y(t) = \varepsilon \cdot x[\alpha(t)]$$

的运算给出，其中 $x(t) \in (C)$，$\varepsilon = +1$ 或 -1（与 $x(t)$ 无关），$\alpha(t)$ 为任意将闭区间 $0 \leqslant t \leqslant 1$ 一一地变换到自身的函数.

证明由第 172 页的注记得出，注意若 $\varepsilon(t)$ 为满足 $|\varepsilon(t)| = 1$ 的连续函数，则 $\varepsilon(t) = \text{const}$.

空间 (c). 此空间可视为定义在仅有一个聚点的有界闭实数集上的连续函数空间. 由第 172 页的注记易得如下定理.

(c) 中绕 Θ 的最一般的旋转由运算 $y = U(x)$ 给出，其中

$$x = \{\xi_n\} \in (c), \quad y = \{\eta_n\} \in (c) \text{ 且} \eta_n = \varepsilon_n \cdot \xi_{\varphi(n)},$$

$\{\varepsilon_n\}$ 表示满足 $|\varepsilon_n| = 1$（$n = 1, 2, \ldots$）的任意收敛序列，$\varphi(n)$ 为任意将自然数集一一地变换到自身的函数.

空间 (L^2). (L^2) 绕 Θ 的任意旋转形如

$$y(t) = \sum_{n=1}^{\infty} \beta_n(t) \int_0^1 \alpha_n(t) x(t) \,\mathrm{d}t, \tag{15}$$

其中 $x(t) \in (L^2)$，$\{\alpha_n(t)\}$，$\{\beta_n(t)\}$ 为在 (L^2) 中完备的任意规范正交函数序列，定义在 $0 \leqslant t \leqslant 1$ 上.

证明. 由 (15) 得

$$\int_0^1 y^2(t) \,\mathrm{d}t = \sum_{n=1}^{\infty} \left[\int_0^1 \alpha_n(t) x(t) \,\mathrm{d}t\right]^2 = \int_0^1 x^2(t) \,\mathrm{d}t,$$

故 $\|y\| = \|x\|$. 因此形如 (15) 的任意变换确实是绕 Θ 的旋转.

反之，设 $y = U(x)$ 为 (L^2) 中给定的绕 Θ 的旋转，$\{\alpha_n(t)\}$ 为在 (L^2) 中完备的任意规范正交序列. 令 $\beta_n(t) = U[\alpha_n(t)]$（$n = 1, 2, \ldots$），则有

$$x(t) = \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n(t) \int_0^1 \alpha_n(t) x(t) \,\mathrm{d}t$$

从而 $y(t)=U[x(t)]$ 形如 (15). 此外，

$$\int_0^1 \beta_n^2(t)\,\mathrm{d}t=\int_0^1 U^2[\alpha_n(t)]\,\mathrm{d}t=\int_0^1 \alpha_n^2(t)\,\mathrm{d}t=1 \tag{16}$$

且因 $\beta_i(t)+\beta_j(t)=U[\alpha_i(t)+\alpha_j(t)]$，对 $i\neq j$ 有

$$\int_0^1 [\beta_i(t)+\beta_j(t)]^2\,\mathrm{d}t=\int_0^1 [\alpha_i(t)+\alpha_j(t)]^2\,\mathrm{d}t=2,$$

故由 (16) 得

$$\int_0^1 \beta_i(t)\beta_j(t)\,\mathrm{d}t=0 \quad 对 i\neq j. \tag{17}$$

因此，若对函数 $\beta(t)\in(L^2)$ 有 $\int_0^1\beta_n(t)\beta(t)\,\mathrm{d}t=0$（对所有 $n=1,2,\ldots$），则由 (15) 得对所有函数 $y(t)\in(L^2)$ 都有 $\int_0^1 y(t)\beta(t)\,\mathrm{d}t=0$，故 $\beta(t)=0$. 由此及 (16)、(17) 可知 $\{\beta_n(t)\}$ 是 (L^2) 中完备的规范正交函数序列. □

空间 (l^2). 对 (l^2) 可叙述完全类似的定理. 这是空间 (L^2) 与 (l^2) 的等距性（见定理 1，第 165 页）的推论.

空间 $(L^{(p)})$ **和** $(l^{(p)})$ **（其中** $1\leqslant p\neq 2$**）**. 有如下引理:

引理 11.2. 1. 设 $y=U(x)$ 为 $(L^{(p)})$（其中 $1\leqslant p\neq 2$）绕 Θ 的旋转，若对属于 $L^{(p)}$ 的一对函数 $x_1(t),x_2(t)$ 有

$$x_1(t)\cdot x_2(t)=0 \quad 在 [0,1] 上几乎处处成立, \tag{18}$$

则对 $y_1=U(x_1)$ 和 $y_2=U(x_2)$ 这一对函数也有

$$y_1(t)\cdot y_2(t)=0 \quad 在 [0,1] 上几乎处处成立. \tag{19}$$

证明. 由假设，对任意一对数 α,β，由 (18) 得 $\|\alpha x_1+\beta x_2\|^p=|\alpha|^p\cdot\|x_1\|^p+|\beta|^p\cdot\|x_2\|^p$，从而由 y_1 和 y_2 的定义得 $\|\alpha y_1+\beta y_2\|^p=|\alpha|^p\cdot\|y_1\|^p+|\beta|^p\cdot\|y_2\|^p$，因此

$$\int_0^1 |\alpha y_1(t)+\beta y_2(t)|^p\,\mathrm{d}t=|\alpha|^p\int_0^1 |y_1(t)|^p\,\mathrm{d}t+|\beta|^p\int_0^1 |y_2(t)|^p\,\mathrm{d}t. \tag{20}$$

当 $p=1$ 时，先后令 $\alpha=\beta=1$ 和 $\alpha=-\beta=1$，由此得

$$\int_0^1 |y_1(t)+y_2(t)|\,\mathrm{d}t=\int_0^1 |y_1(t)-y_2(t)|\,\mathrm{d}t=\int_0^1 [|y_1(t)|+|y_2(t)|]\,\mathrm{d}t,$$

这仅在条件 (19) 满足时才可能.

当 $p>2$ 时，以 H 表示满足 $y_1(t)\cdot y_2(t)\neq 0$ 的 $t\in[0,1]$ 的集合，由 (20) 得

$$\int_H |\alpha y_1(t)+\beta y_2(t)|^p\,\mathrm{d}t=|\alpha|^p\int_H |y_1(t)|^p\,\mathrm{d}t+|\beta|^p\int_H |y_2(t)|^p\,\mathrm{d}t, \tag{21}$$

令 $\varphi(\alpha,t)=|\alpha y_1(t)+\beta y_2(t)|^p$，由此得

$$\frac{\partial\varphi}{\partial\alpha}=p|\alpha y_1(t)+\beta y_2(t)|^{p-1}\cdot \mathrm{sign}[\alpha y_1(t)+\beta y_2(t)]\cdot y_1(t) \tag{22}$$

及

$$\frac{\partial^2\varphi}{\partial\alpha^2}=p(p-1)|\alpha y_1(t)+\beta y_2(t)|^{p-2}\cdot y_1^2(t). \tag{23}$$

由于 $|\alpha y_1(t)+\beta y_2(t)|^{p-1}\in(L^{(\frac{p}{p-1})})$ 且 $y_1(t)\in(L^{(p)})$，容易验证积分 $\int_0^\alpha\int_H\left|\frac{\partial\varphi}{\partial\alpha}\right|\mathrm{d}\alpha\,\mathrm{d}t$ 存在，从而由 (22) 得

$$\int_H\frac{\partial\varphi}{\partial\alpha}=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\alpha}\int_H\varphi(\alpha,t)\,\mathrm{d}t=p\cdot\mathrm{sign}\,\alpha\cdot|\alpha|^{p-1}\int_H|y_1(t)|^p\,\mathrm{d}t \tag{24}$$

从而 $\int_H\left(\frac{\partial\varphi}{\partial\alpha}\right)_{\alpha=0}\mathrm{d}t=0$; 由此立即（因由 (23) 有 $\frac{\partial^2\varphi}{\partial\alpha^2}\geqslant 0$）得

$$\int_0^\alpha\int_H\frac{\partial^2\varphi}{\partial\alpha^2}\,\mathrm{d}\alpha\,\mathrm{d}t=\int_H\frac{\partial\varphi}{\partial\alpha}\,\mathrm{d}t,$$

故由 (24) 得 $\int_H\frac{\partial^2\varphi}{\partial\alpha^2}\,\mathrm{d}t=p(p-1)|\alpha|^{p-2}\int_H|y_1(t)|^p\,\mathrm{d}t$，从而由 (23) 得

$$\int_H|\alpha y_1(t)+\beta y_2(t)|^{p-2}\cdot y_1^2(t)\,\mathrm{d}t=|\alpha|^{p-2}\int_H|y_1(t)|^p\,\mathrm{d}t. \tag{25}$$

在 (25) 中令 $\alpha=0$，$\beta=1$，得

$$\int_H|y_2(t)|^{p-2}\cdot|y_1(t)|^2\,\mathrm{d}t=0, \tag{26}$$

这由 H 的定义可知 $mH=0$[1].

最后，当 $1<p<2$ 时，对 $i=1$ 和 2 考虑泛函 $Y_i(y)=\int_0^1 Y_i(t)y(t)\,\mathrm{d}t$（其中 $y(t)\in(L^{(p)})$ 且 $Y_i(t)=|y_i(t)|^{p-1}\cdot\mathrm{sign}\,y_i(t)$）. 共轭运算 $X=\overline{U}(Y)$ 是空间 $(L^{(\frac{p}{p-1})})$ 绕 Θ 的旋转[2]. 令 $X_i=\overline{U}(Y_i)$ 且 $X_i(x)=\int_0^1 X_i(t)x(t)\,\mathrm{d}t$（其中 $x\in(L^{(p)})$）. 有 $X_i(x_i)=Y_i(y_i)=|Y_i|\cdot|y_i|=|X_i|\cdot|x_i|$，故由 Riesz 不等式知 $X_i(t)=0$ 与 $x_i(t)=0$ 对相同的 t 值成立. 因此 $X_1(t)\cdot X_2(t)=0$，且因 $\frac{p}{p-1}>2$，由前述情形得 $Y_1(t)\cdot Y_2(t)=0$，从而 $y_1(t)\cdot y_2(t)=0$. 条件 (19) 得证. □

引理 11.3. 2. 设 $y=U(x)$ 为 $(l^{(p)})$（其中 $1\leqslant p\neq 2$）绕 Θ 的旋转，若对属于 $(l^{(p)})$ 的两序列 $x_1=\{\xi_n^{(1)}\}$

[1] mH 表示集合 H 的测度.

[2] 见第十章 §1 第 149 页定理 4.

和 $x_2=\{\xi_n^{(2)}\}$ 有

$$\xi_n^{(1)}\cdot\xi_n^{(2)}=0\quad 对n=1,2,\ldots,$$

则对 $y_1=U(x_1)=\{\eta_n^{(1)}\}$ 和 $y_2=U(x_2)=\{\eta_n^{(2)}\}$ 也有

$$\eta_n^{(1)}\cdot\eta_n^{(2)}=0\quad 对n=1,2,\ldots$$

证明与 $(L^{(p)})$ 空间的情形类似，所需修改是显然的.

由这两个引理分别可得关于旋转一般形式的如下定理.

I. 设 $y=U(x)$ 为空间 $(L^{(p)})$（其中 $1\leqslant p\neq 2$）绕 Θ 的旋转，则存在定义在 $0\leqslant t\leqslant 1$ 上的两个函数 $\Phi(t)$ 和 $\psi(t)$ 满足下列条件:

(a) 函数 $\varphi(t)$ 将闭区间 $[0,1]$ 几乎整个地一一变换到同一区间上，使得可测集变换为可测集，反之亦然;

(b) 对 $[0,1]$ 中几乎所有 t 有

$$\psi(t)=\left[\lim_{h\to+0}\frac{mI[t,t+h]}{h}\right]^{\frac{1}{p}}$$

其中 $I[t,t+h]$ 表示由函数 φ 给出的区间 $[t,t+h]$ 的像（即满足 $t\leqslant s\leqslant t+h$ 的点 $\varphi(s)$ 的集合）;

(c) 对所有 $x\in(L^{(p)})$ 有

$$y(t)=x[\varphi(t)]\cdot\psi(t)$$

其中 $y(t)=U[x(t)]$.

反之，若 $\varphi(t)$ 为满足条件 (a) 的函数，则存在由 (b) 定义的函数 $\Phi(t)$，且由条件 (c) 定义的运算 $y=U(x)$ 是 $(L^{(p)})$ 绕 Θ 的旋转[1].

II. 设 $y=U(x)$ 为空间 $(l^{(p)})$（其中 $1\leqslant p\neq 2$）绕 Θ 的任意旋转，则存在函数 $\varphi(n)$ 和数列 $\{\varepsilon_n\}$ 满足:

(a) 函数 $\varphi(n)$ 将自然数集整个地一一变换到自身;

(b) $|\varepsilon_n|=1$（$n=1,2,\ldots$）;

(c) 对 $y=U(x)$ 的任意一对序列 $x=\{\xi_n\}\in(l^{(p)})$ 和 $y=\{\eta_n\}\in(l^{(p)})$ 有

$$\eta_n=\varepsilon_n\cdot\xi_{\varphi(n)}\quad 对n=1,2,\ldots$$

反之，对满足条件 (a) 和 (b) 的任意 $\varphi(n)$ 和 $\{\varepsilon_n\}$，由条件 (c) 定义的运算 $y=U(x)$ 是一个旋转.

[1]本定理是 S. Banach 得到的，在 $1<p\neq 2$ 时的证明曾利用了 Fubini 的一个结果，见 *Rendiconti* Circ. Math. Palermo 50（1926），第 202 页; 对 $p=1$ 的情形，见 *Studia Math.* 4（1933），第 103–111 页.

证明. 首先设 $y=U(x)$ 为 $(l^{(p)})$ 绕 Θ 的旋转. 令

$$\xi_n^{(i)}=\begin{cases}1 & \text{对}i=n\\ 0 & \text{对}i\neq n\end{cases} \tag{27}$$

且 $x_i=\{\xi_n^{(i)}\}$（$i=1,2,\ldots$）. 显然对任意 $x=\{\xi_n\}\in(l^{(p)})$ 有

$$x=\sum_{i=1}^{\infty}\xi_i x_i. \tag{28}$$

令 $y_i=U(x_i)=\{\eta_n^{(i)}\}$，则由 (28) 对 $y=U(x)=\{\eta_n\}$ 有 $y=\sum_{i=1}^{\infty}\xi_i y_i$，故

$$\eta_n=\sum_{i=1}^{\infty}\xi_i\eta_n^{(i)} \quad \text{对}n=1,2,\ldots \tag{29}$$

由 (27) 知当 $i\neq j$ 时 $\xi_n^{(i)}\cdot\xi_n^{(j)}=0$; 从而由第 177 页的引理 2 得

$$\eta_n^{(i)}\cdot\eta_n^{(j)}=0 \quad \text{对}i\neq j\ \text{且}n=1,2,\ldots \tag{30}$$

由于 y 可以是 $(l^{(p)})$ 中的任意序列，由 (29) 和 (30) 可知对每个自然数 n，仅存在一个数 $\varphi(n)$ 使得 $\eta_n^{\varphi(n)}\neq 0$. 由此及 (29) 得

$$\eta_n=\xi_{\varphi(n)}\cdot\varepsilon_n \quad \text{其中}\varepsilon_n=\eta_n^{\varphi(n)}\ \text{且}n=1,2,\ldots, \tag{31}$$

这就实现了条件 (c).

另一方面，$n_1\neq n_2$ 蕴含 $\varphi(n_1)\neq\varphi(n_2)$，因为否则由 (31) 得对所有序列 $\{\eta_n\}\in(l^{(p)})$ 都有等式 $\varepsilon_{n_2}\eta_{n_1}-\varepsilon_{n_1}\eta_{n_2}=0$，这是不可能的; 且若存在自然数 n_0 使得对所有 $n=1,2,\ldots$ 都有 $\varphi(n)\neq n_0$，则对序列 $x=\{\xi_n\}$（其中

$$\xi_n=\begin{cases}1 & \text{对}n=n_0\\ 0 & \text{对}n\neq n_0\end{cases}$$

）由 (31) 得对所有 $n=1,2,\ldots$ 都有 $\eta_n=0$，这同样不可能. 因此条件 (a) 也得证.

最后，由旋转的定义有 $\|y\|=\|x\|$，由此及 (31) 得

$$\sum_{n=1}^{\infty}|\xi_{\varphi(n)}|^p\cdot|\varepsilon_n|^p=\sum_{n=1}^{\infty}|\xi_n|^p \quad \text{对所有}x=\{\xi_n\}\in(l^{(p)}). \tag{32}$$

因此，若对任意给定的自然数 n_0 选择序列 $x=\{\xi_n\}$ 使得

$$\xi_{\varphi(n)}=\begin{cases}1 & \text{对} n=n_0\\ 0 & \text{对} n\neq n_0,\end{cases}$$

则由 (32) 得 $|\varepsilon_{n_0}|^p=1$，故 $|\varepsilon_{n_0}|=1$，这就证明了条件 (b).

逆命题是显然的. □

第 6 节 同构与等价

称两个 (F) 型空间 E 和 E_1 为**同构**的，若存在一一线性运算将 E 变换到整个 E_1 上.

设 $y=U(x)$（其中 $x\in E$，$y\in E_1$）为此运算; 由定理 5（第三章 §3，第 41 页），逆运算 $x=U^{-1}(y)$ 也是线性的，因此运算 $y=U(x)$ 双连续地将 E 变换到 E_1.

称空间 E 和 E_1 为**等价**的，若存在一一线性运算 $y=U(x)$ 将 E 变换到 E_1 上，使得对所有 $x\in E$ 都有 $\|y\|=\|x\|$.

因此，两空间的等价蕴含同构，但我们将看到，反之不真.

下面举两例.

1°. 设 (c_0) 为收敛于 0 的实数列空间. 有定理:

空间 (c) 与 (c_0) 同构.

事实上，令

$$\eta_1=\lim_{i\to\infty}\xi_i \quad \text{且} \quad \eta_i=\xi_{i-1}-\eta_1 \quad \text{对} i>1,$$

其中 $x=\{\xi_i\}\in(c)$. 显然 $\lim_{i\to\infty}\eta_i=0$，故令 $y=\{\eta_i\}$ 得 $y\in(c_0)$. 易见如此定义的运算 $y=U(x)$ 为加性的且满足 $\|U(x)\|\leqslant 2\|x\|$; 因此它为线性的.

反之，若 $y=\{\eta_i\}\in(c_0)$，令

$$\xi_i=\eta_{i+1}+\eta_1 \quad \text{其中} i=1,2,\ldots,$$

则 $x\in(c)$，因为 $\lim_{i\to\infty}\xi_i=\eta_1$，且易见 $y=0$ 蕴含 $x=0$.

因此运算 $y=U(x)$ 为线性的，并确定 (c) 到 (c_0) 的一一变换.

2°. 分别定义在

$$(L^{(p)}),(l^{(p)})(\text{其中} p>1)\ ,(L),(l) \text{ 和} (c)$$

上的线性泛函空间分别等价于空间

$$(L^{(q)}),(l^{(q)})(\text{其中}\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1)\ ,(M),(m) \text{ 和} (l).$$

这只是第四章 §4 建立的关于线性泛函一般形式定理的另一种表述方式（见第 61–68 页）.

由第 166 页的定理 2 立即得

定理 11.6. 等距的 (B) 型空间 E 和 E_1 是等价的.

第 7 节 (B) 型空间的乘积

设 E 和 E_1 为两个 (B) 型空间，记 $E \times E_1$ 为由所有有序对 x, y（其中 $x \in E$，$y \in E_1$）构成的空间，在其中按下述方式定义加法和数乘：

$$x, y + x', y' = x + x', y + y' \text{ 且} hx, y = hx, hy$$

（当然，其中 $x' \in E$，$y' \in E_1$，h 为数），并按下述方式定义范数使其满足条件：

$$\lim_{n\to\infty} x_n = x_0 \text{ 且 } \lim_{n\to\infty} y_n = y_0 \text{ 等价于 } \lim_{n\to\infty} \|x_n, y_n - x_0, y_0\| = 0. \tag{33}$$

按此定义，空间 $E \times E_1$ 亦为 (B) 型的. 称它为空间 E 和 E_1 的**乘积**.

易见，若采用下列任一表达式作为 $z = x, y$ 的范数，则条件 (33) 将被满足：

1) $\|z\| = [\|x\|^p + \|y\|^p]^{\frac{1}{p}}$，其中 $p \geqslant 1$;

2) $\|z\| = \max[\|x\|, \|y\|]$

且它们并非满足此条件的仅有表达式. 然而易见，无论选择何种范数，只要符合条件 (33)，所得空间总同构.

为明确起见，约定在采用范数 1) 时用 $(E \times E_1)_p$ 表示空间 E 和 E_1 的乘积，采用范数 2) 时用 $(E \times E_1)_m$ 表示.

有限个空间 $E_1 \times E_2 \times \ldots \times E_n$ 的乘积可类似定义. 显然，可分空间的乘积是可分空间.

乘积 $E \times E$ 称为 E 的**平方**，记为 E^2.

定理 11.7. 空间 $(L^{(p)})$，$(l^{(p)})$（其中 $p \geqslant 1$）和 (c) 分别与它们的平方同构.

证明. 只需使每个函数 $x(t) \in (L^{(p)})$ 对应于由公式

$$x_1(t) = x\left(\frac{t}{2}\right) \text{ 且} x_2(t) = x\left(\frac{1}{2} + \frac{t}{2}\right) (\text{其中} 0 \leqslant t \leqslant 1)$$

定义的函数对 $x_1(t), x_2(t)$，即得 $(L^{(p)})$ 到 $(L^{(p)})^2$ 的一一线性变换.

同样，只需使每个序列 $x = \{\xi_n\} \in (l^{(p)})$ 对应于由公式

$$\eta_n = \xi_{2n} \text{ 且} \zeta_n = \xi_{2n-1} (\text{其中} n = 1, 2, \ldots)$$

定义的序列对 $x_1=\{\eta_n\}$，$x_2=\{\zeta_n\}$，空间 $(l^{(p)})$ 就被一一线性地变换到 $(l^{(p)})^2$.

最后，使每个序列 $x=\{\xi_n\}\in(c)$ 对应于由公式

$$\eta_n=\xi_{2n}-\xi_1 \text{ 且} \zeta_n=\xi_{2n+1}-\lim_{n\to\infty}\xi_n+\xi_1 (\text{其中} n=1,2,\dots)$$

定义的序列对 $x_1=\{\eta_n\}$，$x_2=\{\zeta_n\}$. 则有

$$\xi_1=\lim_{n\to\infty}\zeta_n,\quad \xi_{2n}=\eta_n+\lim_{n\to\infty}\zeta_n \text{ 且} \xi_{2n+1}=\zeta_n+\lim_{n\to\infty}\eta_n(n=1,2,\dots)$$

可见这是 (c) 到 $(c)^2$ 的一一线性变换. □

定理 11.8. 空间 (C) 与乘积 $(C)\times(c)$[1] 同构.

证明. 用 E 表示 (C) 中满足条件

$$x\left(\frac{1}{n}\right)=0 \quad \text{对} n=1,2,\dots$$

的函数 $x(t)\in(C)$ 构成的子空间.

对每个函数 $x(t)\in(C)$ 构造函数 $\overline{x}(t)\in(C)$，使得对所有自然数 n 都有 $\overline{x}\left(\frac{1}{n}\right)=x\left(\frac{1}{n}\right)$，且在区间 $\left[\frac{1}{n+1},\frac{1}{n}\right]$ 上线性.

使每个 $x(t)\in(C)$ 对应于对（由一个函数和一个数列构成）

$$y(t),\left\{x\left(\frac{1}{n}\right)\right\} \text{ 其中} y(t)=x(t)-\overline{x}(t).$$

显然有 $y(t)\in E$ 且 $\left\{x\left(\frac{1}{n}\right)\right\}\in(c)$.

易见由这种对应建立的变换为线性的.

亦易见，对任意对 $y(t),\{\xi_n\}\in E\times(c)$，存在连续函数 $x(t)$ 使得 $y(t)=x(t)-\overline{x}(t)$ 且 $\xi_n=x\left(\frac{1}{n}\right)$ $(n=1,2,\dots)$，因此所考虑的变换为一一的且将空间 (C) 和 $E\times(c)$ 整个地互相映射. 故该两空间同构.

由此及 $(c)^2$ 与 (c) 同构（由前述定理 5），得空间 $(C)\times(c)$ 与 $E\times(c)\times(c)=E\times(c)^2$ 同构. 由于 $(c)^2$ 与 (c) 同构，空间 $(C)\times(c)$ 与 $E\times(c)$ 同构，从而与 (C) 同构. 证毕. □

定理 11.9. 空间 (C) 与每个空间 $(C^{(p)})$（其中 $p=1,2,\dots$）[2]同构.

证明. 使每个函数 $x(t)\in(C^{(p)})$（参见引言 §7，第 11 页，7)）对应于由函数 $y(t)=x^{(p)}(t)$ 和 p 个数组成的系统 $x(0),x'(0),\dots,x^{(p-1)}(0)$ 构成的对. 用 R_p 表示 p 维空间，$(C^{(p)})$ 因此与 $(C)\times R_p$ 同构，从而由前述定理 6 与 $(C)\times(c)\times R_p$ 同构.

[1] 由此及第 178 页的定理 5 可得空间 $(L^{(p)})$，$(l^{(p)})$ 和 (c) 与任意有限个同类型空间的乘积同构.

[2] $(C^{(p)})$ 表示具有 p 阶连续导数的函数空间（见引言 §7，第 11 页，7)）.

由于 $(c)\times R_p$ 与 (c) 同构，空间 $(C^{(p)})$ 与 $(C)\times(c)$ 同构，从而（再由定理 6）与空间 (C) 同构. 证毕. □

定理 11.10. 空间 (C) 与空间 $(C)^2$[1]同构.

证明. 使 (C) 中任意函数对 $x(t), y(t)$ 对应于对 $z(t), \xi$，其中 $z(t)\in(C)$ 是由公式

$$z(t)=\begin{cases}x(2t) & 对 0\leqslant t\leqslant \frac{1}{2}\\ y(2t-1)-y(0)+x(1) & 对 \frac{1}{2}\leqslant t\leqslant 1\end{cases}$$

定义的函数，ξ 是由方程 $\xi=y(0)$ 对每个 $y(t)\in(C)$ 确定的数.

于是空间 $(C)^2$ 被变换到 $(C)\times R_1$，其中 R_1 表示所有实数组成的空间. 该变换是线性的，且因由定义有 $x(t)=z\left(\frac{t}{2}\right)$ 和 $y(t)=z\left(\frac{1}{2}+\frac{t}{2}\right)-z\left(\frac{1}{2}\right)+\xi$，故它是一一的. 由此得空间 $(C)^2$ 与 $(C)\times R_1$ 同构，而由第 183 页的定理 6，(C) 与 $(C)\times(c)$ 同构，故空间 $(C)^2$ 与 $(C)\times(c)\times R_1$ 同构，从而由 $(c)\times R_1$ 与 (c) 的同构性及定理 6，与空间 (C) 同构. 证毕. □

注释 11.11. 目前尚不清楚空间 (C) 是否与定义在正方形上的所有连续函数的空间同构.

第 8 节 空间 (C) 作为万有空间

定理 11.12. 每个可分 (B) 型空间 E 都等价于空间 (C) 的一个线性闭子空间.

证明. 设 Γ 为定义在 E 上且范数 $\leqslant 1$ 的所有线性泛函的集合，$\{x_n\}$ 为球 $\|x\|\leqslant 1$ 中的稠密序列，其范数 $\leqslant 1$.

作为距离，对任意一对属于 Γ 的泛函 f_1, f_2 令

$$(f_1,f_2)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2^n}\cdot\frac{|f_1(x_n)-f_2(x_n)|}{1+|f_1(x_n)-f_2(x_n)|}. \tag{34}$$

下面证明，按此距离定义，Γ 是完备且紧的.

考虑序列 $\{f_i\}$，其中 $f_i\in\Gamma$ $(i=1,2,\ldots)$，且设 $\lim_{\substack{p\to\infty\\ q\to\infty}}(f_p,f_q)=0$. 由 (34)，极限 $\lim_{i\to\infty}f_i(x_n)$ 存在. 由于 $|f_i|\leqslant 1$，序列 $\{f_i(x)\}$ 由第五章 §1 的定理 3（第 79 页）对任意 $x\in E$ 收敛; 因此泛函序列 $\{f_i\}$ 弱收敛于某个泛函 f，且 $|f|\leqslant 1$，故 $f\in\Gamma$. 由于 $\lim_{i\to\infty}f_i(x_n)=f(x_n)$ $(n=1,2,\ldots)$，由 (34) 得 $\lim_{i\to\infty}(f_i,f)=0$. 于是 Γ 是完备的.

另一方面, 由序列 $\{f_i\}$ 用对角线法可抽取子序列 $\{f_{i_k}\}$ 使得 $\lim_{k\to\infty}f_{i_k}(x_n)$ 存在 $(n=1,2,\ldots)$, 由此同前，存在泛函 $f\in\Gamma$ 使得 $\lim_{k\to\infty}(f_{i_k},f)=0$. 于是 Γ 是紧的.

[1]由此及第 181 页第 2° 点，空间 (c) 和 (l) 的共轭空间也与各自的平方同构.

因此[1]存在将 Cantor 的完备无处稠密集 $P \subset [0,1]$ 变换到集合 Γ 的连续变换. 记 $f_t \in \Gamma$ 为与点 $t \in P$ 对应的泛函，考虑任意元素 $x \in E$ 并如下定义 $y(t)$：对所有 $t \in P$ 令

$$y(t) = f_t(x)$$

而对集合 $[0,1] - P$ 中的点，用线性方式补充函数 $y(t)$，即对所有 $t \in [0,1] - P$ 令

$$y(t) = \frac{y(t') - y(t'')}{t' - t''} \cdot (t - t'') + y(t''),$$

其中 t' 和 t'' 表示 P 的最近点使得 $t' < t < t''$.

考察如此定义的函数 $y(t)$ 的性质.

若 $\lim_{n\to\infty} t_n = t_0$ 且 $t_n \in P$，则序列 $\{f_{t_n}\}$ 弱收敛于 f_{t_0}，故 $\lim_{n\to\infty} f_{t_n}(x) = f_{t_0}(x)$，即 $\lim_{n\to\infty} y(t_n) = y(t_0)$. 因此函数 y 在 P 上连续. 由于在其余地方线性，故它在整个 $[0,1]$ 上连续; 于是 $y(t) \in (C)$.

另一方面，由第四章 §2 的定理 3（第 55 页），存在泛函 $f \in \Gamma$ 使得 $|f(x)| = \|x\|$. 设 $t_0 \in [0,1]$ 为满足 $f = f_{t_0}$ 的点. 则 $|y(t_0)| = |f_{t_0}(x)| = \|x\|$，且因

$$|y(t)| = |f_t(x)| \leqslant |f_t| \cdot |x| \leqslant |x| \quad 对所有 t \in P,$$

由函数 $|y(t)|$ 在集合 P 上达到其最大值，得 $\max_{0\leqslant t\leqslant 1} |y(t)| = \|x\|$.

如此，使每个元素 $x \in E$ 对应于元素 $y = y(t) \in (C)$，且令 $y = U(x)$ 易见该运算为加性的. 由于 $\|y\| = \|x\|$，它为线性的，并将空间 E 等距地变换到 (C) 的子空间 E_1. 于是空间 E 和 $E_1 \subset (C)$ 等价. 证毕. □

定理 11.13. 每个可分度量空间 E 都能等距地变换为 (C) 的子空间.

证明. 据 Fréchet 先生的一条注记，每个可分度量空间 E 都能等距地变换为 (m) 的一个子空间. 容易验证，这样的变换可通过使每个 $x \in E$ 对应于由公式

$$\xi_n = (x, x_n) - (x_0, x_n) \quad 对 n = 1, 2, \ldots$$

定义的序列 $\{\xi_n\}$ 得到，其中序列 $\{x_n\}$ 在 E 中形成稠密集.

因此，只需考虑 $E \subset (m)$ 的情形. 容易证明，由 E 中元素的所有线性组合及其极限组成的空间是一个可分的 (B) 型空间. 由前述定理 9，该空间，从而其子空间 E，可等距地变换为 (C) 的一个子空间. 证毕. □

[1]见引言 §7，第 10 页，6）.

注释 11.14. 由刚建立的定理 9 和 10，空间 (C) 可分别视为可分 (B) 型空间、度量空间的**万有空间**. 因此 (B) 型空间的研究可归结为空间 (C) 的线性闭子集之研究.

第 9 节 共轭空间

设 E 为 (B) 型空间，则定义在 E 上的所有线性泛函组成的空间 $\overline{E}$ 显然亦为 (B) 型的. 称 $\overline{E}$ 为与 E **共轭**的空间.

定理 11.15. 若两个 (B) 型空间 E 和 E_1 同构（相应地，等价），则空间 $\overline{E}$ 和 $\overline{E_1}$ 也同构（相应地，等价）.

证明. 事实上，若线性运算 $y = U(x)$ 将 E 一一且双连续地变换到 E_1，则共轭运算 $X = \overline{U}(Y)$ 由第十章 §1 的定理 5（第 149 页）将空间 $\overline{E}_1$ 同样一一且线性地变换到整个空间 $\overline{E}$，由此得该两空间同构.

若此外 E 和 E_1 等价，则对相应的线性泛函 X 和 Y 有：

$$|X| = \sup_{\|x\|\leqslant 1} X(x) = \sup_{\|x\|\leqslant 1} Y[U(x)] = \sup_{\|y\|\leqslant 1} Y(y) = |Y|,$$

因此空间 $\overline{E}$ 和 $\overline{E}_1$ 在此情形等价. 证毕. □

注释 11.16. 然而，空间 $\overline{E}$ 和 $\overline{E}_1$ 的等价并不总是蕴含空间 E 和 E_1 的等价.

作为例子，考虑空间 $E = (c)$ 和 $E_1 = (c)^2$. 作为与它们共轭的空间得到 $\overline{E} = (l)$ 和 $\overline{E}_1 = (l)^2$[1]，易建立它们的等价性. 但空间 E 和 E_1 并非如此. 可将 E 视为定义在由数 0 和 $\frac{1}{n}$（$n = 1, 2, \ldots$）组成的集合 Q 上的连续函数空间，而空间 E_1 可视为定义在由数 $0, 1, \frac{1}{n}$ 和 $1 + \frac{1}{n}$（$n = 1, 2, \ldots$）组成的集合 Q_1 上的连续函数空间. 由于上述集合 Q 和 Q_1 不同胚，由第 170 页的定理 3 可知空间 E 和 E_1 不是等距的，从而更不可能是等价的.

定理 11.17. 若共轭空间 $\overline{E}$ 可分，则空间 E 亦可分.

证明. 设 $\Gamma \subset \overline{E}$ 表示 E 上范数为 1 的线性泛函的集合，由假设存在序列 $\{X_n\}$（其中 $X_n \in \Gamma$）在 Γ 中稠密.

设 $\{x_n\}$ 为满足下列条件的 E 中元素序列：

$$\|x_n\| = 1 \text{ 且} X_n(x_n) > \frac{1}{2} \quad \text{对} n = 1, 2, \ldots \tag{35}$$

假设空间 E 不可分，则可断言序列 $\{x_n\}$ 在 E 中不是基本的，因此由第四章 §3 的定理 7（第 58 页），它不是全的. 故存在线性泛函 $X \in \Gamma$ 使得

$$\|X\| = 1 \text{ 且} X(x_n) = 0 \quad \text{对} n = 1, 2, \ldots \tag{36}$$

[1]这里 $(l)_l^2$ 表示 (l) 与自身的乘积，其范数定义为两个因子范数之和.

令 $Z_n = X_n - X$，则由 (35) 和 (36) 得 $Z_n(x_n) = X_n(x_n) - X(x_n) > \frac{1}{2}$，故 $\|Z_n\| > \frac{1}{2}$，即对所有自然数 n 都有 $\|X_n - X\| > \frac{1}{2}$，这不可能，因为假设序列 $\{X_n\}$ 在 Γ 中稠密且 $X \in \Gamma$. □

定理 11.18. 设 E 为可分 (B) 型空间，且满足其中范数整体有界的任意元素序列 $\{x_i\}$ 都包含弱收敛于 E 中某元素的子序列，则空间 E 与空间 $\overline{\overline{E}}$（即 $\overline{E}$ 的共轭空间）等价.

证明. 设 G 为满足下列条件的定义在 $\overline{E}$ 上的线性泛函 $F(X)$ 的集合：对所有 $X \in \overline{E}$ 有 $F(X) = X(x_0)$，其中 $x_0 \in E$ 仅依赖于 F. 则 $|F(X)| \leqslant |X| \cdot |x_0|$，故 $|F| \leqslant |x_0|$. 另一方面，由第四章 §2 的定理 3（第 55 页），存在泛函 $X_0 \in \overline{E}$ 使得 $|X_0| = 1$ 且 $X_0(x_0) = |x_0|$，故 $F(X_0) = |x_0|$，从而 $|F| \geqslant |x_0|$. 两个不等式给出 $|F| = |x_0|$.

G 是（在定义在 $\overline{E}$ 上的线性泛函空间 $\overline{\overline{E}}$ 中的）全集.

事实上，若对 $X_0 \in \overline{E}$ 有 $F(X_0) = 0$（对所有 $F \in G$），则亦有 $X_0(x) = 0$（对所有 $x \in E$），故 $X_0 = 0$.

下证集合 G 是超限闭的.

为此，设 ϑ 为任意极限数，$\{F_\xi\}$（其中 $F_\xi \in G$ 对 $1 \leqslant \xi < \vartheta$）为范数整体有界的超限泛函序列. 因此存在 $M > 0$ 使得对所有 $1 \leqslant \xi < \vartheta$ 都有 $|F_\xi| < M$，且由 G 的定义，每个泛函 F_ξ 形如 $F_\xi(X) = X(x_\xi)$. 由于空间 E 由假设可分，记 $\{x_i\}$ 为 E 中的稠密序列.

对每个自然数 n，用 $x_\xi^{(n)}$ 表示从 $\{x_i\}$ 中任意选取的满足不等式

$$\|x_\xi^{(n)} - x_\xi\| < \frac{1}{n} \tag{37}$$

的项，并令

$$F_\xi^{(n)}(X) = X(x_\xi^{(n)}) \quad 对X \in \overline{E}.$$

当 ϑ 与 ω 共尾时（即存在自然数 i 的超限数序列 $\{\xi_i\}$ 使得 $\lim_{i\to\infty} \xi_i = \vartheta$ 且对所有 $i = 1, 2, \ldots$ 都有 $\xi_i < \vartheta$），序列 $\{x_{\xi_i}^{(n)}\}$ 包含弱收敛于元素 $x^{(n)} \in E$ 的子序列. 显然此时

$$\varlimsup_{\xi\to\vartheta} F_\xi^{(n)}(X) \geqslant \varliminf_{i\to\infty} F_{\xi_i}^{(n)}(X) = \varliminf_{i\to\infty} X(x_{\xi_i}^{(n)}) \geqslant X(x^{(n)})$$

因此泛函 $F^{(n)}(X) = X(x^{(n)})$ 是序列 $\{F_\xi^{(n)}\}$ 的超限极限.

当极限数 ϑ 不与 ω 共尾时，超限序列 $\{x_\xi^{(n)}\}$ 由定义至多包含可数多个不同项，故包含一项 $x^{(n)}$ 使得对每个 $\eta < \vartheta$ 都存在 $\xi > \eta$ 使得 $x_\xi^{(n)} = x^{(n)}$. 此时有

$$\varlimsup_{\xi\to\vartheta} F_\xi^{(n)}(X) = \varliminf_{\xi\to\vartheta} X(x_\xi^{(n)}) \geqslant X(x^{(n)}),$$

因此泛函 $F^{(n)}(X) = X(x^{(n)})$ 仍是序列 $\{F_\xi^{(n)}\}$ 的超限极限.

由此，考虑序列 $\{x^{(n)}\}$. 可从中抽取弱收敛于某个 $x \in E$ 的子序列. 令 $F_0(X) = X(x)$. 则一方

面有

$$\overline{\lim_{n\to\infty}} F^{(n)}(X) \geqslant F_0(X) \quad 对所有X \in \overline{E} \tag{38}$$

另一方面，由 G 的定义，$F_0 \in G$. 由 (37) 有 $X(x_\xi) \geqslant X(x_\xi^{(n)}) - \frac{1}{n}\|X\|$，因此由 F_ξ 和 $F_\xi^{(n)}$ 的定义得

$$\overline{\lim_{\xi\to\vartheta}} F_\xi(X) = \underline{\lim_{\xi\to\vartheta}} X(x_\xi) \geqslant \underline{\lim_{\xi\to\vartheta}} X(x_\xi^{(n)}) - \frac{1}{n}\|X\| = \underline{\lim_{\xi\to\vartheta}} F_\xi^{(n)}(X) - \frac{1}{n}\|X\| \geqslant \underline{\lim_{\xi\to\vartheta}} F_\xi(X) - \frac{1}{n}\|X\|$$

从而由 (38) 得 $\underline{\lim}_{\xi\to\vartheta} F_\xi(X) \geqslant \underline{\lim}_{n\to\infty} F^{(n)}(X) \geqslant F_0(X)$. 因此泛函 F_0 是序列 $\{F_\xi\}$ 的超限极限，且因 $F_0 \in G$，集合 G 确实是超限闭的.

作为全的且超限闭的集合，G 由第八章 §2 的注记（第 117 页）和第八章 §3 的引理 3（第 121 页）与空间 $\overline{\overline{E}}$ 重合.

由 G 的定义，对每个 $F \in \overline{\overline{E}}$ 都存在 $x \in E$ 使得如开始所证有 $|F| = |x|$. 因此运算 $U(x) = F$ 为一一的、线性的，且将 E 变换到 $\overline{\overline{E}}$ 上而保持范数不变. 于是空间 E 和 $\overline{\overline{E}}$ 等价. 证毕. □

注释 11.19. 例如，空间 $(L^{(p)})$ 和 $(l^{(p)})$（其中 $p > 1$）就等价于定义在它们上的线性泛函的共轭空间（参见第 181 页 2°）.

定理 11.20. (B) 型空间乘积的共轭空间与这些空间共轭空间的乘积同构.

证明. 设 $E_1, E_2, \ldots, E_n$ 为 (B) 型空间，需建立空间 $\overline{E}$（其中 $E = E_1 \times E_2 \times \ldots \times E_n$）与空间 $\overline{E_1} \times \overline{E_2} \times \ldots \times \overline{E_n}$ 之间的同构. 只需考虑 $n = 2$ 的情形.

分别用 x_1, x_2 和 z 表示 E_1, E_2 和 E 的元素，用 X_1, X_2 和 Z 表示定义在这些空间上的线性泛函.

设 H 为所有形如 x_1, Θ（其中 $x_1 \in E_1$）的对组成的集合. 于是 H 可视为 $E = E_1 \times E_2$ 的子集，因此定义在空间 H 上的每个线性泛函 Z 确定一个定义在 E_1 上的线性泛函 X_1. 令

$$Z(z) = X_1(x_1) \quad 对z = x_1, \Theta$$

且类似地

$$Z(z) = X_2(x_2) \quad 对z = \Theta, x_2.$$

对 $z = x_1, x_2$，容易验证有

$$Z(z) = X_1(x_1) + X_2(x_2). \tag{39}$$

反之，给定两个线性泛函 $X_1 \in \overline{E}_1$ 和 $X_2 \in \overline{E}_2$，公式 (39) 确定了泛函 $Z \in \overline{E}$.

该对应为一一的，建立了 $\overline{E}_1 \times \overline{E}$ 到整个 $\overline{E}$ 的线性变换，因此该两空间同构. 证毕. □

注释 11.21. 若令 $E = [E_1 \times E_2 \times \ldots \times E_n]_{l^p}$（相应地，$E = [E_1 \times E_2 \times \ldots \times E_n]_m$），易见共轭空间 $\overline{E}$ 对 $p > 1$ 与空间 $[\overline{E}_1 \times \overline{E}_2 \times \ldots \times \overline{E}_n]_{l^{\frac{p}{p-1}}}$ 等距，对 $p = 1$ 与空间 $[\overline{E}_1 \times \overline{E}_2 \times \ldots \times \overline{E}_n]_m$（相应地，与空间 $[\overline{E}_1 \times \overline{E}_2 \times \ldots \times \overline{E}_n]_l$）等距.

第十二章 线性维数

第 1 节　定义

设给定两个 (F) 型空间 E 和 E_1，若 E 与 E_1 的某个闭向量子空间同构，则称空间 E 的**线性维数**不超过空间 E_1 的线性维数，记作：

$$\dim_l E \leqslant \dim_l E_1. \tag{1}$$

当 (1) 式及

$$\dim_l E_1 \leqslant \dim_l E \tag{2}$$

同时成立时，称空间 E 与 E_1 **线性维数相等**，记作：

$$\dim_l E = \dim_l E_1.$$

若 (1) 式成立但 (2) 式不成立，则称空间 E 的线性维数**小于** E_1 的线性维数，记作：

$$\dim_l E < \dim_l E_1.$$

最后，若 (1) 和 (2) 两式均不成立，则称这两个空间的线性维数**不可比较**.

同构的空间总是线性维数相等. 反之是否成立尚不清楚，但作者认为非常可能存在 (B) 型空间 (甚至是可分的)，它们线性维数相等却互不同构.

与 n 维欧几里得空间同构的空间简称为 n **维空间**. 若不存在这样的 n，则称该 (B) 型空间为**无穷维空间**.

第 2 节 空间 (c) 和 $(l^{(p)})$ 的线性维数 $(p \geqslant 1)$

定理 12.1. 若对 (B) 型空间 E 有

$$\dim_l E < \dim_l(c) \tag{3}$$

或

$$\dim_l E < \dim_l(l^{(p)}) \quad 对某个 \quad p \geqslant 1, \tag{4}$$

则 E 是有限维空间.

证明. 空间 (c) 与收敛于 0 的序列空间 (c_0) 同构（见第十一章 §6，第 180 页，1°），因此由 (3) 知存在线性闭集 $G \subset (c_0)$ 与 E 同构. 假设 E（从而 G）是无穷维的，则对任意自然数 N，存在 $N+1$ 个元素 $z_i \in G$（$i = 1, 2, \ldots, N+1$）使得

$$\sum_{i=1}^{N+1} \alpha_i z_i = 0 \quad 蕴含 \quad \alpha_1 = \alpha_2 = \cdots = \alpha_{N+1} = 0.$$

因此，设 $z_i = \{\beta_n^i\}$，则可找到不全为零的数 α_i（$i = 1, 2, \ldots, N+1$）满足方程 $\sum_{i=1}^{N+1} \alpha_i \beta_n^i = 0$（$n = 1, 2, \ldots, N$）. 记 $\{\beta_n\}$ 为序列 $z = \sum_{i=1}^{N+1} \alpha_i z_i$，则得

$$|z| > 0 \quad 且 \quad \beta_n = 0 \quad 对 \quad n = 1, 2, \ldots, N. \tag{5}$$

于是证明了：对任意自然数 N，存在 G 中的元素 $z = \{\beta_n\}$ 具有性质 (5).

下面用归纳法定义 G 中的序列 $\{y_i\}$，其中 $y_i = \{\eta_n^i\}$. 首先任取 $y_1 \in G$ 使得 $|y_1| = 1$. 对 $i = 2, 3, \ldots$，取 $y_i \in G$ 使得

$$|y_i| = 1 \quad 且 \quad \eta_n^i = 0 \quad 对 \quad n = 1, 2, \ldots, N_{i-1}, \tag{6}$$

其中 N_{i-1} 是满足不等式

$$|\eta_n^{i-1}| < \frac{1}{3^{i-1}} \quad 对所有 \quad n \geqslant N_{i-1} \tag{7}$$

的最小自然数.

由刚才建立的命题，这样的序列 $\{y_i\}$ 的存在性立即得到.

设 G_0 为所有形如 $\sum_{i=1}^{r} \alpha_i y_i$（$r = 1, 2, \ldots$）的多项式及其极限组成的集合. G_0 显然是线性闭集.

现设 $x = \{\xi_i\}$ 为任意有界序列，定义

$$\eta_n = \sum_{i=1}^{\infty} \xi_i \eta_n^i \quad 对 \quad n = 1, 2, \ldots \tag{8}$$

下面证明

$$\frac{1}{6}\|x\| \leqslant \sup_{1\leqslant n<\infty} |\eta_n| \leqslant \frac{3}{2}\|x\|. \tag{9}$$

事实上，给定指标 n，由 (6) 知存在自然数 m_i 使得

$$|\eta_{m_i}^i| = 1 \quad 对 \quad i = 1, 2, \ldots, \tag{10}$$

于是由 N_i 的定义

$$N_{i-1} \leqslant m_i < N_i \tag{11}$$

从而 $\lim_{i\to\infty} N_i = \infty$，因此存在自然数 k 使得对给定的指标 n 有

$$N_{k-1} \leqslant n < N_k, \tag{12}$$

其中 $N_0 = 1$.

对任意 $i > k$，由 (11) 有 $N_k \leqslant N_{i-1}$，从而由 (12) 得 $n < N_{i-1}$. 因此由 (6) 知对所有 $i > k$ 有 $\eta_n^i = 0$，于是由 (8) 得

$$\eta_n = \sum_{i=1}^{k} \xi_i \eta_n^i. \tag{13}$$

对任意 $i < k$，同时由 (11) 有 $N_i \leqslant N_{k-1}$，从而由 (12) 得 $N_i \leqslant n$，于是由 (7) 得 $|\eta_n^i| < \frac{1}{3^i}$. 由于 $\left|\eta_n^k\right| \leqslant 1$ 且对所有 i 有 $|\xi_i| \leqslant \|x\|$，由 (13) 一方面得关系 $|\eta_n| \leqslant \|x\| \sum_{i=1}^{k-1} \frac{1}{3^i} + \|x\| \leqslant \frac{3}{2}\|x\|$，从而

$$\sup_{1\leqslant n<\infty} |\eta_n| \leqslant \frac{3}{2}\|x\|, \tag{14}$$

另一方面，对满足 (12) 的任意 k，有关系式

$$|\eta_n| \geqslant |\xi_k| \cdot |\eta_n^k| - \|x\| \sum_{i=1}^{k-1} \frac{1}{3^i} \geqslant |\xi_k| \cdot |\eta_n^k| - \frac{1}{2}\|x\|. \tag{15}$$

存在 k 使得 $|\xi_k| \geqslant \frac{2}{3}\|x\|$，于是由 (10) 知 $\left|\eta_{m_k}^k\right| = 1$. 因此，由于关系式 (15) 是对任意给定的指标 n 推出的，取 $n = m_k$ 得：$|\eta_n| \geqslant \frac{2}{3}\|x\| - \frac{1}{2}\|x\| = \frac{1}{6}\|x\|$，从而 $\sup|\eta_n| \geqslant \frac{1}{6}\|x\|$. 将此不等式与不等式 (14) 联立，即见公式 (9) 得证.

现对任意 $x = \{\xi_i\}$，令 (8) 式定义的序列 $y = \{\eta_n\}$ 与之对应. 由 (9) 知序列 y 有界，且令 $y = U(x)$，有

$$\frac{1}{6}|x| \leqslant |U(x)| \leqslant \frac{3}{2}|x|, \tag{16}$$

因此算子 $U(x)$ 是线性的.

另一方面，对 $x_i=\{\xi_n^i\}$，其中

$$\xi_n^i=\begin{cases}1 & \text{当 } i=n,\\ 0 & \text{当 } i\neq n,\end{cases}$$

由定义有 $y_i=U(x_i)$（$i=1,2,\dots$）. 因此对 $x=\{\xi_i\}\subset(c_0)$，有 $x=\sum_{i=1}^{\infty}\xi_i x_i$，于是由算子 $U(x)$ 的连续性得 $y=U(x)=\sum_{i=1}^{\infty}\xi_i U(x_i)=\sum_{i=1}^{\infty}\xi_i y_i$，故这最后一级数收敛，得 $y\subset G_0$.

反之，设 $y\subset G_0$. 由 G_0 的定义，有 $y=\lim_{n\to\infty}s_n$，其中 $s_n=\sum_{i=1}^{r_n}\alpha_i^n y_i$. 对 $t_n=\sum_{i=1}^{r_n}\alpha_i^n x_i$，有 $t_n\subset(c_0)$ 且 $U(t_n)=s_n$. 由 (16) 得 $\frac{1}{6}|t_p-t_q|\leqslant|U(t_p-t_q)|=|s_p-s_q|$. 等式 $\lim_{\substack{p\to\infty\\q\to\infty}}|s_p-s_q|=0$ 因此蕴含 $\lim_{\substack{p\to\infty\\q\to\infty}}|t_p-t_q|=0$. 于是序列 $\{t_n\}$ 收敛. 令 $x=\lim_{n\to\infty}t_n$，则 $x\subset(c_0)$ 且 $U(x)=y$，因此算子 $U(x)$ 是一一的且将 (c_0) 映成整个 G_0.

故空间 (c_0) 与 G_0 同构，而 $G_0\subset G$，从而 $\dim_l(c_0)\leqslant\dim_l G$，由 G 与 E 同构以及 (c_0) 与 (c) 同构，得 $\dim_l(c)\leqslant\dim_l E$，与假设 (3) 矛盾. 因此 E 的维数有限，证毕.

对 $(l^{(p)})$（$p\geqslant1$）的情形，证明类似. □

第 3 节　空间 $(L^{(p)})$ 和 $(l^{(p)})$ 的线性维数 $(p>1)$

定理 12.2. 设 $\{x_i(t)\}$ 为 $(L^{(p)})$ 中弱收敛于 0 的函数序列，则存在子序列 $\{x_{i_k}(t)\}$ 使得

$$\left\|\sum_{k=1}^{n}x_{i_k}\right\|=\begin{cases}O\left(n^{\frac{1}{p}}\right) & \text{对 } 1<p\leqslant2,\\ O\left(n^{\frac{1}{2}}\right) & \text{对 } p\geqslant2.\end{cases}\tag{17}$$

证明. 对 $p>1$，利用如下不等式：

$$|a+b|^p\leqslant|a|^p+p|a|^{p-1}b\cdot\operatorname{sign}a+A|b|^p+B\sum_{j=2}^{\mathrm{E}(p)}|a|^{p-j}|b|^j\tag{18}$$

其中 a 和 b 为任意实数，A 和 B 为仅依赖于 p 的常数，$\mathbf{E}(p)$ 表示 p 的整数部分. 因此当 $p\leqslant2$ 时，最后一项求和消失.

用归纳法定义序列 $\{x_{i_k}\}$：令 $i_1=1$，对 $n>1$，以 i_n 表示满足不等式

$$p\left|\int_0^1|s_{n-1}(t)|^{p-1}\cdot\operatorname{sign}s_{n-1}(t)\cdot x_{i_n}(t)\,\mathrm{d}t\right|\leqslant1\tag{19}$$

的任意自然数，其中 $s_{n-1}(t)=\sum_{k=1}^{n-1}x_{i_k}(t)$. 这样的 i_n 存在，因为由假设序列 $\{x_i(t)\}$ 弱收敛于 0，且 $|s_{n-1}(t)|^{p-1}\subset(L^{(q)})$，其中 $\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1$.

在 (18) 中令 $a = s_{n-1}(t)$，$b = x_{i_n}(t)$，积分得：

$$\begin{aligned}\int_0^1 |s_n|^p \,\mathrm{d}t \leqslant \int_0^1 |s_{n-1}|^p \,\mathrm{d}t + p\int_0^1 |s_{n-1}|^{p-1} \cdot \operatorname{sign} s_{n-1} \cdot x_{i_n} \,\mathrm{d}t \\ + A\int_0^1 |x_{i_n}|^p \,\mathrm{d}t + B\sum_{j=2}^{\mathrm{E}(p)} \int_0^1 |s_{n-1}|^{p-j}|x_{i_n}|^j \,\mathrm{d}t.\end{aligned} \tag{20}$$

序列 $\{x_n(t)\}$ 的弱收敛性由第九章 §1 定理 1（第 133 页）蕴含序列 $\{\|x_n\|\}$ 有界，不妨设

$$\|x_n\| \leqslant 1 \quad 对 \quad n = 1, 2, \ldots \tag{21}$$

现设 $p > 2$. 由 (21) 及 Riesz 不等式（见引言 §2，第 2 页），对 $2 \leqslant j \leqslant p$ 有：

$$\int_0^1 |s_{n-1}|^{p-j}|x_{i_n}|^j \,\mathrm{d}t \leqslant \left[\int_0^1 |s_{n-1}|^p \,\mathrm{d}t\right]^{\frac{p-j}{p}} \leqslant 1 + \left[\int_0^1 |s_{n-1}|^p \,\mathrm{d}t\right]^{\frac{p-2}{p}}$$

于是由 (19) 和 (20) 得 $\|s_n\|^p \leqslant \|s_{n-1}\|^p + 1 + A + Bp \cdot (1 + \|s_{n-1}\|^{p-2})$，迭代后得

$$\|s_n\|^p \leqslant C \cdot n + D\sum_{k=1}^{n-1} \|s_k\|^{p-2} \tag{22}$$

其中 $C = 1 + A + Bp$，$D = Bp$.

设 $M = C + D + 2$. 用归纳法证明

$$\|s_n\| \leqslant M \cdot n^{\frac{1}{2}} \quad 对 \quad n = 1, 2, \ldots \tag{23}$$

事实上，由 s_n 的定义及 (21) 有 $\|s_1\| \leqslant 1$，且假设 (23) 对小于某给定 n 的所有指标成立，则由 (22) 得

$$\|s_n\|^p \leqslant D \cdot M^{p-2}\sum_{k=1}^{n-1} k^{\frac{p-2}{2}} + C \cdot n \leqslant D \cdot M^{p-2} \cdot n^{\frac{p}{2}} + C \cdot n \leqslant M^p n^{\frac{p}{2}}(D \cdot M^{-2} + n^{1-\frac{p}{2}} C \cdot M^{-p}),$$

由此推出 (23)，因为易验证当 $p > 2$ 时，括号内的和小于 1.

由 (23)，$p > 2$ 时的等式 $\|s_n\| = O(n^{\frac{1}{2}})$ 得证.

现考虑 $1 < p \leqslant 2$ 的情形. 由 s_n 的定义，从 (20) 和 (21) 得

$$\int_0^1 |s_n|^p \,\mathrm{d}t \leqslant \int_0^1 |s_{n-1}|^p \,\mathrm{d}t + 1 + A + B,$$

从而 $\|s_n\|^p \leqslant \|s_{n-1}\|^p + C$，其中 $C = 1 + A + B$，因此 $\|s_n\|^p \leqslant \|s_1\|^p + C(n-1) \leqslant C \cdot n$. 令 $M^p = C$，得 $\|s_n\| \leqslant M \cdot n^{\frac{1}{p}}$，故此情形下的等式 $\|s_n\| = O(n^{\frac{1}{p}})$ 也得证，证毕. □

注释. 上述定理对任意 $p > 1$，若将关系式 (17) 中的记号 O 换成 o，则不再成立.

事实上，对 $p \geqslant 2$，设 $x_i(t) = \sin 2\pi i t$. 由于对任意可积函数 $\alpha(t)$ 有 $\lim_{i\to\infty} \int_0^1 \alpha(t) \sin 2\pi i t \, \mathrm{d}t = 0$，序列 $\{x_i(t)\}$ 在 $(L^{(p)})$ 中弱收敛于 0. 令 $s_n(t) = \sum_{k=1}^n x_{i_k}(t)$，其中 $\{x_{i_k}(t)\}$ 表示任意子序列，则

$$\|s_n(t)\| = \sqrt[p]{\int_0^1 |s_n(t)|^p \, \mathrm{d}t} \geqslant \sqrt[p]{\int_0^1 s_n^2(t) \, \mathrm{d}t} = \sqrt[p]{\frac{1}{2} \cdot n^{\frac{1}{2}}},$$

这证明了 O 不能换成 o. 对 $1 < p \leqslant 2$，令

$$x_i(t) = \begin{cases} 2^{\frac{i}{p}} & \text{对 } \frac{1}{2^i} \leqslant t \leqslant \frac{1}{2^{i-1}}, \\ 0 & \text{对 } 0 \leqslant t < \frac{1}{2^i} \text{ 且 } \frac{1}{2^{i-1}} < t \leqslant 1, \end{cases}$$

对任意子序列 $\{x_{i_k}(t)\}$ 有等式 $\|s_n\| = \sqrt[p]{\int_0^1 |s_n(t)|^p \, \mathrm{d}t} = \sqrt[p]{n}$，这也证明了在此情形下 O 不能换成 o.

定理 12.3. 设 $\{x_i\}$ 为 $(l^{(p)})$（$p > 1$）中弱收敛于 0 的元素序列，则存在子序列 $\{x_{i_k}\}$ 使得

$$\left\| \sum_{k=1}^n x_{i_k} \right\| = O\left(n^{\frac{1}{p}}\right). \tag{24}$$

证明. 设 $x_i = \{\xi_r^i\}$. $\{x_i\}$ 弱收敛于 0 蕴含（见第 137 页）：

$$\lim_{i\to\infty} \xi_r^i = 0 \quad \text{对} \quad r = 1, 2, \ldots \tag{25}$$

且

$$\|x_i\| \leqslant M \quad \text{对} \quad i = 1, 2, \ldots \tag{26}$$

序列 $\{x_{i_k}\}$ 的递归定义如下：$x_{i_1} = x_1$，对 $n > 1$，x_{i_n} 是序列 $\{x_i\}$ 中满足不等式

$$\sum_{j=1}^N |\xi_j + \xi_j^{i_n}|^p \leqslant \sum_{j=1}^N |\xi_j|^p + 1, \tag{27}$$

的任意一项，其中 $\{\xi_j\} = s_{n-1} = \sum_{k=1}^{n-1} x_{i_k}$，$N$ 为满足

$$\sum_{j=N}^{\infty} |\xi_j|^p \leqslant 1 \tag{28}$$

的自然数.

由 (25)，这样的 x_{i_n} 存在. 由定义:

$$\|s_n\|^p = \|s_{n-1} + x_{i_n}\|^p = \sum_{j=1}^{N} |\xi_j + \xi_j^{i_n}|^p + \sum_{j=N}^{\infty} |\xi_j + \xi_j^{i_n}|^p,$$

于是由 (27) 及 Hölder 不等式

$$\|s_n\|^p \leqslant \sum_{j=1}^{N} |\xi_j|^p + 1 + \left[\left(\sum_{j=N}^{\infty} |\xi_j|^p\right)^{\frac{1}{p}} + \left(\sum_{j=N}^{\infty} |\xi_j^{i_n}|^p\right)^{\frac{1}{p}}\right]^p$$

从而由 (26) 和 (28) 得

$$\|s_n\|^p \leqslant \|s_{n-1}\|^p + 1 + (1+M)^p = \|s_{n-1}\|^p + C$$

其中 $C = 1 + (1+M)^p$. 由此得 $\|s_n\|^p \leqslant C \cdot n$，从而由 s_n 的定义得等式 (24)，证毕. □

注释. 上述定理 3 对任意 $p > 1$，若将公式 (24) 中的 O 换成 o，则不再成立.

事实上，只需令

$$\xi_r^i = \begin{cases} 1 & \text{当 } i = r, \\ 0 & \text{当 } i \neq r, \end{cases}$$

则对任意子序列 $\{x_{i_k}\}$ 有 $\|\sum_{k=1}^{n} x_{i_k}\| = n^{\frac{1}{p}}$.

下面由刚才建立的定理 2 和 3，一方面推导空间 $(L^{(p)})$ 与 $(L^{(q)})$ 之间、另一方面推导空间 $(l^{(p)})$ 与 $(l^{(q)})$ 之间的若干关系，最后推导空间 $(L^{(p)})$ 与 $(l^{(q)})$ 之间的线性维数关系，其中处处设 $p > 1 < q$.

引理 12.1. 若 $\dim_l(L^{(p)}) \leqslant \dim_l(L^{(q)})$，其中 $p > 1 < q$，则要么 $q \leqslant p \leqslant 2$，要么 $2 \leqslant p \leqslant q$.

证明. 由假设，存在线性算子 $y = U(x)$ （$x \subset (L^{(p)})$），它将 $(L^{(p)})$ 一一且连续地映成 $(L^{(q)})$ 的闭子空间 G. 设 $\{x_n\}$ （$x_n \subset (L^{(p)})$）为弱收敛于 Θ 的序列，则 $\{y_n\}$ （$y_n = U(x_n)$）亦然. 由第 197 页的定理 2，存在子序列 $\{y_{i_n}\}$ 使得

$$\left\|\sum_{k=1}^{n} y_{i_k}\right\| = O\left(n^{\varphi(q)}\right),$$

其中

$$\varphi(q) = \begin{cases} \frac{1}{q} & \text{对 } 1 < q \leqslant 2, \\ \frac{1}{2} & \text{对 } q \geqslant 2. \end{cases} \tag{29}$$

逆算子 $x = U^{-1}(y)$ 连续, 故存在 $M > 0$ 使得对所有 $y \subset G$ 有 $\|x\| \leqslant M\|y\|$, 从而 $\|\sum_{k=1}^{n} x_{i_k}\| \leqslant M\,\|\sum_{k=1}^{n} y_{i_k}\|$，因此由 (29) 得 $\|\sum_{k=1}^{n} x_{i_k}\| = O(n^{\varphi(q)})$. 由于 $\{x_i\}$ 是任意弱收敛于 Θ 的序列，由第 200 页的注记得

$$\varphi(p) \leqslant \varphi(q). \tag{30}$$

由于定义在 $(L^{(p)})$ 和 $(L^{(q)})$ 上的线性泛函空间分别（见第十一章 §6，第 181 页，2°）与 $(L^{(\frac{p}{p-1})})$ 和 $(L^{(\frac{q}{q-1})})$ 等距，可以假设共轭算子 $X = \overline{U}(Y)$ 将 $(L^{(\frac{q}{q-1})})$ 映成 $(L^{(\frac{p}{p-1})})$，且由第十章 §1 定理 3（第 148 页），它的陪域是整个空间 $(L^{(\frac{p}{p-1})})$. 由第十章 §1 定理 10（第 150 页），存在 $m > 0$ 使得对每个 $X \subset (L^{(\frac{p}{p-1})})$，存在 $Y \subset (L^{(\frac{q}{q-1})})$ 满足 $X = \overline{U}(Y)$ 且 $|Y| \leqslant m|X|$.

现设 $\{X_n\}$ 为 $(L^{(\frac{p}{p-1})})$ 中任意弱收敛于 0 的序列，$\{Y_n\}$ 为满足 $X_n = \overline{U}(Y_n)$ 且 $|Y_n| \leqslant m|X_n|$（对所有自然数 n）的序列. 于是范数序列 $\{|Y_n|\}$ 有界，故（见第八章 §7，第 130 页）存在弱收敛的子序列 $\{Y_{n_i}\}$. 若记其极限为 Y_0，则 $\overline{U}(Y_0) = 0$，因为 $\{X_{n_i}\}$ 弱收敛于 0. 因此 $X_n = \overline{U}(Y_{n_i} - Y_0)$，且序列 $\{Y_{n_i} - Y_0\}$ 弱收敛于 0. 令 $Y_i = Y_{n_i} - Y_0$（$i = 1, 2, \ldots$），则由定理 2（第 197 页）可从中抽取子序列 $\{Y_{i_k}\}$ 使得

$$\left\|\sum_{k=1}^{n} Y_{i_k}\right\| = O\left(n^{\varphi\left(\frac{q}{q-1}\right)}\right) \tag{32}$$

令 $X_{i_k} = \overline{U}(Y_{i_k})$，得 $|X_{i_k}| \leqslant |\overline{U}| \cdot |Y_{i_k}|$ 且

$$\left\|\sum_{k=1}^{n} X_{i_k}\right\| = O\left(n^{\varphi\left(\frac{q}{q-1}\right)}\right). \tag{33}$$

序列 $\{X_{i_k}\}$ 由定义从 $\{X_n\}$ 中抽取，由 (32) 和 (33) 及第 200 页的注记得

$$\varphi\left(\frac{p}{p-1}\right) \leqslant \varphi\left(\frac{q}{q-1}\right), \tag{34}$$

于是由 (30) 及 φ 的定义易得所要证明的不等式. □

由此引理易得如下定理:

定理 12.4. 若 $\dim_l(L^{(p)}) = \dim_l(L^{(q)})$，其中 $p > 1 < q$，则 $p = q$.

定理 12.5. 若 $1 < p < 2 < q$，则空间 $(L^{(p)})$ 和 $(L^{(q)})$ 的线性维数不可比较.

定理 12.6. 若 $1 < p \neq 2$，则 $\dim_l(L^2) < \dim_l(L^{(p)})$.

证明. 对 $x(t) \subset (L^2)$，定义

$$y(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{i=1}^{\infty}(a_i \cos 2^i t + b_i \sin 2^i t)$$

其中 $a_i = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} x(t)\cos it\,\mathrm{d}t$，$b_i = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} x(t)\sin it\,\mathrm{d}t$，对所有 $i = 0, 1, 2, \ldots$.

由于 $\sum_{i=0}^{\infty}(a_i^2 + b_i^2) = \int_0^{2\pi} x^2(t)\,\mathrm{d}t$，存在常数 $M > 0$（仅依赖于 p）使得

$$\left[\int_0^{2\pi} |y(t)|^p\,\mathrm{d}t\right]^{\frac{1}{p}} \leqslant M\left[\sum_{i=0}^{\infty}(a_i^2 + b_i^2)\right]^{\frac{1}{2}}.$$

令 $y = U(x)$，则 $y \subset (L^{(p)})$，且上述不等式可写成

$$\|y\| \leqslant M\|x\|,$$

因此算子 $U(x)$ 是线性的.

另一方面，存在常数 K 使得 $[\sum_{i=0}^{\infty}(a_i^2 + b_i^2)]^{\frac{1}{2}} \leqslant K\int_0^{2\pi} |y(t)|\,\mathrm{d}t$，于是由 Riesz 不等式（见引言 §2，第 2 页）：

$$\left[\sum_{i=0}^{\infty}(a_i^2 + b_i^2)\right]^{\frac{1}{2}} \leqslant K\sqrt[p]{2\pi}\left[\int_0^{2\pi} |y(t)|^p\,\mathrm{d}t\right]^{\frac{1}{p}},$$

因此 $\|x\| \leqslant C\|y\|$，其中 $C = K\sqrt[p]{2\pi}$，故 $U(x)$ 存在连续逆算子.

于是有关系式

$$\dim_l(L^2) \leqslant \dim_l(L^{(p)})$$

其中等号被排除（否则由第 203 页的定理 4 将得 $p = 2$，与假设矛盾），证毕. □

值得注意的是，如下问题尚未解决：当 $q < p < 2$ 以及 $2 < p < q$ 时，是否有 $\dim_l(L^{(p)}) < \dim_l(L^{(q)})$?

对空间 $(l^{(p)})$ 和 $(l^{(q)})$，有

定理 12.7. 空间 $(l^{(p)})$ 和 $(l^{(q)})$（$1 < p \neq q > 1$）的线性维数不可比较.

证明. 设 $\dim_l(l^{(p)}) \leqslant \dim_l(l^{(q)})$，如同引理证明中的做法，事实上可得如下不等式（对应于公式 (30) 和 (34)）：

$$\frac{1}{p} \leqslant \frac{1}{q} \quad \text{且} \quad \frac{p-1}{p} \leqslant \frac{q-1}{q},$$

由此得 $p = q$，与假设矛盾. □

下面讨论 $(L^{(p)})$ 与 $(l^{(q)})$ 之间的线性维数关系.

定理 12.8. 若 $\dim_l(L^{(p)}) \leqslant \dim_l(l^{(q)})$，其中 $p > 1 < q$，则 $p = q = 2$.

证明. 用同样的方法可得（代替 (30) 和 (34)）：

$$\varphi(p) \leqslant \frac{1}{q} \quad \text{且} \quad \varphi\left(\frac{p}{p-1}\right) \leqslant \frac{q-1}{q},$$

其中

$$\varphi(n)=\begin{cases}\frac{1}{n} & \text{对 } n\leqslant 2,\\ \frac{1}{2} & \text{对 } n\geqslant 2.\end{cases} \tag{35}$$

由此立即得 $p=q=2$，证毕. □

上述定理 8 由第十一章 §2 定理 1（第 165 页）蕴含如下

推论 12.9. $\dim_l(L^{(p)})=\dim_l(l^{(q)})$ 当且仅当 $p=q=2$.

定理 12.10. 若 $1<p\neq 2$，则 $\dim_l(L^{(p)})>\dim_l(l^{(p)})$.

证明. 事实上，若相反地有 $\dim_l(L^{(p)})\leqslant\dim_l(l^{(p)})$，则由第 205 页的定理 8，在其中令 $p=q$，将得 $p=2$，与假设矛盾.

因此只需证明所述空间的线性维数是可比较的. 为此，定义

$$y_i(t)=\begin{cases}2^{\frac{i}{p}} & \text{对} \quad \frac{1}{2^i}\leqslant t\leqslant\frac{1}{2^{i-1}},\\ 0 & \text{对} \quad 0\leqslant t<\frac{1}{2^i} \quad \text{且} \quad \frac{1}{2^{i-1}}<t\leqslant 1,\end{cases}$$

由此 $\int_0^1|y_i(t)|^p\,\mathrm{d}t=1$，故 $y_i(t)\subset(L^{(p)})$ $(i=1,2,\dots)$. 对任意 $x=\{\xi_i\}\subset(l^{(p)})$，定义

$$y(t)=\sum_{i=1}^{\infty}\xi_i y_i(t),$$

由此 $\int_0^1|y(t)|^p\,\mathrm{d}t=\sum_{i=1}^{\infty}|\xi_i|^p$. 令 $y=U(x)$，得 $\|y\|=\|x\|$，这证明了算子 $U(x)$ 是线性的且存在连续逆算子. 它通过同构将 $(l^{(p)})$ 映成 $(L^{(p)})$ 的子空间. □

定理 12.11. 对 $1<q<p<2$ 以及 $2<p<q$，空间 $(L^{(p)})$ 和 $(l^{(q)})$ 的线性维数不可比较.

证明. 假设 $\dim_l(L^{(p)})\geqslant\dim_l(l^{(q)})$，用引理证明（第 202 页）中的推理方法，可得如下不等式（类似于 (30) 和 (34)）:

$$\frac{1}{q}\leqslant\varphi(p) \quad \text{且} \quad \frac{q-1}{q}\leqslant\varphi\left(\frac{p}{p-1}\right),$$

其中函数 φ 由第 205 页的公式 (35) 定义. 由此立即得要么 $p\leqslant q\leqslant 2$，要么 $2\leqslant q\leqslant p$，与假设矛盾. □

然而如下问题仍未解决：当 $p<q<2$ 以及 $2<q<p$ 时，是否有 $\dim_l(L^{(p)})>\dim_l(l^{(q)})$?

附录 A
附录

第 1 节 (B) 型空间中的弱收敛

在 (B) 型空间中，弱收敛有两种概念，即：线性泛函的弱收敛和元素的弱收敛. 这两种概念显然是不同的. 这里将补充一些与这些概念研究相关的定理.

第 2 节 线性泛函集合的弱导数

设 E 为可分的 (B) 型空间，Γ 为定义在 E 上的任意线性泛函集合.

若存在泛函序列 $\{X_k\}$，其中 $X_k \neq X$ 且对所有 $k = 1, 2, \ldots$ 有 $X_k \in \Gamma$，该序列弱收敛于泛函 X，则称线性泛函 X 为集合 Γ 的**弱聚点**.

集合 Γ 的所有弱聚点的集合称为 Γ 的**一阶弱导数**，而 Γ 的 $n-1$ 阶弱导数的弱导数称为 Γ 的 n **阶弱导数**. Γ 的逐次弱导数记为 $\Gamma_{(1)}, \Gamma_{(2)}, \ldots, \Gamma_{(n)}, \ldots$

若 Γ 为线性集，则显然有

$$\Gamma \subset \Gamma_{(1)} \subset \Gamma_{(2)} \subset \cdots \subset \Gamma_{(n)} \subset \Gamma_{(n+1)} \subset \cdots \tag{1}$$

容易给出一个线性集 Γ 的例子，它是闭的，但不是弱闭的.

事实上，考虑空间 (c_0) 上形如

$$X(x) = \sum_{i=1}^{\infty} C_i \xi_i, \tag{2}$$

其中 $x = \{\xi_i\} \in (c_0)$ 且 $C_1 = \sum_{i=2}^{\infty} C_i$ 的线性泛函集合作为 Γ.

容易验证，如此定义的集合 Γ 是线性的、闭的，且不包含形如 (2) 中 $C_1 = 1$ 且 $C_i = 0$（$i =$

$2, 3, \ldots$）的泛函. 然而，后一泛函（参见第 VIII 章 §6 的注释，第 239 页）是形如 (2) 且

$$C_i = \begin{cases} 1 & 当 i = 1 或 i = k, \\ 0 & 当 i \neq 1 且 i \neq k \end{cases}$$

的泛函序列 $\{X_k\}$ 的弱极限，因此集合 Γ 不是弱闭的.

定理 A.1. 对每个自然数 n，存在定义在空间 (c_0) 上的线性泛函集合，其 n 阶弱导数不是弱闭的.

证明. 定义在 (c_0) 上的每个线性泛函 X 都具有形式 (2)，其中 $x = \{\xi_i\} \in (c_0)$ 且 $\sum_{i=1}^{\infty} |C_i| = |X|$，设 Δ_1 为那些满足 $C_{2i} = 0$（$i = 1, 2, \ldots$）的泛函集合，Δ_2 为那些满足 $C_{2i-1} = 0$（$i = 1, 2, \ldots$）的泛函集合.

将每对自然数 r, s 一一对应于一个偶数 $N(r, s)$，并以 $Z_{r,s}$ 记定义在 (c_0) 上形如 $Z_{r,s}(x) = \sum_{i=1}^{\infty} C_i \xi_i$（其中 $x = \{\xi_i\} \in (c_0)$）且满足

$$C_i = \begin{cases} 1 & 当 i = N(r, s), \\ 0 & 当 i \neq N(r, s) \end{cases} \tag{3}$$

的线性泛函.

考虑定义在 (c_0) 上的任意线性泛函集合 G. 设 H 为所有形如 (2) 且 $C_{2i} = 0$（$i = 1, 2, \ldots$）且泛函 $\sum_{i=1}^{\infty} C_{2i-1} \xi_i$ 属于 G 的泛函集合. 如此定义的集合 H 显然是线性的，且 $H \subset \Delta_1$. 作为 (l) 的子空间，集合 Δ_1 是可分的. 因此 H 包含一个泛函序列 $\{Y_r\}$，它在范数 $\leqslant 1$ 且属于 H 的泛函集合中稠密，且满足

$$|Y_r| \leqslant 1 \quad 对 \quad r = 1, 2, \ldots \tag{4}$$

对自然数 r 和 s，令

$$X_{r,s} = Y_r + r Z_{r,s} \tag{5}$$

并以 Γ 记形如

$$X = \sum_{\substack{r=1 \\ s=1}}^{\infty} a_{r,s} X_{r,s} = \sum_{r=1}^{\infty} Y_r \sum_{s=1}^{\infty} a_{r,s} + \sum_{\substack{r=1 \\ s=1}}^{\infty} r a_{r,s} Z_{r,s}, \tag{6}$$

其中至多有有限个 $a_{r,s}$ 非零的泛函 X 构成的线性集.

由 (5) 和 (6)，根据集合 Δ_1 和 Δ_2 的定义有

$$\left\| \sum_{r=1}^{\infty} a_{r,s} X_{r,s} \right\| \geqslant \left\| \sum_{r=1}^{\infty} r a_{r,s} Z_{r,s} \right\| = \sum_{r=1}^{\infty} |r a_{r,s}|. \tag{7}$$

现设 $\{X_k\}$（其中 $X_k \in \Gamma$，$k=1,2,\ldots$）为弱收敛于 X 的序列. 由 (6) 可设

$$X_k = \sum_{\substack{r=1\\s=1}}^{\infty} a_{r,s}^{(k)} X_{r,s} = X_k' + X_k'', \tag{8}$$

其中

$$X_k' = \sum_{r=1}^{\infty} Y_r \sum_{s=1}^{\infty} a_{r,s}^{(k)} \quad \text{且} \quad X_k'' = \sum_{\substack{r=1\\s=1}}^{\infty} a_{r,s}^{(k)} Z_{r,s}. \tag{9}$$

显然对所有 k 有 $X_k' \in \Delta_1$ 且 $X_k'' \in \Delta_2$，因此序列 $\{X_k'\}$ 和 $\{X_k''\}$ 分别弱收敛于某泛函 $X' \in \Delta_1$ 和 $X'' \in \Delta_2$；从而 $X = X' + X''$.

以 H' 记 H 的通常意义下的导集，首先证明

$$X' \in H' \tag{10}$$

事实上，由序列 $\{X_k\}$ 弱收敛于 X，存在 $M > 0$ 使得对 $k=1,2,\ldots$ 有 $|X_k| \leqslant M$，从而由 (7)–(9) 得 $\sum_{\substack{r=1\\s=1}}^{\infty} |r a_{r,s}^{(k)}| \leqslant M$；因此令 $b_r^{(k)} = \sum_{s=1}^{\infty} a_{r,s}^{(k)}$，可写

$$\sum_{r=1}^{\infty} \left| r b_r^{(k)} \right| \leqslant M \quad \text{对} \quad k = 1,2,\ldots \tag{11}$$

因此存在子序列 $\{k_j\}$ 使得极限 $b_r = \lim_{j\to\infty} b_r^{(k_j)}$ 对所有 $r=1,2,\ldots$ 存在.

于是由 (11) 有

$$\sum_{r=1}^{\infty} r\,|b_r| \leqslant M. \tag{12}$$

对任意自然数 m，有 $\sum_{r=1}^{\infty} |b_r^{(k_j)} - b_r| \leqslant \sum_{r=1}^{m-1} |b_r^{(k_j)} - b_r| + \sum_{r=m}^{\infty} |b_r^{(k_j)}| + \sum_{r=m}^{\infty} |b_r|$，这由 (12) 和 b_r 的定义给出不等式 $\lim_{j\to\infty} \sum_{r=1}^{\infty} |b_r^{(k_j)} - b_r| \leqslant 2\frac{M}{m}$，因此，$m$ 任意，$\lim_{j\to\infty} \sum_{r=1}^{\infty} |b_r^{(k_j)} - b_r| = 0$.

注意由 (4) 和 (12)，级数 $\sum_{r=1}^{\infty} b_r Y_r$ 收敛，且上述等式由 (9) 表明 X' 是其和. 因对所有自然数 r 有 $Y_r \in H$ 且 H 是线性集，故 $X' \in H'$.

因此已证明对 $X = X' + X'' \in \Gamma_{(1)}$，其中 $X' \in \Delta_1$ 且 $X'' \in \Delta_2$，有 $X' \in H'$. 故公式 (10) 得证.

另一方面，容易验证当 $s \to \infty$ 时序列 $\{Z_{r,s}\}$ 弱趋于 Θ；因此由 (5)，当 $s \to \infty$ 时序列 $\{X_{r,s}\}$ 弱趋于 Y_r. 故有

$$Y_r \in \Gamma_{(1)} \quad \text{对} \quad r = 1,2,\ldots \tag{13}$$

现设 $\{X_k\}$（其中 $X_k \in \Gamma_{(1)}$，$k=1,2,\ldots$）为弱收敛于 $X \in \Delta_1 \cap \Gamma_{(2)}$ 的序列. 显然 $X_k = X_k' + X_k''$，其中 $X_k' \in H'$ 且 $X_k'' \in \Delta_2$. 容易看出序列 $\{X_k'\}$ 弱收敛于 X，从而 $X \in H_{(1)}$. 反之，对每个 $X \in H_{(1)}$，存在属于 H 且弱收敛于 X 的泛函序列 $\{X_k\}$. 可设而不失一般性 $|X_k| \leqslant 1$ 对所有 $k=1,2,\ldots$ 成立.

由序列 $\{Y_r\}$ 的定义，对每个 k 存在指标 r_k 使得 $|X_k - Y_{r_k}| \leqslant \frac{1}{k}$，因此序列 $\{Y_{r_k}\}$ 也弱收敛于 X. 由 (13) 这蕴含 $X \in \Gamma_{(2)}$，从而 $X \in \Delta_1 \cap \Gamma_{(2)}$（因由 Δ_1 的定义有 $H_{(1)} \subset \Delta_1$）. 故

$$\Delta_1 \cap \Gamma_{(2)} = H_{(1)}. \tag{14}$$

如此继续下去，用归纳法可证一般地有

$$\Delta_1 \cap \Gamma_{(n+1)} = H_{(n)} \quad \text{对所有} \quad n = 1, 2, \ldots \tag{15}$$

由此，回到给定的集合 G. 若假设 G 的导集 G' 不是弱闭的，则 H 的导集 H' 显然也不是弱闭的，从而由 (10) 和 (14)，Γ 的弱导集 $\Gamma_{(1)}$ 也不是弱闭的. 类似地，假设 G 的 $n-1$ 阶弱导集 $G_{(n-1)}$ 不是弱闭的，则 H 的 n 阶弱导集 $H_{(n)}$ 显然也不是弱闭的，因此由 (15)，Γ 的 $n+1$ 阶弱导集 $\Gamma_{(n+1)}$ 也不是弱闭的. 证毕. □

注释 A.2. 可定义 Γ 的阶为超限数 ξ（第二数类）的弱导集 $\Gamma_{(\xi)}$，令 $\Gamma_{(\xi)} = \sum_{\eta<\xi} \Gamma_{(\eta)}$ 或 $\Gamma_{(\xi)} = (\Gamma_{(\xi-1)})_{(1)}$，视 ξ 为极限数与否而定.

于是可用归纳法建立如下定理，类似于定理 1：

对每个第二数类的超限数 ξ，存在定义在空间 (c_0) 上的线性泛函集合，其 ξ 阶弱导数不是弱闭的.

然而可以证明，设 E 为可分的 (B) 型空间，Γ 为定义在 E 上的任意线性泛函集合，则总存在有限的或第二数类的超限数 ξ 使得集合 $\Gamma_{(\xi)}$ 是弱闭的. 这是定理 4（第 VIII 章 §5），第 124 页的直接推论.

定理 A.3. 设 E 为可分的 (B) 型空间，$\Gamma \subset \overline{E}$ 为线性集. 为使 $\Gamma_{(1)} = \overline{E}$，必要且充分条件是存在数 $M > 0$ 使得对任意 $x \in E$，Γ 包含满足条件

$$|X| \leqslant M \quad \text{且} \quad |X(x)| = |x| \tag{16}$$

的泛函 X.

证明. 必要性. 对每个自然数 n，设 Δ_n 为定义在 E 上的线性泛函 X 的集合，这些泛函是满足不等式 $|X_k| \leqslant n$（$k = 1, 2, \ldots$）且属于 Γ 的泛函序列 $\{X_k\}$ 的弱极限. 于是由定理 2（第 VIII 章 §5），第 123 页，$\Gamma_{(1)} = \sum_{n=1}^{\infty} \Delta_n$，从而由假设

$$\overline{E} = \sum_{n=1}^{\infty} \Delta_n. \tag{17}$$

注意每个 Δ_n 都是闭集. 事实上，设 $\{X_j\}$ 为属于 Δ_n 的泛函序列，$\lim_{j\to\infty} |X_j - X| = 0$. 由 Δ_n 的定义，对每个 j 存在弱收敛于 X_j 的序列 $\{X_k^j\}$，其中 $X_k^j \in \Gamma$ 且 $|X_k^j| \leqslant n$（$k = 1, 2, \ldots$）. 给定在 E 中稠密的序列 $\{x_r\}$，等式 $\lim_{k\to\infty} X_k^j(x_r) = X_j(x_r)$ 和 $\lim_{j\to\infty} X_j(x_r) = X(x_r)$（对所有 j 和 r

成立）蕴含存在序列 $\{X_{k_j}^j\}$ 使得对所有 $r=1,2,\ldots$ 有 $\lim_{j\to\infty}X_{k_j}^j(x_r)=X(x_r)$. 因 $|X_{k_j}^j|\leqslant n$，由定理 2（第 VIII 章 §4），第 123 页，序列 $\{X_{k_j}^j\}$ 弱收敛于 X，从而 $X\in\Delta_n$.

因此，每个 Δ_n 都是闭的，且空间 $\overline{E}$ 也是 (B) 型的，等式 (17) 蕴含存在指标 n_0 使得 Δ_{n_0} 包含球 $K\subset\overline{E}$. 以 X' 记 K 的中心，ρ 记其半径.

给定元素 $x\in E$，由定理 3（第 IV 章 §2），第 55 页，存在 $X_0\in\overline{E}$ 使得

$$X_0(x)=|x| \quad 且 \quad |X_0|=1. \tag{18}$$

令

$$\lambda=\frac{\rho}{1+|X'|} \quad 且 \quad X''=\lambda X_0+(1-\lambda)X'. \tag{19}$$

由此易得 $|X''-X'|\leqslant\rho$，从而 $X''\in K\subset\Delta_{n_0}$. 因此存在分别弱收敛于 X' 和 X'' 的序列 $\{X'_k\}$ 和 $\{X''_k\}$；于是同时有

$$|X'_k|\leqslant n_0 \quad 且 \quad |X''_k|\leqslant n_0 \quad 对 \quad k=1,2,\ldots \tag{20}$$

序列 $\left\{\frac{1}{\lambda}X''_k-\frac{1-\lambda}{\lambda}X'_k\right\}$ 属于 Γ 且由 (19) 弱收敛于 X_0. 由 (18) 因此存在指标 k_0 使得

$$\frac{1}{\lambda}X''_{k_0}(x)-\frac{1-\lambda}{\lambda}X'_{k_0}(x)=\alpha\cdot|x| \quad 其中 \quad \frac{1}{2}<\alpha<2. \tag{21}$$

因此令 $X=\frac{1}{\alpha}\left(\frac{1}{\lambda}X''_{k_0}-\frac{1-\lambda}{\lambda}X'_{k_0}\right)$，得到 $X\in\Gamma$，$X(x)=|x|$，且由 (19)–(21)，$|X|\leqslant M=\frac{2n_0}{\rho}(2+2|X'|+\rho)$，故 M 与 x 无关. 因此条件 (16) 确实满足.

充分性. 以 Δ 记属于 Γ 且满足 $|X|\leqslant 1$ 的线性泛函 X 的集合，由定理 4（第 VIII 章 §5），第 124 页，在 Δ 中存在线性泛函序列 $\{X_r\}$ 在 Δ 中弱稠密.

对每个 $x\in E$ 令

$$y=\{\eta_r\} \quad 其中 \quad \eta_r=X_r(x) \quad 对 \quad r=1,2,\ldots \tag{22}$$

于是

$$|\eta_r|\leqslant|X_r|\cdot|x|\leqslant|x|, \tag{23}$$

从而 $y\in(m)$. 对 y 采用 (m) 中的范数，由 (22) 和 (23) 得

$$|y|\leqslant|x|. \tag{24}$$

另一方面，以 $X\in\Gamma$ 记由假设满足条件 (16) 的泛函，令 $X'=\frac{1}{M}X$. 因此 $|X'|\leqslant 1$，从而 $X'\in\Delta$. 于是存在弱收敛于 X' 的子序列 $\{X_{r_j}\}$，从而 $\lim_{j\to\infty}|X_{r_j}(x)|=|X'(x)|$，这由 (16) 和 (22) 给出 $\overline{\lim}_{r\to\infty}|\eta_r|\geqslant|X'(x)|\geqslant\frac{1}{M}|x|$，因此

$$|y|\geqslant\frac{1}{M}|x|. \tag{25}$$

因此令 $y = U(x)$，由 (22) 和 (23) 易见运算 $U(x)$ 是线性的；由 (25) 其逆运算亦然. 因空间 E 由假设可分，$U(x)$ 的陪域 E_1 由该运算的连续性也是可分的.

现设 X 为定义在 E 上的任意线性泛函且

$$Y(y) = X[U^{-1}(y)], \tag{26}$$

因此（运算 $U^{-1}(y)$ 是线性的）Y 是定义在 E_1 上的线性泛函. 由 Mazur 定理（第 IV 章 §4），第 72 页，因此存在双重数列 $\{a_{nr}\}$ 使得

$$Y(y) = \lim_{n\to\infty} \sum_{r=1}^{\infty} a_{nr}\eta_r \quad \text{对} \quad y \in E_1 \tag{27}$$

且当 $r > k_n$ 时 $a_{nr} = 0$，其中 $\{k_n\}$ 为自然数序列. 由 (22) 得

$$\sum_{r=1}^{\infty} a_{nr}\eta_r = \sum_{r=1}^{k_n} a_{nr}\eta_r = \sum_{r=1}^{k_n} a_{nr}X_r(x) = \overline{X}_n(x), \tag{28}$$

因此对 $n = 1, 2, \ldots$ 有 $\overline{X}_n \in \Gamma$，因 Γ 是线性集且 $X_r \in \Delta \subset \Gamma$.

于是由 (26) 和 (27) 有 $Y[U(x)] = \lim_{n\to\infty} \overline{X}_n(x)$，从而由 (26) 对所有 $x \in E$ 有 $X(x) = \lim_{n\to\infty} \overline{X}_n(x)$；序列 $\{\overline{X}_n\}$ 因此弱收敛于 X. 故 $X \in \Gamma_{(1)}$，这证明条件确实充分. 证毕. □

容易看出，定义在任意度量集 Q 上的所有有界实连续函数 $x(q)$ 的集合 E 构成一个 (B) 型空间，当在其中按通常方式定义加法和数乘并取范数

$$|x| = \sup_{q\in Q} |x(q)|. \tag{29}$$

此外，若集 Q 是紧的，则所述空间 E 是可分的.

在这些假设下，有

定理 A.4. 以 $\{q_r\}$ 记 Q 中的稠密点列，则对定义在 E 上的每个线性泛函 X，存在实数表 $\{a_{ir}\}$ 和自然数序列 $\{k_n\}$ 使得

$$\lim_{i\to\infty} \sum_{r=1}^{k_n} a_{ir}x(q_r) = X(x) \quad \text{对} \quad x \in E.$$

证明由前述定理 2 得出，因在这些条件下，形如 $\sum_{i=1}^{m} a_i x(q_i)$（其中 a_i 为实数，m 为任意自然数）的线性泛函集合 Γ 满足定理 2 的假设.

事实上，对每个 $x \in E$ 存在 $q_0 \in Q$ 使得 $|x(q_0)| \geqslant \frac{1}{2}\max_{q\in Q}|x(q)| = \frac{1}{2}\|x\|$，且因 $X_0(x) = x(q_0)$ 是范数为 1 的线性泛函，只需取 $M = 2$.

定理 3 也可由 Mazur 定理（第 72 页）直接应用得出.

第 3 节　元素的弱收敛

现设 Q 为任意抽象集，不必是度量的，E 为定义在 Q 上的所有有界实函数 $x(q)$ 的 (B) 型空间，具有范数 (29).

若对任意函数 $x \in E$，条件 $x(q) \geqslant 0$ 对所有 $q \in Q$ 蕴含 $X(x) \geqslant 0$，则称定义在 E 上的泛函 X 为**非负的**.

定理 A.5. 定义在 E 上的每个线性泛函 X 都是定义在 E 上的两个非负线性泛函之差.

证明. 对每个 Q 的子集 S 令

$$\mu(S) = \sup_{T \subset S} X(\varphi_T) \tag{30}$$

其中 φ_T 一般记集合 T 的特征函数. 于是

$$0 \leqslant \mu(S) \leqslant \|X\| \tag{31}$$

且对不相交的 S_1 和 S_2 有 $\mu(S_1 + S_2) = \mu(S_1) + \mu(S_2)$. 由 (30) 还有

$$X(\varphi_S) \leqslant \mu(S). \tag{32}$$

对每个满足 $\|x\| = 1$ 的函数 $x \in E$ 令

$$x_n(q) = \frac{i}{n} \quad \text{当} \quad \frac{i}{n} \leqslant x(q) < \frac{i+1}{n} \text{ 其中} -n \leqslant i \leqslant n. \tag{33}$$

显然对所有 $q \in Q$ 有 $|x_n(q) - x(q)| \leqslant \frac{1}{n}$，从而 $\|x_n - x\| \leqslant \frac{1}{n}$ 因此

$$x = \lim_{n\to\infty} x_n. \tag{34}$$

以 $S_{i,n}$ 记 Q 中满足方程 $x_n(q) = \frac{i}{n}$（其中 $-n \leqslant i \leqslant n$）的所有元素的集合，令

$$X'(x) = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=-n}^{n} \frac{i}{n} \mu(S_{i,n}). \tag{35}$$

容易证明，由 (34)，极限 (35) 存在且由 (31) 有 $|X'(x)| \leqslant \|X\|$.

现泛函 $X'(x)$ 是非负的，因假设

$$x(q) \geqslant 0 \quad \text{对所有} \quad q \in Q, \tag{36}$$

由 (31) 和 (35) 得不等式

$$X'(x) \geqslant 0. \tag{37}$$

另一方面注意 (33) 给出 $x_n(q) = \sum_{i=0}^{n} \frac{i}{n} \varphi_{S_{i,n}}(q)$，
从而由 (32) $X(x_n) \leqslant \sum_{i=0}^{n} \frac{i}{n} \mu(S_{i,n})$，因此由 (34) 和 (35)

$$X(x) \leqslant X'(x), \tag{38}$$

因此泛函

$$X''(x) = X'(x) - X(x) \tag{39}$$

也是非负的,因由 (38),当条件 (36) 成立时有 $X''(x) \geqslant 0$. 最后,由 (39) 有 $X(x) = X'(x) - X''(x)$. 证毕. □

定理 A.6. 为使范数整体有界且属于 E 的函数序列 $\{x_n\}$ 弱收敛于 Θ，必要且充分条件是对 Q 中的每个点列 $\{q_i\}$ 有

$$\lim_{n\to\infty} \overline{\lim_{i\to\infty}} |x_n(q_i)| = 0. \tag{40}$$

证明. 必要性. 假设相反，对 Q 中的某个点列 $\{q_i\}$ 有 $\lim_{n\to\infty} \overline{\lim}_{i\to\infty} |x_n(q_i)| > \alpha > 0$. 于是存在递增的自然数序列 $\{n_k\}$ 使得对所有 k 有 $\overline{\lim}_{i\to\infty} |x_{n_k}(q_i)| > \alpha > 0$，因此可用对角线法从 $\{q_i\}$ 中提取子序列 $\{q_{i_j}\}$ 使得

$$\left|\lim_{j\to\infty} x_{n_k}(q_{i_j})\right| > \alpha > 0 \quad \text{对} \quad k = 1, 2, \ldots \tag{41}$$

考虑由公式

$$X(x) = \lim_{j\to\infty} x(q_{i_j}) \quad \text{对所有} \quad x \in E,$$

定义的线性泛函 X，其中符号 Lim 的意义见第 II 章 §3，4，第 34 页. 于是由 (41) 对所有 $k = 1, 2, \ldots$ 有 $|X(x_{n_k})| > \alpha$，因此

$$\lim_{n\to\infty} |X(x_n)| > \alpha > 0, \tag{42}$$

故序列 $\{x_n\}$ 不弱收敛于 Θ.

充分性. 为证明范数 $|x_n| < M$（$n = 1, 2, \ldots$）的函数序列 $\{x_n\}$ 弱收敛于 Θ，反之只需证明不存在满足不等式 (42) 的非零非负线性泛函 X.

现假设相反，存在这样的泛函 X；显然可设

$$\|X\| = 1 \quad \text{且} \quad \lim_{n\to\infty} X(x_n) > \alpha > 0. \tag{43}$$

对每个 $q \in Q$ 令

$$s_n(q) = \begin{cases} x_n(q) & \text{当} x_n(q) \geqslant 0, \\ 0 & \text{当} x_n(q) < 0 \end{cases}$$

且

$$t_n(q) = x_n(q) - s_n(q).$$

极限 $\lim_{n\to\infty} X(s_n)$ 和 $\lim_{n\to\infty} X(t_n)$ 之一显然超过 $\frac{\alpha}{2}$. 设

$$\lim_{n\to\infty} X(s_n) > \frac{\alpha}{2} > 0. \tag{44}$$

再对每个 $q \in Q$ 令

$$y_n(q) = \begin{cases} s_n(q) & 当 s_n(q) \geqslant \frac{\alpha}{6}, \\ 0 & 当 s_n(q) < \frac{\alpha}{6}. \end{cases}$$

于是 $\|s_n - y_n\| \leqslant \frac{\alpha}{6}$，从而由 (43) 和 (44)

$$\overline{\lim_{n\to\infty}} X(y_n) > \frac{\alpha}{3} > 0. \tag{45}$$

以 S_n 记 Q 的子集，由满足 $|x_n(q)| \geqslant \frac{\alpha}{6}$ 的所有 $q \in Q$ 组成，$\varphi_n(q)$ 为集合 S_n 的特征函数. 因 $\|y_n\| \leqslant \|s_n\| \leqslant \|x_n\| < M$，对所有 $q \in Q$ 和 $n = 1, 2, \ldots$ 有 $\varphi_n(q) \geqslant \frac{1}{M} y_n(q)$，因此，泛函 X 非负，$X(M \cdot \varphi_n) \geqslant X(y_n)$，从而由 (45)，令 $\beta = \frac{\alpha}{3M}$，

$$\overline{\lim_{n\to\infty}} X(\varphi_n) > \beta > 0. \tag{46}$$

考虑对 Q 的子集 S 由等式

$$F(S) = X(\varphi_S) \tag{47}$$

定义的集函数 F，其中 φ_S 是 S 的特征函数. 不等式 (46) 因此可写成 $\overline{\lim}_{n\to\infty} F(S_n) > \beta > 0$ 的形式. 以 n_1 记满足

$$\overline{\lim_{n\to\infty}} F(S_{n_1} \cap S_n) > 0. \tag{48}$$

的最小自然数.

这样的 n_1 存在.

事实上，假设相反，$\lim_{n\to\infty} F(S_k \cap S_n) = 0$ 因此 $\lim_{n\to\infty} F\left(\sum_{i=1}^{k} S_i \cap S_n\right) = 0$ 对 $k = 1, 2, \ldots$ 成立. 于是存在两个递增序列 $\{k_j\}$ 和 $\{n_j\}$ 使得对 $j = 1, 2, \ldots$

$$k_j < n_j < k_{j+1}, \quad F(S_{n_j}) > \beta \quad 且 \quad F\left(\sum_{i=1}^{k_j} S_i \cap S_{n_j}\right) < \frac{\beta}{2}.$$

令 $T_j = S_{n_j} - \sum_{i=1}^{k_j} S_i \cap S_{n_j}$，于是

$$T_{j_1} \text{ 和} T_{j_2} \text{ 对所有} j_1 \neq j_2 \text{ 不相交} \tag{49}$$

且

$$F(T_j) > \frac{\beta}{2} \quad \text{对} \quad j = 1, 2, \ldots \tag{50}$$

因此，以 γ_j 记集合 T_j 的特征函数，由 (47) 和 (50) 将有

$$X\left(\sum_{j=1}^{n} \gamma_j\right) > n \cdot \frac{\beta}{2} \quad \text{对} \quad n = 1, 2, \ldots. \tag{51}$$

然而由 (48) 有 $\left|\sum_{j=1}^{n} \gamma_j\right| \leqslant 1$，从而 $X\left(\sum_{j=1}^{n} \gamma_j\right) \leqslant 1$ 对 $n = 1, 2, \ldots$ 成立，与 (51) 矛盾.

如对 (48) 那样进行，用归纳法得到递增序列 $\{n_j\}$ 的存在性，满足不等式 $\lim_{n\to\infty} F(S_{n_1} \cap S_{n_2} \cap \cdots \cap S_{n_j} \cap S_n) > 0$，因此没有一个集合 $\{S_{n_j}\}$ 是空的.

现对每个 $i = 1, 2, \ldots$ 以 q_i 记集合 $S_{n_1} \cap S_{n_2} \cap \cdots \cap S_{n_i}$ 中的任一点. 显然对每个 $i \geqslant j$ 有 $q_i \in S_{n_j}$，从而由 S_n 的定义，对所有 $j = 1, 2, \ldots$ 有不等式 $|x_{n_j}(q_i)| \geqslant \frac{\alpha}{6}$. 这蕴含 $\lim_{i\to\infty} |x_{n_j}(q_i)| \geqslant \frac{\alpha}{6}$ 因此 $\lim_{n\to\infty} \lim_{i\to\infty} |x_n(q_i)| \geqslant \frac{\alpha}{6}$，与假设 (40) 矛盾. 证毕. □

定理 A.7. 设 E 为 (B) 型空间，为使范数整体有界的序列 $\{x_n\}$（其中 $x_n \in E$，$n = 1, 2, \ldots$）弱收敛于 Θ，必要且充分条件是对每个属于定义在 E 上的线性泛函集合 Γ 的泛函序列 $\{X_i\}$ 有

$$\lim_{n\to\infty} \overline{\lim_{i\to\infty}} |X_i(x_n)| = 0 \tag{52}$$

其中 Γ 满足下列性质:

1° 泛函 $X \in \Gamma$ 的范数集合是有界的;

2° 存在数 $N > 0$ 使得对每个元素 $x \in E$，集合 Γ 包含满足不等式

$$X(x) \geqslant N \cdot |x| \tag{53}$$

的泛函 X.

证明. 为证明条件充分，考虑定义在 Γ 上的所有有界实函数的空间 E_1. 对每个元素 $x \in E$ 令对应于关系

$$f(X) = X(x) \quad \text{对} \quad X \in \Gamma \tag{54}$$

给出的函数 $f \in E_1$.

以 M 记泛函 $X \in \Gamma$ 范数的上确界，令 $f = U(x)$. 由 (54) 和 (53) 有 $N \cdot |x| \leqslant \|f\| \leqslant M \cdot |x|$；因此运算 U 是加性的，从而是线性的，其逆运算亦然.

由此，若序列 $\{x_n\}$ 满足条件 (52)，由 (54)，令 $f_n(X) = X(x_n)$，得 $\lim_{n\to\infty} \overline{\lim}_{i\to\infty} |f_n(X_i)| = 0$. 由第 219 页的定理 5，这蕴含序列 $\{f_n\}$ 弱趋于 Θ. 因运算 $x = U^{-1}(f)$ 是线性的且 $x_n = U^{-1}(f_n)$，由定理 3（第 IX 章 §5），第 143 页，序列 $\{x_n\}$ 弱收敛于 Θ.

可用类似推理证明条件是必要的. 证毕. □

定理 A.8. 设 E 为 (B) 型空间，为使范数整体有界的序列 $\{x_n\}$ 弱收敛于 Θ，必要且充分条件是对所有 $X \in \Gamma$ 有

$$\lim_{n\to\infty} X(x_n) = 0 \tag{55}$$

其中 Γ 为满足性质 1° 和 2° 且弱紧的泛函集合.

证明. 由元素弱收敛的定义，条件是必要的. 为证明其充分性，只需（由定理 6）证明 (55) 蕴含 (52).

假设相反，存在子序列 $\{x_{n_k}\}$ 和 Γ 中的泛函序列 $\{X_i\}$ 使得

$$\overline{\lim_{i\to\infty}} |X_i(x_{n_k})| > \alpha > 0 \quad 对 \quad k = 1, 2, \ldots \tag{56}$$

然而，由假设集合 Γ 是弱紧的，存在弱收敛于某泛函 $X_0 \in \Gamma$ 的子序列 $\{X_{i_j}\}$，从而由 (56) 对所有 $k = 1, 2, \ldots$ 有 $|X_0(x_{n_k})| \geqslant \alpha > 0$，与 (55) 矛盾. 证毕. □

由刚建立的定理容易推出下列定理.

定理 A.9. 给定定义在度量紧集 Q 上的有界实连续函数序列 $\{x_n\}$，$\{x_n\}$ 弱收敛于 Θ 的充要条件是

$$\lim_{n\to\infty} x_n(q) = 0 \quad 对所有 \quad q \in Q.$$

证明由定理 7 得出，以 E 记定义在 Q 上的实连续函数空间，Γ 记定义在 E 上形如 $X(x) = x(q)$（其中 $x \in E$ 且 $q \in Q$）的所有线性泛函 X 的集合. 于是显然对所有 $X \in \Gamma$ 有 $|X| = 1$，且容易看出 Γ 也满足定理 7 的其他假设.

注释 A.10. 特别地，由定理 8 立即得到定义在直线区间上（或正方形上）的连续函数序列弱收敛的条件.

定理 A.11. 为使空间 (M) 中的函数序列 $\{x_n\}$ 弱收敛于 Θ，必要且充分条件是对每个满足

$$\int_0^1 |\alpha_i(t)|\,\mathrm{d}t = 1 \quad 其中 \quad i = 1, 2, \ldots$$

的函数序列 $\{\alpha_i(t)\}$ 有

$$\lim_{n\to\infty} \overline{\lim_{i\to\infty}} \left| \int_0^1 \alpha_i(t) x_n(t)\,\mathrm{d}t \right| = 0.$$

证明由第 222 页的定理 6 得出，以 Γ 记定义在 (M) 上形如

$$X(x)=\int_0^1 x(t)\alpha(t)\,\mathrm{d}t \quad \text{其中} \quad \int_0^1 |\alpha(t)|\,\mathrm{d}t=1$$

的所有线性泛函 X 的集合.

于是对所有 $X\in\Gamma$ 有 $|X|=1$，且对每个 $x\in(M)$，存在满足条件

$$\int_0^1 |\alpha(t)|\,\mathrm{d}t=1 \quad \text{且} \quad \int_0^1 \alpha(t)x(t)\,\mathrm{d}t \geqslant \frac{1}{2}\|x\|$$

的函数 $\alpha(t)$.

因此只需在前述定理中取 $N=\frac{1}{2}$.

定理 A.12. 为使序列 $\{x_n\}$（其中 $x_n=\{\xi_k^{(n)}\}$）的空间 (m) 的元素弱收敛于 0，必要且充分条件是对每个指标序列 $\{k_i\}$ 有

$$\lim_{n\to\infty}\overline{\lim_{i\to\infty}}|\xi_{k_i}^{(n)}|=0.$$

证明由第 222 页的定理 6 得出，以 Γ 记形如

$$X_j(x)=\xi_j \quad \text{其中} \quad x=\{\xi_j\}\in(m)\ \text{且}\ j=1,2,\ldots$$

的泛函序列 $\{X_j\}$.

于是对 $j=1,2,\ldots$ 有 $|X_j|=1$，且此外对每个 $x\in(m)$ 存在 j 使得 $|X_j(x)|\geqslant\frac{1}{2}\|x\|$. 因此取 $N=\frac{1}{2}$.

附录 B
注释

引言

§ 3. 当函数序列 $\{x_n(t)\}$ 渐近收敛于函数 $x(t)$ 时，记作 $\lim \mathrm{as}\, x_n(t) = x(t)$.

§ 5. 末一定理蕴含：若连续函数 $x_n(t)$ 整体有界且序列 $\{x_n(t)\}$ 处处收敛，则对每个有界变差函数 $\alpha(t)$，极限 $\lim_{n\to\infty}\int_a^b x_n(t)\mathrm{d}\alpha(t)$ 皆存在（参见 F. Riesz, *Sur le théorème de M. Egoroff et sur les opérations fonctionnelles linéaires*, Acta Szeged 1 (1922), p. 18-26）.

§ 6. M. Lebesgue 定理的另一证明见 M. H. Hahn, *Über Folgen linearer Operationen*, Monatshefte f. Math. u. Phys. 32 (1922), p. 1-88.

§ 7. 空间 (S) 中元素 x 与 y 的距离亦可由公式

$$(x, y) = \inf[\omega + mE(|x(t) - y(t)| > \omega)] \tag{1}$$

定义. 如此得到的度量与正文中的度量等价（见第 9 页）.

类似地，在 (s) 中，度量

$$(x, y) = \inf_{1\leqslant n<\infty}\left[\frac{1}{n} + \max_{1\leqslant k\leqslant n}|\xi_k - \eta_k|\right]$$

等价于第 10 页 2. 中给出的度量（参见 M. Fréchet, *Les espaces abstraits*, Paris 1928, p. 82 et 92）.

此外，在例 1, 3, 5, 7, 8 和 10 中，可设所讨论的函数定义于更一般的集合上. 例如，在第 11 页例 5 中，可设函数定义于任意紧或完备 (D) 型空间中；在后一情形，只限于有界连续函数，相应地，一致连续函数.

算子理论中许多重要的 (D) 型空间例子，见于 M. H. Hahn 和 M. Fréchet 的上述著作；关于应用，特别值得注意 M. J. Schauder 在以下论文中考虑的空间：*Zur Theorie stetiger Abbildungen in*

Funktionalräumen 和 *Bemerkungen zu meiner Arbeit...*, Math. Zeitschr. 26 (1927), p. 47-65 et 417-431.

其他值得注意的例子如下：

11. 拟周期函数空间 (Q)，其度量为 $(x,y)=\max_{-\infty<t<+\infty}|x(t)-y(t)|$.

12. 空间 $(H^{(p)})$（其中 $p\geqslant 1$），由定义于圆 $s^2+t^2\leqslant 1$ 上且分别等价（即几乎处处相等）于调和函数的所有函数组成. 其中的度量由公式

$$(x,y)=\left(\iint_{s^2+t^2\leqslant 1}|x(s,t)-y(s,t)|^p\,\mathrm{d}s\,\mathrm{d}t\right)^{\frac{1}{p}}$$

给出.

13. 空间 (R)，由定义于 $[0,1]$ 上且分别等价于 Riemann 可积函数的所有函数组成，其度量为 $(x,y)=\max_{0\leqslant t\leqslant 1}|x(t)-y(t)|$. 对 $[0,1]$ 上几乎处处有上界的可测函数 $z(t)$，记号 $\max z(t)$ 表示使得 $z(t)\leqslant\omega$ 几乎处处成立的那些数 ω 的下确界.

例 11 和 12 见于 G. Ascoli, *Sugli spazi lineari metrici e le loro varietà lineari*, Annali di Matematica X (1932), p. 33-81；例 13 见于 M. W. Orlicz, *Beiträge zur Theorie der Orthogonalentwicklungen*, Studia Mathematica I (1929), p. 1-39 et 241-255.

此外，M. Orlicz 还提出一类包含空间 $(L^{(p)})$（其中 $p>1$）的空间，其他空间与它们有许多共同性质.

具体地, 设 $M(u)$ 为定义于全体实数 u 上的凸函数, 满足: 1^0 $M(-u)=M(u)$, 2^0 $\lim_{u\to 0}\frac{M(u)}{u}=0$，$3^0$ $\lim_{u\to+\infty}\frac{1}{u}M(u)=+\infty$，以及 4^0 $\lim_{u\to+\infty}\frac{1}{M(u)}M(2u)<+\infty$.

设 $N(v)$ 为由下列关系定义的关于全体实数 v 的函数：当 $v\geqslant 0$ 时 $N(v)=\max_{0<u<\infty}[uv-M(u)]$，当 $v<0$ 时 $N(v)=N(-v)$.

这样，所有定义于 $[0,1]$ 上且使得积分 $\int_0^1 M[x(t)]\,\mathrm{d}t$ 存在的函数 $x(t)$ 构成的集合 (O)，配以度量公式

$$(x,y)=\sup\int_0^1[x(t)-y(t)]\omega(t)\,\mathrm{d}t\quad \text{其中}\quad \int_0^1 N[\omega(t)]\,\mathrm{d}t\leqslant 1,$$

构成一个完备的度量空间.

特别地，当 $M(u)=\frac{1}{p-1}\left(1-\frac{1}{p}\right)^p\cdot|u|^p$（其中 $p>1$）时，有 $N(v)=v^{\frac{p}{p-1}}$ 且

$$(x,y)=\left(\int_0^1|x(t)-y(t)|^p\right)^{\frac{1}{p}},$$

因此空间 (O) 此时与 $(L^{(p)})$ 相同.

若在 $M(u)$ 的定义中以 $\overline{\lim}_{u\to 0}\frac{1}{M(u)}M(2u)<+\infty$ 代替条件 4^0 而不改变 $N(v)$ 的定义，则那些

使得级数 $\sum_{n=1}^{\infty} M(\xi_n)$ 收敛的实数序列 $\{\xi_n\}$ 所构成的空间 (o)，配以度量公式

$$(x,y) = \sup \sum_{n=1}^{\infty} (\xi_n - \eta_n)\omega_n \quad \text{其中} \quad x = \{\xi_n\},\, y = \{\eta_n\} \quad \text{且} \quad \sum_{n=1}^{\infty} N(\omega_n) \leqslant 1,$$

也构成一个完备的度量空间，空间 $(l^{(p)})$（其中 $p > 1$）是它的特例（参见 W. Orlicz, *Über eine gewisse Klasse von Räumen vom Typus (B)*, Bull. de l'Acad. Polonaise des Sc. et des Lettres, Février 1932）.

最后还需指出，空间 1-13、(O) 和 (o) 都不是紧的；更进一步：其中每一个的紧子集都是无处稠密的.

§ 8. 空间 1, 2, 5-10 以及 12，还有 M. W. Orlicz 的空间 (O) 和 (o)，都是可分的. 相反，空间 3, 4, 11 和 13 都不可分，尽管它们与前述空间一样具有连续统的势. 在后述每个空间中，势小于连续统的集合都是无处稠密的.

§ 9. 正如 M. K. Kuratowski 所指出的，若一个 Borel 可测算子一一地将可分度量空间 E 变换为度量空间 E_1，则逆运算满足 Baire 条件. 该证明基于第 17 页定理 7 和如下定理：为使定义于度量空间 E 上且陪域位于度量空间 E_1 中的运算 $U(x)$ 满足 Baire 条件，必须且只需对每个闭集 $G_1 \subset E_1$，满足 $U(x) \in G_1$ 的元素 $x \in E$ 构成的集合 G 满足 Baire 条件（见 C. Kuratowski, *La propriété de Baire dans les espaces métriques*, Fundamenta Mathematicae XVI (1930), p. 390-394）.

第一章

§ 1. 鉴于后面各章研究的 (F) 型空间是 (G) 型空间的特例——特别是当把它们看作关于其中定义的加法运算的群时——从一开始就采用群的基本运算的加法名称并按此调整陈述和记号是较为适宜的.

所有度量空间 1-13、(O) 和 (o) 如所立见，都是 (G) 型空间；作为群的基本运算采用通常的函数或序列的加法. 所有这些空间都是阿贝尔的，即其中定义的加法是可交换的（用公式表示：$x + y = y + x$）.

其他 (G) 型空间的例子有：

14. 紧度量空间 Q 到自身的所有同胚变换构成的空间，当两个同胚 x 与 y 的距离由公式 $(x,y) = \sup(x(q), y(q)) + \sup(x^{-1}(q), y^{-1}(q))$ 定义，且加法理解为通常的变换复合时.

15. (位于度量空间中的) 球面到自身的所有等距变换构成的空间，其度量与加法定义同前一例.

16. 定义于度量空间 Q 上且取值于模为 1 的复数的所有函数构成的空间（还可以假设这些函数是连续的或一致连续的），当两个函数 x 与 y 的距离由公式 $(x,y) = \sup_{q \in Q} |x(q) - y(q)|$ 定义，且加法理解为通常的函数乘法时.

17. 自然数集到自身的一一变换构成的空间，其度量为

$$(x,y)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2^n}\cdot\frac{|x(n)-y(n)|+|x^{-1}(n)-y^{-1}(n)|}{1+|x(n)-y(n)|+|x^{-1}(n)-y^{-1}(n)|}$$

（其中 $x(n)$ 等表示 n 经变换 x 等得到的像），加法理解为变换的复合.

给定任意 (G) 型空间 E，若 E 的元素序列 $\{x_n\}$ 收敛，则显然

$$\lim_{\substack{p\to\infty\\q\to\infty}}(x_p-x_q,\Theta)=0. \tag{I}$$

但尚不知道反过来条件 (I) 是否总蕴含该序列的收敛性.

若在度量空间 E 中元素的加法被定义为使 E 关于它构成群——甚至满足公理 II_1 和 II_2——则条件 (I) 蕴含序列 $\{x_n\}$ 收敛于 E 中某元素尚不足以保证空间 E 完备. 不过尚不清楚此时 E 中是否存在与给定度量等价的另一度量，使其成为 (G) 型空间. M. D. van Dantzig 证明了在附加假设 E 是阿贝尔空间时情况确实如此；此时甚至可以找到等价的" 平移不变" 度量，即满足对一切 $z\in E$ 都有 $(x,y)=(x+z,y+z)$ 的度量（参见 D. van Dantzig, *Einige Sätze über topologische Gruppen*, Jahresber. d. Deutsch Math. Ver. 41, 1932）.

(G) 型空间的定义以及正文中所有定理见注记：S. Banach, *Über metrische Gruppen*, Studia Mathematica III (1931), p. 101-113；另参见 F. Leja, *Sur la notion de groupe abstrait topologique*, Fundamenta Mathematicae IX (1927), p. 37-44.

§ 2. 空间 1-10（引言 §7，第 9-12 页）以及这里定义的空间 11-13、(O) 和 (o)（见第 227-228 页）都是连通的.

§ 3. 除第 24 页定理 5 外，还有如下定理：设空间 E 连通，若 $\{U_n(x)\}$ 为线性泛函序列，则该序列有界的点集要么是第一纲的，要么等于 E.

§ 4. 由上一条注释可得：设空间 E 连通，若 $\{U_{p,q}(x)\}$ 为线性泛函双重序列，使得对 E 的元素序列 $\{x_p\}$ 有 $\lim_{q\to\infty}|U_{p,q}(x_p)|=+\infty$ 对每个 p 成立，则满足 $\lim_{q\to\infty}|U_{p,q}(x)|=+\infty$（对 $p=1,2,\ldots$）的所有 $x\in E$ 构成的集合属于第二纲，而其补集属于第一纲.

可以证明，当假设空间 E 可分时，第三章的定理 3-7（第 38-42 页）对 (G) 型空间 E 和 E_1 也成立（参见 S. Banach, l. c., Stud. Math. III, p. 101-113）. 第 41 页定理 5 也是第 23 页定理 4 和第 228 页注释的直接推论. 假设 E 可分是本质性的；人们想知道定理 3-7 是否对不可分但连通的 (G) 型空间也成立.

值得注意的是，如下两个性质对每个 (G) 型空间 E 是等价的：

(α) 给定一一地将 E 变换为 (G) 型空间 E_1 的线性运算 $y=U(x)$，逆运算 $x=U^{-1}(y)$ 是线性的.

(β) 给定 E 中使 E 仍为 (G) 型空间的另一度量 $(x,y)^*$，若 $\lim_{n\to\infty} x_n = x_0$ 总蕴含

$$\lim_{n\to\infty}(x_n,x_0)^* = 0,$$

则反之亦然.

然而，尚不清楚这些性质是否呈现于例如第 229 页例 16 中的函数空间 E（当 Q 取为模为 1 的复数集时）.

第二章

§ 1. 也可以考虑这样的向量空间：其中的元素不仅可以乘以实数，还可以乘以复数，而无需修改公理 1)-7). 这些空间构成了复线性算子理论以及更广泛的一类解析运算——常解析函数的推广——的出发点（参见例如 L. Fantappiè, *I funzionali analitici*, Città di Castello 1930）. 拟在另一卷中阐述这一理论.

向量空间 E 中的集合 H 称为 E 的 **Hamel 基**，如果 E 的每个元素 x 都是 H 中元素的线性组合，而 H 中没有元素 x 是 H 中其他元素的线性组合. 每个向量空间都有 Hamel 基，且它们两两等势.

§ 2. 上条注释蕴含每个向量空间 E 中存在定义于 E 上的非恒为零的加性、齐次泛函.

§ 3. 末一定理（见第 34 页 4.）立即蕴含：对自然数集 N 的每个子集 S，可指定一个测度 mS，使得 1) $mS \geqslant 0$，2) 对不交集合 S_1 和 S_2 有 $m(S_1+S_2) = mS_1+mS_2$，3) 当 $S_1 \approx S_2$ 时 $mS_1 = mS_2$，以及 4) $mN = 1$.

无论满足条件 1)-4) 的测度如何，形如 $an+b$（其中 $n = 1,2,\ldots$，a 和 b 固定）的数的测度为 $\frac{1}{a}$；所有素数的集合测度为 0. 满足条件 1)-4) 的测度不总与密度（当后者有定义时）一致，但总可以安排使得这额外的条件也满足.

第三章

§ 1. 关于 (F) 型空间的定义，参见 M. Fréchet, *Les espaces abstraits topologiquement affines*, Acta Math. 47 (1926), p. 25-52.

显然，第 227-228 页定义的空间 11-13、(O) 和 (o) 也是 (F) 型的.

M. S. Mazur 指出每个 (F) 型空间满足条件

$$\text{若} \lim_{n\to\infty} x_n = x, \lim_{n\to\infty} y_n = y, \lim_{n\to\infty} h_n = h, \lim_{n\to\infty} k_n = k, \text{则} \lim_{n\to\infty}(h_nx_n + k_ny_n) = hx+ky. \tag{1}$$

尚不知道在完备且满足条件 (1) 的每个向量空间中，度量是否能被等价度量代替而得到 (F) 型空间.

§ 3. 第 38-43 页的定理 3-9 对满足条件 (1) 和如下条件的任意度量向量空间 E 仍然有效：

(2) 若 $\lim_{\substack{p\to\infty\\q\to\infty}}(x_p - x_q) = 0$，则存在元素 $x \in E$ 使得 $\lim_{n\to\infty} x_n = x$. M. Mazur 猜想可将后一条件替换为假设空间 E 完备. 关于定理 3-5 对 (B) 型空间的简单证明，参见 M. J. Schauder 的注记 *Über die Umkehrung linearer stetiger Funktionaloperationen*, Studia Math. II (1930), p. 1-6.

现考虑 (F) 型空间 E 中的任意线性闭集 $G \subset E$. 若约定当且仅当 $x - y \in G$ 时将 E 的两个元素 x 和 y 归入同一部分，则可得到 E 的一个不交分解. 有如下定理：这样得到的 E 的部分构成的集合 E^* 是 (F) 型空间，当按如下条件（其中 X, Y, Z 表示 E^* 的元素）在其中定义距离和基本运算时：

1^0 $(X, Y) = \inf(x, y)$（$x \in X$ 且 $y \in Y$），

2^0 $X + Y$ 是 E^* 中包含形如 $x + y$（其中 $x \in X$ 且 $y \in Y$）的元素的那个 Z，

3^0 tX 是 E^* 中包含形如 tx（其中 $x \in X$）的元素的那个 Y.

该定理的证明见于我的著作 *Teorja operacyj*, Tom I, Warszawa 1931, p. 47-49（波兰文）；另参见 F. Hausdorff, *Zur Theorie der linearen metrischen Räume*, Journ. f. reine u. angew. Math. 167 (1932), p. 294-311.

基于此定理可以证明：给定定义于 (F) 型空间 E 上且陪域位于同样为 (F) 型的空间 E_1 中的线性运算 U，若 E 可分，则 U 的陪域是 Borel 可测的. 然而，尚不知道假设 E 可分是否是本质性的.

§ 4. 以下著作包含算子理论的另一方法在该问题及相关问题上的应用：

S. Mazurkiewicz, *Sur les fonctions non dérivables*, Studia Math. III (1931), p. 92-94,

S. Mazurkiewicz, *Sur l'intégrale* $\int_0^t \frac{f(x+t)+f(x-t)-2f(x)\,dt}{t}$, 同上, p. 114-118,

S. Banach, *Über die Bairesche Kategorie gewisser Funktionenmengen*, 同上, p. 173-179,

H. Auerbach et S. Banach, *Über die Höldersche Bedingung*, 同上, p. 180-184,

S. Kaczmarz, *Integrale vom Dinischen Typus*, 同上, p. 189-199.

§ 5. 算子理论在微分方程问题上的其他应用见于以下注记：

S. Banach, *Sur certains ensembles de fonctions conduisant aux équations partielles du second ordre*, Math. Zeitschr. 27 (1927), p. 68-75,

W. Orlicz, *Zur Theorie der Differentialgleichung* $\frac{dy}{dx} = f(x, y)$, Bull. de l'Acad. Polon. des Sc. et des Lett., Février 1932.

§ 7. 给定线性闭集 $G \subset (s)$，对每个元素 $x_0 \in (s) \setminus G$，存在定义于 (s) 上的线性泛函 $f(x)$ 使得对一切 $x \in G$ 有 $f(x) = 0$ 且 $f(x_0) = 1$.

第 51 页定理 12 蕴含：若定义于 (s) 上的线性运算的陪域位于 (s) 中，则它是闭集.

第四章

§ 1. 赋范向量空间曾被 M. N. Wiener 独立于我在几乎同一时期研究过，见著作 *Limit in terms of continuous transformation*, Bull. de la Soc. math. de France 150 (1922), p. 124-134.

第 227-228 页定义的空间 11-13、(O) 和 (o) 都是 (B) 型的. 相反，第 10 页例 2 中的空间 (s)（亦见第 50-52 页）不是 (B) 型的，而且正如 M. S. Mazur 所证明的，它甚至不与任何 (B) 型空间同胚.

§ 2 和 **§ 3**. 对 (F) 型空间 E 可以建立如下两个性质的等价性：

(α) 给定定义于线性集 $G \subset E$ 上的线性泛函 $f(x)$，存在定义于 E 上的线性泛函 $F(x)$ 使得对一切 $x \in G$ 有 $F(x) = f(x)$.

(β) 在同样条件下，若 G 还是闭的，则对每个 $x_0 \in E \setminus G$，存在定义于 E 上的线性泛函 $F(x)$ 使得 $F(x_0) \neq 0$，但对一切 $x \in G$ 有 $F(x) = 0$.

然而，这些性质不一定呈现于所有 (F) 型空间. 例如，定义于空间 (S) 上的所有线性泛函都恒为零.

给定两个 (B) 型空间 E 和 E_1 以及定义于线性集 $G \subset E$ 上且陪域位于 E_1 中的线性运算 $U(x)$，尚不知道它是否能从 G 延拓到整个 E，即是否存在定义于 E 上、陪域位于 E_1 中且对一切 $x \in G$ 满足 $V(x) = U(x)$ 的线性运算 $V(x)$.

当 E_1 是有限维时，$U(x)$ 的这种延拓总是可能的，但即使如此，条件 $|V|_E = |U|_G$ 也可能无法实现.

§ 4. 第 72 页的条件 $1^0 - 3^0$ 可被如下两个条件代替：

1) 对所有 $j > n$（$n = 1, 2, \ldots$）有 $\alpha_{nj} = 0$，

2) 对 $n = 1, 2, \ldots$ 有 $\sum_{j=1}^{n} |\alpha_{nj}| = |f|$.

M. Orlicz 空间 (O) 和 (o)（参见第 227-228 页）中线性泛函的一般形式在他的引述著作中建立. 例如，定义于空间 (O) 上的每个线性泛函 $f(x)$ 形如 $f(x) = \int_0^1 x(t)\alpha(t)\,\mathrm{d}t$，其中 $\alpha(t)$ 是使得 $\int_0^1 N(k\alpha(t))\,\mathrm{d}t$ 对某个介于 0 和 1 之间的 k 存在的函数.

据 M. F. Riesz，定义于 (C) 上的线性泛函 $f(x) = \int_0^1 x(t)\,\mathrm{d}g(t)$（其中 $g(t)$ 是有界变差函数）的范数等于如下定义的函数 $\overline{g}(t)$ 的变差：$\overline{g}(0) = g(0)$，$\overline{g}(1) = g(1)$，且对 $0 < t < 1$ 有 $\overline{g}(t) = \lim_{h \to +0} g(t+h)$.

§ 6. 参见 F. Riesz, *Sur l'approximation des fonctions continues et des fonctions sommables*, Bull. of the Calcutta Math. Soc. XX (1928/29), p. 55-58.

§ 8. 参见 F. Riesz 的著作 *Les systèmes d'équations linéaires à une infinité d'inconnues*, Paris 1913.

第五章

§ 1. 第 79 页定理 3 蕴含：范数整体有界的线性运算序列 $\{U_n(x)\}$ 的收敛点集 Q 总是闭的. 在一般情况下，Q 是一个 F_σ 集.

在此还需指出，如 M. Mazur 和 L. Sternbach 所证明的，若 $\{U_n(x)\}$ 是线性泛函序列且其收敛点集 Q 不是闭的，则 Q 中存在点序列 $\{x_i\}$ 和点 $x_0 \in E \setminus Q$ 使得 $\lim_{i \to \infty} x_i = x_0$ 且双重序列 $\{U_n(x_i)\}$ 有界. 由此作为推论可得：在这些条件下 Q 不是 G_δ 集. 这些陈述可推广到更一般的情形，其中 $\{U_n(x)\}$ 是线性运算序列，只要其陪域位于同样为 (B) 型且满足如下性质的空间 E_1 中：

(γ) 对每个序列 $\{y_n\}$（其中 $y_n \in E_1$ 且 $|y_n| = 1$ 对 $n = 1, 2, \ldots$），存在数列 $\{t_n\}$ 使得级数 $\sum_{n=1}^{\infty} t_n y_n$ 发散但其部分和的范数序列有界.

空间 (c) 以及所有有限维 (B) 型空间都具有性质 (γ).

据 M. S. Mazur 和我的共同注记，上述推论还可进一步精确为：在考虑的条件下，集合 Q 不是 $G_{\delta\sigma}$ 集. 作为应用，可推出如下定理：每个无穷维 (B) 型空间 E 包含一个线性集，它是 $F_{\sigma\delta}$ 集但不是 $G_{\delta\sigma}$ 集. M. S. Mazur 和 L. Sternbach 进一步证明每个这样的空间包含一个线性集，它不是 F_σ 集却是 F_δ 集与 G_δ 集的公共部分；然而每个线性 G_δ 集在其中都是闭的.

在某些 (B) 型空间中可以建立作为 $F_{\sigma\delta\sigma}$ 集但不是 $F_{\sigma\delta}$ 集的线性集的存在性. 无穷维 (B) 型空间中是否总存在这样的集合仍是未解决的问题. 也不知道 (F) 型空间是否包含属于更高 Baire 类的线性集，或不可测 (B) 的解析线性集，或满足 Baire 条件但不是解析集的线性集. 每个无穷维 (F) 型空间都包含不满足 Baire 条件的线性集.

这些问题与有关加性运算的某些问题相关联. 设 E 和 E_1 为 (F) 型空间，每个定义于线性闭集 $G \subset E$ 上且陪域位于 E_1 中的加性 Borel 可测算子 $U(x)$ 据第 23 页定理 4 是连续的. 然而，若集合 G 不是闭的，运算 $U(x)$ 可能不连续：我们知道这样的例子，其中 G 是 Borel 可测的，运算 $U(x)$ 是第一类 Baire 间断的；但我们不知道它是否可以是更高 Baire 类的. 同样，也不知道运算 $U(x)$ 是否可以满足 Baire 条件却不是 Borel 可测的.

对线性运算的逆运算的研究导致间断的加性运算. 设 E 和 E_1 为 (F) 型空间，若线性运算 $y = U(x)$ 一一地将 E 变换为闭集 $G_1 \subset E_1$，则逆运算 $x = U^{-1}(y)$ 据第 41 页定理 5 是连续的. 然而，若 G_1 不是闭的，运算 U^{-1} 可能不连续，但若空间 E 可分，它总是 Borel 可测的. 例如，当 $E = E_1 = (L^2)$ 时，该运算是第一类 Baire 的.

§ 3. 第 151 页引理和定理 8 见于 M. F. Riesz 的注记 l.c., p. 151. 容易看出定理 8 的逆定理也是成立的. 此外，定理 8 可推广如下：每个包含一个在其中紧的球的 (F) 型空间只有有限维；容易看出其逆也成立.

§ 4. 第 85 页关于 $(L^{(r)})$ 的定理在 $r = 1$ 的情形来自 M. H. Lebesgue（见 Annales de Toulouse, 1909）.

§ 6. 所有这些例子都是熟知的.

§ 7. 对应于矩阵 (A) 的方法 A 称为**正规的**，若 $a_{ik} = 0$ 当 $i < k$ 且 $a_{ik} \neq 0$ 当 $i = k$. 对 $k > 0$，Cesàro 法 C_k 和 Euler 法 E_k 都是这样的. 据 M. S. Mazur（l.c., Stud. Math. II, p. 40-50），后者是完善的.

尚不知道当方法 A 不可逆时，第 95 页定理 11 是否仍然成立.

第 95 页定理 12 可补充如下：若方法 A 是保形的、可逆的，且使得每个按 A 可求和于某数的序列按每个不弱于 A 的保形方法也可求和于同一数，则 A 是完善法.

关于定义于可分子空间 $E \subset (m)$ 的向量空间上线性泛函一般形式的定理（见第 72 页）表明，每个线性泛函 $f(x)$ 与由某方法 A 得到的广义极限一致，即存在矩阵 (A) 使得 E 的每个序列按对应于此矩阵的方法可求和于 $f(x)$. 然而，若 E 不可分，该定理可能不成立；更进一步，如 M. S. Mazur

所观察到的，此时可能存在线性泛函序列 $\{f_n(x)\}$ 弱收敛于线性泛函 $f(x)$，且对每个 $n=1,2,\ldots$，$f_n(x)$ 与由适当方法得到的广义极限一致，而 $f(x)$ 却没有这一性质.

第六章

§ 1. 全连续运算的概念应归于 M. D. Hilbert 和 M. F. Riesz，他们也是最先指出其用途的人.

据 M. S. Mazur 的注记，有如下定理：设 $\{U_n(x)\}$ 是定义于 (B) 型空间 E 上的线性全连续运算序列，使得对每个 $x\in E$ 有 $\lim_{n\to\infty}U_n(x)=x$，则集合 $G\subset E$ 为紧的充要条件是 $\{U_n(x)\}$ 在 G 上一致收敛. 据第 96 页定理 1，具有这样运算序列的空间 E 是可分的. 反过来，是否每个可分的 (B) 型空间 E 都有这样的运算序列，仍是未解决的问题.

关于 $G\subset E$ 紧性判别法，另参见 A. Kolmogoroff, *Über Kompaktheit der Funktionenmengen bei der Konvergenz im Mittel*, Göttinger Nachrichten 1931, p. 60-63.

§ 2. 所有这些例子都是已知的.

§ 3. 共轭运算的概念是在我的注记 *Sur les fonctionnelles linéaires II*, Studia Mathematica I (1929), p. 223-239 中首次以完全一般的形式引入的，该注记也包含第 100 页定理 3. 第 100 页定理 4 的证明亦见于 M. J. Schauder 的注记 *Über lineare vollstetige Funktionaloperationen*, Studia Mathematica II (1930), p. 183-196.

第七章

§ 1. M. W. Orlicz 观察到，对弱完备空间 E，第 107 页定理 2 可以进一步精确化，即级数 (2) 此时对每个 $x\in E$ 收敛.

双正交系 $\{x_i\},\{f_i\}$ 称为**完备的**，如果序列 $\{x_i\}$ 和 $\{f_i\}$ 都是完全序列（定义见第 42 页和第 58 页）. 可以证明每个可分的 (B) 型空间中存在完备的双正交系.

双正交系 $\{x_i\},\{f_i\}$ 称为**规范的**，如果 $|x_i|=|f_i|=1$ 对 $i=1,2,\ldots$ 成立. 据 M. H. Auerbach 的注记，每个有限维 (B) 型空间中存在规范完备的双正交系. 然而，尚不知道每个可分的 (B) 型空间中是否都如此，甚至不知道其中是否总存在满足 $|x_i|=1$ 对 $i=1,2,\ldots$ 且 $\lim_{i\to\infty}|f_i|<\infty$ 的完备双正交系.

§ 2. 由上条注释可在第 108 页定理 5 中去掉序列 $\{x_i(t)\}$ 和 $\{y_i(t)\}$ 完全的假设.

§ 3. 如下定理——Haar 系构成 $(L^{(p)})$（其中 $p\geqslant 1$）中的基——见于 M. J. Schauder 的注记 *Eine Eigenschaft des Haarschen Orthogonalsystems*, Math. Zeitschr. 28 (1928), p. 317-320.

可以证明：给定 (B) 型空间 E 中的元素序列 $\{x_n\}$，若对每个 $x\in E$ 恰存在一数列 $\{t_n\}$ 使得序列 $\left\{\sum_{n=1}^{k}t_nx_n\right\}$ 弱收敛于 x，则序列 $\{x_n\}$ 构成 E 中的基.

空间 $(C^{(p)})$（见第 11 页例 7）对 $p=1,2,\ldots$ 都有基；然而不知道第 12 页例 10 的空间中是否存在基. 也不知道例如如下空间中是否有基：由定义于正方形 $0\leqslant s\leqslant 1$, $0\leqslant t\leqslant 1$ 上且具有连续

一阶偏导数的所有实函数 $x(s,t)$ 构成的空间，其中初等运算按通常方式定义，范数由公式

$$\|x\| = \max_{\substack{0\leqslant s\leqslant 1\\0\leqslant t\leqslant 1}} |x(s,t)| + \max_{\substack{0\leqslant s\leqslant 1\\0\leqslant t\leqslant 1}} |x_s'(s,t)| + \max_{\substack{0\leqslant s\leqslant 1\\0\leqslant t\leqslant 1}} |x_t'(s,t)|$$

给出.

据第十一章 §8 第 185 页建立的定理 9，每个可分的 (B) 型空间 E 中存在基等价于每个线性闭集 $E_1 \subset (C)$ 中存在基. 然而，我们不知道任何这样的可分的无穷维 (B) 型空间的例子，它与 (L^2) 不同构，且其每个线性闭子集都包含基. 不过需指出，每个无穷维 (B) 型空间都包含一个具有基的无穷维线性闭子集.

基的概念显然可以对 (F) 型空间以更一般的方式引入. 在空间 (s) 中，基例如由元素序列 $\{x_i\}$ 给出，其中 $x_i = \{\xi_n^i\}$ 且 $\xi_n^i = \begin{cases} 1 & 当 i = n, \\ 0 & 当 i \neq n. \end{cases}$

空间 (S) 不含任何基；这是其中不存在不恒为零的线性泛函这一事实的推论.

第八章

§ 4 和 **§ 5**. 据 M. S. Mazur 的注记，第 123-124 页的定理 2-4 对 (F) 型空间 E 也成立，只需将定理 2 和 3 中的条件 (20) 替换为泛函序列 $\{f_n(x)\}$ 在某一球中有界这一条件.

§ 6. 泛函弱收敛的条件由 M. H. Hahn 对空间 (c) 给出，由 M. F. Riesz 对空间 $(l^{(p)})$（其中 $p \geqslant 1$）给出.

对空间 (c) 给出的线性泛函弱收敛的条件 (45) 和 (46)（见第 130 页，并按第 VIII 页修正）在空间 (c_0) 的情形化为：1^0 序列 $\{\sum_{i=1}^{\infty} |\alpha_{in}|\}$ 有界，以及 2^0 $\lim_{n\to\infty} \alpha_{in} = \alpha_i$ 对 $i = 1, 2, \ldots$.

第九章

§ 1. 元素弱收敛的概念首先在 (L^2) 空间中被 M. D. Hilbert 研究，在 $(L^{(p)})$ 空间（其中 $p > 1$）中被 M. F. Riesz 研究.

(B) 型空间 E 中的集合 G 称为**弱紧的**，如果 G 中每个元素序列都包含弱收敛子序列. 在空间 $(L^{(p)})$ 和 $(l^{(p)})$（其中 $p > 1$）中，每个有界集都是弱紧的（参见第 130-131 页）. 空间 (c) 和 (c_0) 也是如此，而空间 (C)、(L)、(l) 和 (m) 没有这一性质.

§ 2. 元素弱收敛的条件由 M. H. Hahn 对空间 (c) 给出，由 M. F. Riesz 对空间 (C) 和 $(l^{(p)})$（其中 $p \geqslant 1$）给出. 第 137 页关于 (l) 中弱收敛与依范数收敛等价的定理见于 M. J. Schur 的注记 *Über lineare Transformationen in der Theorie der unendlichen Reihen*, Journ. f. reine u. angew. Math. 151 (1921), p. 79-111.

值得注意的是，定义于 (B) 型空间 E 上的线性泛函序列的弱收敛，当将该序列看作空间 $\overline{E}$（即

定义于 E 上的所有线性泛函构成的空间，它也是 (B) 型的）中的元素序列时，不是该序列弱收敛的充分条件. 例如在 (l) 中，弱收敛的概念因是否将元素看作线性泛函的代表而有所不同.

§ 4. 若 (B) 型空间 E 中每个弱 Cauchy 序列 $\{x_n\}$（即满足 $\lim_{n\to\infty} f(x_n)$ 存在的序列）都弱收敛于 E 中的某元素，则称 E 是**弱完备的**. 空间 (c_0)，因而空间 (c) 和 (m)，都不是弱完备的. 空间 (L) 具有弱完备性是由 M. H. Steinhaus 建立的（见 *Additive und stetige Funktionaloperationen*, Math. Zeitschr. 5 (1918), p. 186-221），空间 $(L^{(p)})$ 和 $(l^{(p)})$（其中 $p>1$）是由 M. F. Riesz 建立的（见 *Untersuchungen über Systeme integrierbarer Funktionen*, Math. Ann. 69 (1910), p. 449-497）. 据 M. W. Orlicz 的注记（l.c. Bull. de l'Acad. Polon. des Sc. et des Lett., Février 1932），若 $\lim_{u\to\infty} \frac{1}{N(2u)} < +\infty$，则空间 (O) 是弱完备的；空间 (o) 也是如此.

(B) 型空间中的元素级数称为**无条件收敛**（”unbedingt konvergent”），如果无论改变其项的顺序它都保持收敛. 对 (F) 型空间建立的性质 7^0（第三章 §3，第 37 页）立即蕴含级数的绝对收敛总蕴含其无条件收敛，但不知道在有限维空间之外逆命题是否成立. M. W. Orlicz 证明了如下定理:

(1) 无条件收敛级数的和不依赖于其项的顺序，

(2) 级数无条件收敛的充要条件是每个子级数都收敛，

(3) 同样目的的充要条件是每个子序列都弱收敛于某元素.

由此，在空间 E 弱完备的假设下，级数 $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ 无条件收敛的充要条件是级数 $\sum_{n=1}^{\infty} |f(x_n)|$ 对每个定义于 E 的线性泛函 $f(x)$ 都收敛. 后一结果使得对弱完备空间可以建立元素无条件收敛级数的若干重要性质，它们完全类似于数的无条件收敛级数的性质. 例如级数 $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ 无条件收敛，如果存在数 $M>0$ 使得对任意不同的指标组 $n_1, n_2, \ldots, n_k$ 都有 $|x_{n_1}+x_{n_2}+\ldots+x_{n_k}|<M$，或者如果级数 $\sum_{n=1}^{\infty} t_n x_n$ 收敛，无论数列 $\{t_n\}$ 趋于 0. 这些定理在正交级数理论中起作用（参见 M. W. Orlicz, l.c., Stud. Math. I (1929), p. 241-255）.

第十章

§ 1. 关于本章发展的线性方程理论，参见 F. Hausdorff, *Zur Theorie der linearen Räume*, Journ. f. reine u. angew. Math. 167 (1932), p. 294-311.

本节定理在 $E=E'=(L^2)$ 的情形由 E. Hellinger 和 O. Toeplitz 证明（见 *Integralgleichungen und Gleichungen mit unendlichvielen Unbekannten*, Encyklopádie der Math. Wiss., Leipzig 1923-1927）. 在更一般的 $E=E'=(L^{(p)})$（其中 $p>1$）情形，定理 1 和 3 由 M. F. Riesz 建立，l.c., Math. Ann. 69 (1910), p. 449-497，$E=E'=(l^{(p)})$（其中 $p>1$）情形由同一作者在其著作 *Les systèmes d'équations linéaires à une infinité d'inconnues*, Paris 1913 中建立. 定理 2 和 4 对 $E=E'=(L^{(p)})$ 或 $(l^{(p)})$（其中 $p \geqslant 1$）由 M. S. Saks 证明，*Remarques sur les fonctionnelles linéaires dans les champs L^p*, Studia Mathematica I (1929), p. 217-222.

§ 2. 若在定理 15（第 154 页）中去掉运算 $U(x)$ 全连续的假设，所讨论的方程可能不具有相等个数的线性无关解. 然而可以证明，当 $U=1$ 时有不等式 $n \leqslant \nu$，且当空间 E 还是弱完备且其中

所有有界集都弱紧时，该不等式变为等式（参见 S. Mazur, *Über die Nullstellen linearer Operationen*, Stud. Math. II (1930), p. 11-20）.

第十一章

§ 2. 已知最早的 (B) 型空间之间等距变换的例子是将 (L^2) 变换为 (l^2) 的等距变换，它由 Riesz-Fischer 定理和 Parseval-Fatou 定理得到.

§ 3. 尚不知道第 166 页定理 2 对 (F) 型空间是否成立；据 M. S. Mazur 和 S. Ulam 的注记，对 (G) 型空间它显然是错的. 这些作者还向我指出了该定理 2 的如下推论：不可能以两种不同的方式在度量空间 E 中定义运算（元素加法和数乘），使得在两种情形下 E 都成为赋范向量空间且 E 的零元 Θ 保持不变.

§ 4. 我们不知道任何两个无穷维可分 (B) 型空间不同胚的例子；另一方面，也不知道如何证明例如 (C) 与 (c) 同胚. 同样，无法建立 (C) 与 (l) 之间的同胚. 然而空间 $(L^{(p)})$ 和 $(l^{(q)})$ 对任意 $p \geqslant 1 \leqslant q$ 都是同胚的（见 S. Mazur, *Une remarque sur l'homéomorphie des champs fonctionnels*, Stud. Math. I (1929), p. 83-85）.

特别值得关注的是 (C) 是否与定义于正方形上的连续函数空间同胚的问题. 我们不知道任何这样的例子：两个具有有限但不相等维数（Menger-Urysohn 意义下）的紧度量空间，其上的连续函数空间是同胚的.

§ 5. 旋转的概念可以一般地应用于 (G) 型空间. 可能其中绕 Θ 的唯一可能旋转由变换 $U(x) = x$ 给出；在 (F) 型空间中，变换 $V(x) = -x$ 也是绕 Θ 的旋转. 存在这样的无穷维 (B) 型空间，其中绕 Θ 只有这两种旋转. 第 174 页建立的 (L^2) 中旋转的一般形式 (15)（其实早已为人所知）表明，对任意范数为 1 的元素对 x 和 y，存在绕 Θ 的旋转将 x 变为 y. M. S. Mazur 提出如下问题：每个具有这一性质的可分的无穷维 (B) 型空间是否都与 (L^2) 等距？

§ 6. 同构的概念也适用于 (G) 型空间. 两个 (G) 型空间称为等价的，如果存在从其中一个到另一个的等距加性变换.

对两个同构的 (B) 型空间 E 和 E_1，令

$$(E, E_1) = \inf\left[\log\left(|U| \cdot |U^{-1}|\right)\right]$$

其中 U 取遍 E 到 E_1 的所有一一线性变换. 若 $(E, E_1) = 0$，则称空间 E 和 E_1 **几乎等距**. 等距空间同时也是几乎等距的. 其逆对有限维空间总是成立，但我们不知道例如空间 (c) 和 (c_0)（它们不是等距的）是否几乎等距.

考虑从给定 (B) 型空间 E 将其范数换为任意等价范数所得到的所有空间构成的集合 J_E. 显然属于 J_E 的每个空间都与 E 同构，且每个与 E 同构的空间都与 J_E 中某空间等距. 将 J_E 划分为子集，当两个空间几乎等距时将它们归入同一子集 ι. 对 J_E 的两个子集 ι_1 和 ι_2，令 $(\iota_1, \iota_2) = (E_1, E_2)$，其中 E_1 和 E_2 分别是属于 ι_1 和 ι_2 的任意空间. 可以证明这一定义是明确的，且如此赋度的所有 ι

构成的集合 I_E 构成一个完备的度量空间. 这些概念是我与 M. S. Mazur 合作引入的.

§ 7. 也可以研究无穷乘积. 以 $(E_1 \times E_2 \times \ldots c_0)$（其中 $E_1, E_2, \ldots$ 是 (B) 型空间）记如下定义的 (B) 型空间 E: E 的元素是所有满足 $x_n \in E_n$ $(n = 1, 2, \ldots)$ 且 $\lim_{n\to\infty} \|x_n\| = 0$ 的序列 $\{x_n\}$; 加法和数乘按分量进行; 范数 $\|\{x_n\}\| = \max \|x_n\|$. 类似地可定义例如空间 $(E_1 \times E_2 \times \ldots c)$、$(E_1 \times E_2 \times \ldots m)$ 和 $(E_1 \times E_2 \times \ldots l^{(p)})$（其中 $p \geqslant 1$）.

§ 8. P. Urysohn 最先证明了存在可分的度量空间，它包含与任意预先给定的可分度量空间等距的子空间（参见 P. Urysohn, *Sur un espace métrique universel*, Bull. Sci. Math. 151 (1927), p. 1-38）.

§ 9. 尚不知道空间 $\overline{E_1}$ 与 $\overline{E_2}$ 的等价是否蕴含空间 E_1 与 E_2 的同构（参见第 188 页定理 11）. 第 189 页定理 12 的逆命题显然是错的，但不知道第 189 页定理 13 的逆命题是否也如此，即 (B) 型可分空间 E 与其空间 $\overline{E}$ 的等价是否蕴含 E 中每个有界元素序列都包含弱收敛于 E 中某元素的子序列. 如下问题也仍然开放：给定 (B) 型空间 E 使得共轭空间 $\overline{E}$ 不可分，E 中是否存在不包含任何弱收敛子序列的有界元素序列?

第十二章

这里我们将列举一系列等距性质、同构性质或维数性质，即当从具有该性质的 (B) 型空间过渡到任意等距、同构或线性维数相等的空间时保持再现的性质.

等距性质

(1) 元素序列 $\{x_n\}$ 弱收敛于元素 x_0 且 $\lim_{n\to\infty} |x_n| = |x_0|$ 蕴含 $\lim_{n\to\infty} |x_n - x_0| = 0$.

(2) $|x_0| = 1$ 蕴含存在唯一的线性泛函 $f(x)$ 使得 $f(x_0) = 1$ 且 $|f| = 1$.

(3) 空间与其共轭空间等距.

(4) 空间与其每个无穷维线性闭子集等距.

(5) 任意两个具有给定有限维数 $n \geqslant 2$ 的线性子集之间等距.

同构性质

(6) 基的存在性.

(7) 对每个线性闭子集 S，存在线性闭子集 T 使得每个元素 x 都能唯一表示为 $x = s + t$ 的形式，其中 $s \in S$ 且 $t \in T$.

(8) 对每个线性闭子集 S，存在从整个空间到整个 S 的线性变换.

(9) 对每个可分空间 E，存在从给定空间到整个 E 的线性变换.

(10) 空间与其共轭空间同构.

(11) 空间与其平方同构.

维数性质

(12) 弱完备性.

(13) 有界子集的弱紧性.

(14) 每个线性闭子集中基的存在性.

(15) 所有无穷维线性闭子集的同构性.

(16) 所有无穷维线性闭子集的线性维数相等.

(17) 元素弱收敛与依范数收敛的等价性.

(18) 空间的线性维数与其平方的线性维数相等.

下表列出了这些性质在诸空间中的已知存在 (+) 和不存在 (-)；空白格对应开放问题，而且绝非易事.

空间		(M)	(m)	(C)	$(C^{(p)})$	(c)	(c_0)	(L)	(L^2)	$(L^{(p)})$	(l)	$(l^{(p)})$
等距	(1)	$-$	$-$	$-$	$-$	$-$	$-$	$-$	$+$	$+$	$+$	$+$
	(2)	$-$	$-$	$-$	$-$	$-$	$-$	$-$	$+$	$+$	$-$	$+$
	(3)	$-$	$-$	$-$	$-$	$-$	$-$	$-$	$+$	$-$	$-$	$-$
	(4)	$-$	$-$	$-$	$-$	$-$	$-$	$-$	$+$	$-$	$-$	$-$
	(5)	$-$	$-$	$-$	$-$	$-$	$-$	$-$	$+$	$-$	$-$	$-$
同构	(6)	$-$	$-$	$+$	$+$	$+$	$+$	$+$	$+$	$+$	$+$	$+$
	(7)						$-$	$+$		$-$		
	(8)						$+$	$+$		$+$		
	(9)				$-$	$-$	$+$	$-$	$-$	$+$	$-$	
	(10)	$-$	$-$	$-$	$-$	$-$	$-$	$+$	$-$	$-$	$-$	
	(11)	$+$	$+$	$+$	$+$	$+$	$+$	$+$	$+$	$+$	$+$	$+$
维数	(12)	$-$	$-$	$-$	$-$	$-$	$+$	$+$	$+$	$+$	$+$	$+$
	(13)	$-$	$-$	$-$	$+$	$+$	$-$	$+$	$+$	$-$	$+$	
	(14)	$-$	$-$					$+$				
	(15)	$-$	$-$	$-$	$-$	$-$	$-$	$-$	$+$	$-$	$-$	$-$
	(16)	$-$	$-$					$+$				
	(17)	$-$	$-$	$-$	$-$	$-$	$-$	$-$	$+$	$-$	$+$	$-$
	(18)	$+$	$+$	$+$	$+$	$+$	$+$	$+$	$+$	$+$	$+$	$+$

如 M. S. Mazur 所指出的，存在可分的无穷维空间，它们不与 (L^2) 同构但具有性质 (3)，因而也具有性质 (10)，而在已知空间中不存在具有性质 (4)、(5) 或 (14) 的空间. M. Mazur 另一方面证明了，每个具有性质 (5) 对 $n=2$ 的可分的无穷维空间反过来都与 (L^2) 等距. 性质 (6) 在所有不可分空间中都不成立，但不知道是否所有可分空间都具有它. 也不知道是否存在一个可分的无穷维空间，它不与 (L^2)、(L) 或 (l) 同构但具有性质 (8). 性质 (11) 和 (18) 呈现于所有已知的无穷维空间；然而不

知道这对所有这样的空间是否一般地成立. 既不能证明也不能反驳每个可分空间都具有性质 (14). 最后，我们不知道任何这样的无穷维空间的例子，它不与 (L^2) 同构但具有性质 (15).

将注意到，这里考虑的等距性质都不是同构性质. 然而，我们不知道所列的所有同构性质是否同时也是维数性质. 在其他未解决的问题中，我们指出如下：

1^0 设 $X_1(x)$ 和 $X_2(x)$ 是定义于无穷维 (B) 型空间 E 上的任意两个不恒为零的线性泛函. 以 G_1 和 G_2 分别表示 E 中这些泛函为零的元素集，可以证明 $\dim_l(G_1) = \dim_l(G_2)$；然而是否 $\dim_l(G_1) = \dim_l(E)$?

2^0 设两个 (B) 型空间的线性维数不可比较，它们的平方的线性维数是否也如此?

最后，我们给出 M. S. Mazur 关于赋范向量空间几何的若干结果.

以 E 记这样的空间，称形如 $U(x) = x + x_0$（其中 $x_0 \in E$）的等距变换为**平移**；由线性集经平移得到的集合称为**线性流形**. 若不存在线性闭集 G 使得 $H \subset G \subset E$ 且 $H \neq G \neq E$，则称线性流形 $H \neq E$ 为**超平面**. 若连接 $A \setminus H$ 中两点的每个线段都与 H 不交，则称集合 A 位于超平面 H 的**一侧**. 若集合 C 是闭的、凸的且包含内点，则称之为**凸体**. 若凸体 C 位于超平面 H 的一侧且与 H 距离为 0，则称 H 为 C 的**支撑平面**（"Stuetzebene"）；特别地，H 因此可以经过 C 的边界点.

这样，有如下定理：经过凸体 C 的每个边界点 x_0 都有 C 的支撑平面 H 通过（参见 G. Ascoli, *Sugli spazi lineari...*, Annali di Matematica X (1932), p. 33-81）. 由此推出每个闭凸集都是弱闭的. 换言之：给定 E 中弱收敛于 $x_0 \in E$ 的点序列 $\{x_n\}$，存在带自然数指标的非负数 $c_i^{(n)}$ 使得对每个 n 从某个 i 起有 $c_i^{(n)} = 0$，且由 $y_n = \sum_{i=1}^{\infty} c_i^{(n)} x_i$（对每个 i 从某个 n 起）定义的点序列 $\{y_n\}$ 收敛于点 x_0. M. S. Mazur 和我最先通过另一途径得到了后一收敛性.

特别地，对空间 (C)，它也曾被 D. C. Gillespie 和 W. A. Hurwitz 建立（见 *On sequences of continuous functions having continuous limits*, Transact. Americ. Math. Soc. 32 (1930), p. 527-543），且独立地被 Z. Zalcwasser 建立（见 *Sur une propriete du champ des fonctions continues*, Studia Mathematica II (1930), p. 63-67）.

进一步可以证明：(有界) 点序列 $\{x_n\}$ 弱收敛于点 x_0 的充要条件是，每个包含无穷多个点 x_n 的 (有界) 凸体都包含点 x_0.

术语表

外文术语	中文术语
absolument continue	绝对连续的.
ajusté de Θ	调整到 Θ.
application	应用.
approximation	逼近.
autour de Θ	绕 Θ.
axiome	公理.
base	基.
base de Hamel	Hamel 基.
bicontinue	双连续.
biunivoque	一一的.
borne inf	下确界.
borne inférieure	下确界.
borne sup	上确界.
borne supérieure	上确界.
carré de E	E 的平方.
centre	中心.
centre du couple	点对中心.
circonférence	圆周.
classe d’ensembles	集类.
classe de Baire	Baire 类.
classe de Baire d’une opération	算子的 Baire 类.
classe totale	全类.
coefficients $c_i{(n)}$	系数 $c_i{(n)}$.
coefficients d’un élément	元素的系数.
combinaison linéaire	线性组合.

外文术语	中文术语
combinaisons linéaires	线性组合.
compacité faible	弱紧性.
compact métrique	度量紧集.
complémentaire	补集.
composition des transformations	变换的复合.
condensation des singularités	奇点凝聚.
condition de Baire	Baire 条件.
condition de Baire pour l'opération inverse	逆运算的 Baire 条件.
condition de Lipschitz	Lipschitz 条件.
condition nécessaire	必要条件.
condition suffisante	充分条件.
conditions (45) et (46)	条件 (45) 和 (46).
conditions aux limites	边界条件.
conditions nécessaires et suffisantes	充要条件.
conditions nécessaires et suffisantes pour la convergence faible	弱收敛的充要条件.
confinal avec ω	与 ω 共尾.
contredomaine	陪域.
converge partout	处处收敛.
convergence	收敛.
convergence asymptotique	渐近收敛.
convergence commutative	无条件收敛.
convergence en mesure	依测度收敛.
convergence faible	弱收敛.
convergence faible des éléments	元素的弱收敛.
convergence faible des fonctionnelles linéaires	线性泛函的弱收敛.
convergence faible des suites d'éléments	元素序列的弱收敛.
convergence forte	强收敛.
convergence suivant la norme	依范数收敛.
convergence vers le point	收敛于点.
convergente en moyenne	平均收敛.
convergente uniformément	一致收敛.
corollaire	推论.
corps convexe	凸体.
critère de compacité	紧性判别法.
critère de la compacité	紧性判别法.
de I-e catégorie	第一纲的.
de II-e catégorie	第二纲的.
décomposition en parties disjointes	不交分解.

外文术语	中文术语
définition	定义.
démonstration	证明.
dérivé faible	弱导数.
dérivé faible d’ordre 1	一阶弱导数.
dérivé faible d’ordre n	n 阶弱导数.
dérivé faible d’ordre transfini	超限阶弱导数.
dérivée partielle	偏导数.
dérivées partielles d’ordre 1	一阶偏导数.
dérivés faibles des ensembles de fonctionnelles linéaires	线性泛函集合的弱导数.
dérivés faibles successifs	逐次弱导数.
deuxième classe	第二数类.
développement	展开式.
diamètre	直径.
dim_l	线性维数（记号）.
dimension au sens de Menger-Urysohn	Menger-Urysohn 维数.
dimension linéaire	线性维数.
dimension linéaire égale	线性维数相等.
dimension linéaire inférieure	线性维数较小.
dimensions linéaires incomparables	线性维数不可比较.
distance	距离.
Domaine	定义域.
élément propre	特征元.
élément-zéro	零元.
ensemble abstrait	抽象集.
ensemble borné dans leur ensemble	整体有界集.
ensemble compact	紧集.
ensemble connexe	连通集.
ensemble convexe	凸集.
ensemble de fonctionnelles linéaires	线性泛函集合.
ensemble de points de convergence	收敛点集.
ensemble dénombrable dense	可数稠密集.
ensemble dense	稠密集.
ensemble $F_	
sigma$	$F_
sigma$ 集.	
ensemble $F_{	
sigma	
delta}$	$F_{

外文术语	中文术语
sigma	
delta}$ 集.	
ensemble $F_	
sigma$ non fermé	非闭 $F_
sigma$ 集.	
ensemble faiblement compact	弱紧集.
ensemble faiblement fermé	弱闭集.
ensemble fermé	闭集.
ensemble fondamental	基本集.
ensemble $G_	
delta$	$G_
delta$ 集.	
ensemble $G_{	
delta	
sigma}$	$G_{
delta	
sigma}$ 集.	
ensemble isolé	孤立集.
ensemble linéaire faiblement fermé	弱闭线性集.
ensemble linéaire fermé	线性闭集.
ensemble linéaire $G_	
delta$	线性 $G_
delta$ 集.	
ensemble mesurable (A)	解析集.
ensemble mesurable (B)	Borel 可测集.
ensemble mesurable (J)	Jordan 可测集.
ensemble non dense	无处稠密集.
ensemble ouvert	开集.
ensemble parfait	完美集.
ensemble régulièrement fermé	正则闭集.
ensemble séparable	可分集.
ensemble total	全集.
ensemble transfiniment fermé	超限闭集.
entier de p	p 的整数部分.
entourage	邻域.
équation différentielle partielle linéaire	线性偏微分方程.
équation fonctionnelle linéaire	线性泛函方程.
équation intégrale de Fredholm	Fredholm 积分方程.

外文术语	中文术语
équation intégrale de Volterra	Volterra 积分方程.
équation intégrale symétrique	对称积分方程.
équation linéaire conjuguée	共轭线性方程.
équation linéaire totalement continue	全连续线性方程.
équivalence	等价.
espace à n dimensions	n 维空间.
espace à une infinité de dimensions	无穷维空间.
espace abstrait	抽象空间.
espace (C)	(C) 型空间.
espace (c)	(c) 型空间.
espace (c_0)	(c_0) 空间.
espace $(C{(p)})$	$C{(p)}$ 空间.
espace compact	紧空间.
espace complet	完备空间.
espace conjugué	共轭空间.
espace conjugué avec	与... 共轭的空间.
espace (D) complet	完备 (D) 型空间.
espace des fonctionnelles linéaires	线性泛函空间.
espace des fonctions mesurables	可测函数空间.
espace des fonctions réelles continues	实连续函数空间.
espace des suites convergentes vers 0	收敛于 0 的序列空间.
espace du type (B)	(B) 型空间.
espace du type (F)	(F) 型空间.
espace du type (G)	G 型空间.
espace $(E_1 times E_2 times ldots c)$ times E_2 times ldots c)$ 空间.	$(E_1
espace $(E_1 times E_2 times ldots c_0)$ times E_2 times ldots c_0)$ 空间.	$(E_1

外文术语	中文术语
espace $(E_1	
times E_2	
times	
ldots l{(p)})$	$(E_1
times E_2	
times	
ldots l{(p)})$ 空间.	
espace $(E_1	
times E_2	
times	
ldots m)$	$(E_1
times E_2	
times	
ldots m)$ 空间.	
espace euclidien	欧几里得空间.
espace euclidien n-dimensionnel	n 维欧几里得空间.
espace faiblement complet	弱完备空间.
espace $(H{(p)})$	$H{(p)}$ 空间.
espace (l)	(l) 型空间.
espace (L)	(L) 型空间.
espace $(l{(p)})$	$l{(p)}$ 空间.
espace $(L{(p)})$	$L{(p)}$ 型空间.
espace $(L{(r)})$	$L{(r)}$ 空间.
espace linéaire	线性空间.
espace (M)	(M) 型空间.
espace (m)	(m) 型空间.
espace métrique	度量空间.
espace normé	赋范空间.
espace (O)	(O) 空间 (Orlicz 空间).
espace (o)	(o) 空间 (Orlicz 序列空间).
espace (Q)	(Q) 空间.
espace (R)	(R) 空间.
espace (S)	(S) 空间.
espace (s)	(s) 空间.
espace séparable	可分空间.
espace universel	万有空间.
espace vectoriel	向量空间.
espace vectoriel (D) complet	完备 (D) 型向量空间.

外文术语	中文术语
espace vectoriel normé	赋范向量空间.
exposant conjugué	共轭指数.
extension	延拓.
facteurs	因子.
faiblement continu	弱连续的.
faiblement convergent	弱收敛的.
faiblement dense	弱稠密的.
faiblement fermé	弱闭的.
fonction à carré sommable	平方可积函数.
fonction à variation bornée	有界变差函数.
fonction absolument continue	绝对连续函数.
fonction bornée	有界函数.
fonction caractéristique	特征函数.
fonction conjuguée	共轭函数.
fonction continue	连续函数.
fonction continue sans dérivée	连续不可导函数.
fonction convexe	凸函数.
fonction croissante	增函数.
fonction de la première classe de Baire	Baire 第一类函数.
fonction en escalier	阶梯函数.
fonction intégrable	可积函数.
fonction mesurable	可测函数.
fonction mesurable et bornée	可测有界函数.
fonction périodique de période 1	周期为 1 的函数.
fonction réelle bornée	有界实函数.
fonction sommable	可和函数.
fonctionnelle additive	加性泛函.
fonctionnelle faiblement continue	弱连续泛函.
fonctionnelle homogène	齐次泛函.
fonctionnelle linéaire	线性泛函.
fonctionnelle linéaire à la norme ≤ 1	范数 ≤ 1 的线性泛函.
fonctionnelle non négative	非负泛函.
fonctionnelle nulle	零泛函.
fonctionnelle propre	特征泛函.
fonctionnelles analytiques	解析泛函.
fonctions harmoniques	调和函数.
fonctions quasi-périodiques	拟周期函数.
fonctions réelles bornées	有界实函数（复数）.

外文术语	中文术语
fonctions trigonométriques	三角函数.
forme générale des fonctionnelles linéaires	线性泛函的一般形式.
groupe	群.
groupe abélien	阿贝尔群.
homéomorphes	同胚的.
hyperplan	超平面.
I-e catégorie	第一纲.
II-e catégorie	第二纲.
indépendance linéaire	线性无关.
inégalité de Hölder	Hölder 不等式.
inégalité de Riesz	Riesz 不等式.
intégrable (R)	Riemann 可积.
intégrale	积分.
intégrale de Lebesgue	Lebesgue 积分.
intégrale de Lebesgue-Stieltjes	Lebesgue-Stieltjes 积分.
intégrale de Stieltjes	Stieltjes 积分.
intégrale double	二重积分.
intégrale inférieure	下积分.
intégrale riemannienne	Riemann 积分.
intégrale supérieure	上积分.
intervalle fermé	闭区间.
intervalle partiel	子区间.
invariance par translation	平移不变性.
isométrie	等距.
isométrique	等距的.
isomorphes	同构的.
isomorphie	同构.
lemme	引理.
limite	极限.
limite d'une suite	序列极限.
limite d'une suite faiblement convergente	弱收敛序列的极限.
limite faible	弱极限.
limite faible des suites	序列的弱极限.
limite généralisée	广义极限.
limite inférieure	下极限.
limite supérieure	上极限.
limite transfinie	超限极限.
limite transfinie inférieure	下超限极限.

外文术语	中文术语
limite transfinie supérieure	上超限极限.
mesurable (B)	Borel 可测的.
mesurable (J)	Jordan 可测.
mesurable (L)	Lebesgue 可测.
mesure	测度.
mesure de densité	密度测度.
mesure jordanienne	Jordan 测度.
méthode de la diagonale	对角线法.
méthode de sommation	求和法.
méthode normale	正规法.
méthodes d'Euler	Euler 法.
méthodes de Cesàro	Cesàro 法.
métrique équivalente	等价度量.
métrique glissante	平移不变度量.
module	模.
nécessité	必要性.
nombre complexe	复数.
nombre de solutions linéairement indépendantes	线性无关解的个数.
nombre ordinal	序数.
nombre transfini de deuxième classe	第二数类的超限数.
nombre-limite	极限数.
non négatif	非负的.
non négative	非负的.
norme	范数.
norme de l'opération	算子范数.
normée	归一的.
normes équivalentes	等价范数.
noyau	核.
noyau symétrique	对称核.
opération additive	加性算子.
opération additive et mesurable (B)	加性 Borel 可测算子.
opération associée	相伴算子.
opération biunivoque	一一运算.
opération conjuguable	共轭运算.
opération conjuguée	共轭算子.
opération conjuguée généralisée	广义共轭算子.
opération homogène	齐次算子.
opération inverse	逆算子.

外文术语	中文术语
opération inverse continue	连续逆运算.
opération linéaire	线性算子.
opération linéaire biunivoque	一一线性算子.
opération linéaire définie dans un ensemble linéaire	定义在线性集上的线性算子.
opération linéaire discontinue	不连续线性算子.
opération mesurable (B)	Borel 可测算子.
opération symétrique	对称算子.
opération totalement continue	全连续算子.
opérations analytiques	解析运算.
orthogonal à	正交于.
orthogonal et normé	规范正交的.
orthogonale normée	规范正交的.
parfaite	完善的.
pas plus faible	不弱于.
permanente	保形的.
plan d'appui	支撑平面.
plus grand nombre cardinal	最大基数.
point d'accumulation	聚点.
point d'accumulation faible	弱聚点.
point de continuité	连续点.
point de convergence	收敛点.
point intérieur	内点.
point-limite	极限点.
polynômes	多项式.
précédent immédiat	直接前驱.
presque isométriques	几乎等距的.
presque partout	几乎处处.
problème des moments	矩问题.
produit des espaces	空间的乘积.
produit infini d'espaces	空间的无穷乘积.
prolongement d'une opération linéaire	线性算子的延拓.
propriété dimensionnelle	维数性质.
propriété $(	
gamma)$	性质 $(
gamma)$.	
propriété isométrique	等距性质.
propriété isomorphe	同构性质.
puissance sommable	p 次可积.

外文术语	中文术语
rayon	半径.
reciproquement	反之.
régulièrement fermé	正则闭的.
reversible	可逆的.
rotation	旋转.
segment	线段.
série commutativement convergente	无条件收敛级数.
série convergente	收敛级数.
série de Fourier	Fourier 级数.
série entière	幂级数.
singularité	奇点.
solution unique	唯一解.
sommable (L)	Lebesgue 可积.
somme	和.
somme de la série	级数和.
somme dénombrable	可数并.
somme partielle	部分和.
sommes partielles	部分和.
sous-ensemble	子集.
sous-ensemble linéaire	线性子集.
sous-espace vectoriel fermé	闭向量子空间.
sous-espace vectoriel séparable	可分子空间.
sous-groupe	子群.
sous-suite partielle faiblement convergente	弱收敛子序列.
spectre	谱.
sphère	球.
sphère ouverte	开球.
suffisance	充分性.
suite	序列.
suite biorthogonale	双正交序列.
suite bornée	有界序列.
suite complète	完全序列.
suite convergente vers 0	收敛于 0 的序列.
suite croissante	递增序列.
suite de fonctionnelles linéaires	线性泛函序列.
suite de fonctions	函数序列.
suite double	双重序列.
suite double bornée	有界双重序列.

外文术语	中文术语
suite extraite	子序列.
suite fermée	闭序列.
suite fondamentale	基本序列.
suite infinie	无穷序列.
suite non décroissante	单调不减序列.
suite orthogonale	正交序列.
suite orthogonale normée complète	完备规范正交序列.
suite partielle	子序列.
suite transfinie	超限序列.
Suites biorthogonales	双正交序列.
Suites faiblement convergentes d'éléments	元素的弱收敛序列.
système biorthogonal complet	完备双正交系.
système biorthogonal normé	规范双正交系.
système d'équations à une infinité d'inconnues	无穷未知量方程组.
système d'équations linéaires à une infinité d'inconnues	无穷未知量线性方程组.
système orthogonal	正交系.
système orthogonal de Haar	Haar 正交系.
tableau	矩阵.
théorème	定理.
théorème de Arzelà	Arzelà 定理.
théorème de la valeur moyenne	平均值定理.
théorème de M. S. Mazur	Mazur 定理.
théorème de Parseval-Fatou	Parseval-Fatou 定理.
théorème de Riesz-Fischer	Riesz-Fischer 定理.
théorèmes de Fredholm	Fredholm 定理.
théorie de Riesz	Riesz 理论.
théorie des développements orthogonaux	正交展开理论.
théorie des séries orthogonales	正交级数理论.
totalement continue	全连续的.
transfiniment fermé	超限闭的.
transformation biunivoque	一一变换.
transformation biunivoque et bicontinue	一一且双连续变换.
transformation continue	连续变换.
transformation homéomorphe	同胚变换.
transformation isométrique	等距变换.
transformation isométrique additive	等距加性变换.
transformation isométrique de $(L2)$ en $(l2)$	$(L2)$ 到 $(l2)$ 的等距变换.
transformation linéaire biunivoque	一一线性变换.

外文术语	中文术语
translation	平移.
type elliptique	椭圆型.
type hyperbolique	双曲型.
type parabolique	抛物型.
uniformément continue	一致连续.
valeur absolue	绝对值.
valeur propre	特征值.
valeur régulière	正则值.
variation	变差.
variation bornée	有界变差.
variation totale	全变差.
variétés linéaires	线性流形.
voisinage	邻域.
vrai max	本质上确界.
vrai sous-ensemble	真子集.